Ore集合の作り方*

黒木玄

2012年04月12日更新†

目 次

0 はじめに 1

1 非可換環の Ore 集合と局所化に関するまとめ 1

2 Ore 集合の作り方 4
- 2.1 簡単な Ore 集合の例 . . . 4
- 2.2 整域が Ore 整域であるための十分条件 . . . 6
- 2.3 AR 性質を用いた Ore 集合の構成 . . . 8

3 付録 11
- 3.1 非可換環に関する Hilbert の基底定理 . . . 11
- 3.2 Jacobson 根基 . . . 12
- 3.3 非可換局所環 . . . 13

0 はじめに

このノートでは環や体は可換とは限らないものとする. ただし環は結合法則を満たし, 乗法に関する単位元 1 を持つものとし, 環準同型は 1 を 1 に移すと仮定する. 非可換環の両側イデアルを単にイデアルと呼ぶ.

1 非可換環の Ore 集合と局所化に関するまとめ

A は (可換とは限らない) 環であるとする.

A が**整域 (domain, integral domain)** であるとは $A \neq 0$ でかつ任意の 0 でない $a, b \in A$ に対して $ab \neq 0$ となることである. A のイデアル P が**完全素イデアル (completely**

*これは Berenstein-Kazhdan の意味での “geometric crystal” の量子化の定式化に関する論文執筆のために勉強した非可換環の局所化に関するノートである.

†2011 年 11 月 16 日: 作成, 非可換環の Ore 集合と局所化に関するまとめ, Ore 集合の簡単な例. 2010 年 11 月 17 日: 整域が Ore 整域であるための十分条件. AR 性質を用いた Ore 集合の構成. 非可換に関する Hilbert の基底定理. 2010 年 11 月 18 日: 文献を追加. 形式べき級数環に関する Hilbert の基底定理を追加. 2010 年 11 月 19 日: タイポの訂正と多数の細かな訂正. 2010 年 11 月 25 日: Jacobson 根基と非可換局所環に関する説明を追加. 2010 年 11 月 26 日: Jacobson 根基と非可換局所環に関する証明を追加. 2012 年 04 月 14 日: $\prod_{n=0}(1-z^n)$ の $n=0$ を $n=1$ に訂正.

prime ideal) であるとは A/P が整域になることである．すなわち, P が A の固有なイデアルであり, $a, b \in A$ かつ $ab \in P$ ならば $a \in P$ または $b \in P$ となるとき, P は完全素イデアルと呼ばれる[1].

A の部分集合 S が A の**積閉部分集合 (multiplicatively closed subset)** であるとは $0 \notin S$, $1 \in S$ でかつ S が乗法で閉じていることである．A のイデアル P が完全素イデアルであるための必要十分条件は P の補集合 $A \setminus P$ が A の積閉部分集合になることである．

以下簡単のため A は (可換とは限らない) 整域であると仮定する．

A の積閉部分集合 S が A における**右 Ore 集合 (right Ore set)** であるとは任意の $a \in A$ と $s \in S$ に対してある $t \in S$ と $b \in A$ で $at = sb$ を満たすものが存在することである．積の順序を反転させることによって**左 Ore 集合 (left Ore set)** も定義される．

整域 A において $A \setminus \{0\}$ が右 Ore 集合になるとき A は**右 Ore 整域 (right Ore domain)** と呼ばれる．**左 Ore 整域 (left Ore domain)** も同様に定義される．整域 A が右 Ore 整域であるための必要十分条件は 0 でない任意の $a, b \in A$ に対して $aA \cap bA \neq 0$ が成立することである．

積閉部分集合 S が **Ore 集合 (Ore set)** であるとは S が右 Ore 集合かつ左 Ore 集合であることである．整域 A が **Ore 整域 (Ore domain)** であるとは A が右 Ore 整域かつ左 Ore 整域であることである．

S は A の積閉部分集合であるとし, 環 A' で次の条件を満たすものが存在すると仮定する: (1) A' は A を部分環として含む, (2) S の元は A' の中で可逆である, (3) A' の任意の元は as^{-1} ($a \in A$, $s \in S$) と表わされる．このとき S は A における右 Ore 集合でなければいけない．なぜならば $a \in A$, $s \in S$ に対して $s^{-1}a \in A'$ は $s^{-1}a = bt^{-1}$ ($b \in A$, $t \in S$) と表わされ, そのとき $at = sb$ が成立している．さらに上の仮定のもとで A' は次の普遍性を持つ．B が任意の環で $f : A \to B$ が S の元の f による像が B において可逆になるような環準同型であるならば, ある環準同型 $\tilde{f} : A' \to B$ で $\tilde{f} \circ \iota = f$ を満たすものが唯一存在する．

逆に S が A における右 Ore 集合ならば上の仮定を満たす A' を構成できる．

S は整域 A における右 Ore 集合であるとする．このとき $A \times S$ に同値関係 $\sim$ を次のように入れることができる:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \text{ある } c, d \in A \text{ が存在して } sc = td \in S \text{ かつ } ac = bd \text{ となる．}$$

A は整域であると仮定してあったので特に $(a, s) \sim (0, 1)$ は $a = 0$ と同値になる．商集合 $(A \times S)/\sim$ を AS^{-1} と書き, $(a, s) \in A \times S$ を代表元に持つ同値類を a/s と書くことにする．加法と乗法を

$$\begin{aligned} a/s + b/t &= (ac + bd)/u, \qquad && a, b, c, d \in A,\ s, t, u \in S,\ u = sc = td, \\ (a/s)(b/t) &= ab'/ts', \qquad && a, b, b' \in A,\ s, t, s' \in S,\ bs' = sb'. \end{aligned}$$

で定めることによって, AS^{-1} には自然に環構造が入る．自然な環準同型 $\iota : A \to AS^{-1}$ が $\iota(a) = a/1$ ($a \in A$) によって定まり, ι は単射になる．よって A と ι の像を同一視し, A を

[1]非可換環論では完全素イデアルと素イデアルを区別する．

環 A が**素環 (prime ring)** であるとは $A \neq 0$ であり, 0 でない A のイデアル I, J に対して $IJ \neq 0$ となることである．A のイデアル P が**素イデアル (prime ideal)** であるとは A/P が素環になることである．すなわち, P が A の固有なイデアルであり, A のイデアル I, J に対して $IJ \subset P$ ならば $I \subset P$ または $J \subset P$ となるとき, P は素イデアルと呼ばれる．

A が可換なとき, A が整域であることと素環であることは同値になり, A の完全素イデアルと素イデアルは一致する．

AS^{-1} の部分環とみなせる. 任意の $s \in S$ は AS^{-1} の中で可逆であり, $a \in A$, $s \in S$ に対して $a/s = as^{-1}$ が成立している.

AS^{-1} は右 Ore 集合 S による A の**右局所化 (right localization)** と呼ばれる. 左 Ore 集合 S による A の**左局所化 (left localization)** $S^{-1}A$ も同様に定義される.

右 Ore 集合 S による右局所化 AS^{-1} は次のような普遍性を持つ. B が任意の環で $f : A \to B$ が S の元の f による像が B において可逆になるような環準同型であるならば, ある環準同型 $\tilde{f} : AS^{-1} \to B$ で $\tilde{f} \circ \iota = f$ を満たすものが唯一存在する. 左 Ore 集合による左局所化 $S^{-1}A$ も同様の普遍性を持つ. S が A における Ore 集合であるとき右局所化 AS^{-1} と左局所化 $S^{-1}A$ はそれらの普遍性を用いて自然に同一視される. そのときそれらを S による A の**局所化 (localization)** と呼ぶ.

A が Ore 整域であるとき $A \setminus \{0\}$ による A の局所化は (可換とは限らない) 体をなす. その体を A の**分数体 (field of fractions)** もしくは**商体 (quotient field)** と呼ぶ.

AS^{-1} が well-defined であることの証明 (実際には整域に制限しない場合における定式化と証明) についてはたとえば [MR] の第 2 章や [GW] の第 4, 6, 10 章や [Ja] の第 1 章などを参照せよ. 演習問題集 [K1] にも完全な証明の詳細が書いてある[2]. Lie 代数の普遍展開環の教科書 [D] の第 3.6 節にも非可換環の局所化に関する解説がある.

補題 1.1 (補集合が Ore 集合になる完全素イデアルにおける局所化)**.** P は整域 A の完全素イデアルであるとし, 積閉部分集合 S を $S = A \setminus P$ と定める. S は A における Ore 集合であると仮定し, S による A の局所化を A_P と書くことにする. このとき A_P の乗法群の補集合 $\mathfrak{m}_P = A_P \setminus A_P^\times$ は A_P の最大の固有右イデアルでかつ最大の固有左イデアルになる. さらに A/P は Ore 整域になり, A/P の分数体を k_P と書くと, 自然な環の同型 $A_P/\mathfrak{m}_P \cong k_P$ が成立している. 特に A_P は局所環である.

証明. $a \in A$, $s \in S$ に対して $as^{-1} \in A_P^\times$ と $a \in S$ が同値であることを示そう. $a \in S$ ならば $a \in A_P^\times$ なので $as^{-1} \in A_P^\times$ である. 逆に $as^{-1} \in A_P^\times$ ならばある $b \in A$, $t \in S$ が存在して $as^{-1}bt^{-1} = 1$ となる. さらにある $c \in A$, $u \in S$ が存在して $s^{-1}b = cu^{-1}$ となる. このとき $1 = as^{-1}bt^{-1} = acu^{-1}t^{-1}$ なので $ac = tu \in S$ である. すなわち $ac \notin P$ なので $a \notin P$ すなわち $a \in S$.

したがって $\mathfrak{m}_P = \{\, as^{-1} \mid a \in P,\ s \in S \,\}$ である.

$\mathfrak{m}_P$ が A_P のイデアルであることを示そう. $A_P = AS^{-1}$ の加法の定義より $a, b \in P$, $s, t \in S$ に対してある $c, d \in A$, $u \in S$ が存在して $u = sc = td$, $as^{-1} + bt^{-1} = (ac+bd)u^{-1}$ となる. $ac + bd \in P$ より $as^{-1} + bt^{-1} \in \mathfrak{m}_P$. $A_P = AS^{-1}$ の乗法の定義より $a \in P$, $b \in A$, $s, t \in S$ に対してある $b' \in A$, $s' \in S$ が存在して $s^{-1}b = b's'^{-1}$ となり, $as^{-1}bt^{-1} = ab'(ts')^{-1}$ となる. $ab' \in P$ より $as^{-1}bt^{-1} \in \mathfrak{m}_P$. $A_P = S^{-1}A$ の乗法の定義から同様にして $bt^{-1}as^{-1} \in \mathfrak{m}_P$ も得られる.

A_P の固有右イデアルと固有左イデアルは A_P の可逆元を含まないので $\mathfrak{m}_P$ に含まれる. すなわち $\mathfrak{m}_P$ は最大の固有右イデアルでかつ最大の固有左イデアルである. よって特に $A_P/\mathfrak{m}_P$ は非自明な右イデアルを持たないので体になる.

自然な環準同型の列 $A \to A_P \to A_P/\mathfrak{m}_P$ の合成の核は P になるので, 自然な単射環準同型 $A/P \to A_P/\mathfrak{m}_P$ が得られる. $\alpha \in A_P$ の $A_P/\mathfrak{m}_P$ での像を $\overline{\alpha}$ と書くことにする.

A/P の 0 でない元はある $s \in S$ によって $s + P$ と表わされ, その $A_P/\mathfrak{m}_P$ での像は $\bar{s}$ になる. $s \notin \mathfrak{m}_P$ なので $A_p/\mathfrak{m}_P$ の中で $\bar{s} \neq 0$ となる. $A_P/\mathfrak{m}_P$ は体なので $\bar{s}$ はその中で可逆になる.

---

[2]ただしその演習問題集では左 Ore 集合による左局所化 $S^{-1}A$ の方を扱っている.AS^{-1} の well-definedness の完全な証明を書き下すとかなり長くなる. 簡単なパズルをたくさん解かなければいけない. たとえば同値関係 $\sim$ の推移律の証明でさえ自明ではない (難しくはない).

$A_P/\mathfrak{m}_P$ の元はある $a \in A$, $s \in S$ によって $\overline{as^{-1}} = \bar{a}\bar{s}^{-1}$ と表わされる．このことから A/P が右 Ore 整域であり, $A_P/\mathfrak{m}_P$ は $A/P \setminus \{0\}$ による A/P の右局所化に自然に同型であることがわかる．同様にして A/P が左整域であり, $A_P/\mathfrak{m}_P$ は $A/P \setminus \{0\}$ による A/P の左局所化に自然に同型であることがわかる． □

2 Ore 集合の作り方

この節では積閉部分集合が Ore 集合になるための十分条件を幾つか与える．

2.1 簡単な Ore 集合の例

例 2.1. 整域 A の積閉部分集合 S が A の中心に含まれるならば S は A における Ore 集合である． □

補題 2.2. S は整域 A の部分集合 F から生成された積閉部分集合であると仮定する．任意の $a \in A$ と $f \in F$ に対してある $t \in S$ と $b \in A$ で $at = fb$ を満たすものが存在するならば S は右 Ore 集合である．(積閉部分集合が左 Ore 集合であるかどうかも生成系を用いて同様に判定できる.)

証明. 任意の $s \in S$ はある $f_1, \dots, f_n \in F$ によって $s = f_1 \cdots f_n$ と表わされる．$a \in A$ を任意に取る．このとき,

ある $t_1 \in S$ と $b_1 \in A$ で $at_1 = f_1 b_1$ を満たすものが存在する．
ある $t_2 \in S$ と $b_2 \in A$ で $b_1 t_2 = f_2 b_2$ を満たすものが存在する．
ある $t_3 \in S$ と $b_3 \in A$ で $b_2 t_3 = f_3 b_3$ を満たすものが存在する．
$\dots\dots\dots\dots\dots$
ある $t_n \in S$ と $b_n \in A$ で $b_{n-1} t_n = f_n b_n$ を満たすものが存在する．
このとき $t = t_1 \cdots t_n \in S$, $b = b_n \in A$ とおくと

$$\begin{aligned} at &= at_1 t_2 t_3 \cdots t_n = f_1 b_1 t_2 t_3 \cdots t_n = f_1 f_2 b_2 t_3 \cdots t_n \\ &= \cdots = f_1 f_2 f_3 \cdots f_{n-1} b_{n-1} t_n = f_1 f_2 f_3 \cdots f_{n-1} f_n b_n = sb. \quad \square \end{aligned}$$

補題 2.3. S は整域 A の部分集合 F から生成された積閉部分集合であると仮定する．任意の $f \in F$, $a \in A$ に対してある正の整数 n と A の中心元 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ で

$$\alpha_0 f^n a + \alpha_1 f^{n-1} a f + \cdots + \alpha_{n-1} f a f^{n-1} + \alpha_n a f^n = 0, \quad \alpha_n \text{ は可逆}$$

を満たすものを存在するならば S は右 Ore 集合になる．「α_n は可逆」を「α_0 は可逆」で置き換えた同様の条件が成立しているならば S は左 Ore 集合になる．

証明. $f^n \in S$ であり,

$$af^n = f(-\alpha_n^{-1}(\alpha_0 f^{n-1} a + \alpha_1 f^{n-2} a f + \cdots + \alpha_{n-1} a f^{n-1}))$$

なので補題 2.2 より S は右 Ore 集合であることがわかる． □

例 2.4. $\mathfrak{g}$ は可換体 K 上の Lie 代数であるとし, その普遍展開環を $U(\mathfrak{g})$ と表わす. F は $\mathfrak{g}\setminus\{0\}$ の部分集合であり, 任意の $f\in F$, $x\in\mathfrak{g}$ に対してある正の整数 n で $(\operatorname{ad} f)^n x=0$ を満たすものが存在すると仮定する[3]. このとき F で生成される $U(\mathfrak{g})$ の積閉部分集合は $U(\mathfrak{g})$ における Ore 集合になる.

なぜならば仮定のもとで任意の $f\in F$, $a\in U(\mathfrak{g})$ に対してある正の整数 n で $(\operatorname{ad} f)^n a=0$ を満たすものが存在することがわかる. $(\operatorname{ad} f)^n a$ は

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{n-k}af^k=f^na-nf^{n-1}af+\cdots+(-1)^{n-1}nfaf^{n-1}+(-1)^naf^n$$

に等しいので, 補題 2.3 より S は右 Ore 集合かつ左 Ore 集合になることがわかる. □

例 2.5. U_q は量子展開環であるとし, その上三角の Chevalley 生成元を e_i $(i\in I)$ と表わし, その下三角の Chevalley 生成元を f_i $(i\in I)$ と表わす. e_i, f_i の U_q への随伴作用は局所べき零である. よって補題 2.3 より $\{\,e_i\mid i\in I\}\cup\{\,f_i\mid i\in I\}$ の任意の部分集合 F から生成される積閉部分集合 S は Ore 集合になる. □

例 2.6. K は非可換体であるとし, $K[t]$ は K の元と可換な不定元 t から生成される一変数多項式環であるとする. このとき $K[t]$ は Ore 整域である. $K[t]$ の分数体を $K(t)$ と書くことにする.

証明. 任意の 0 でない $a,b\in K[t]$ に対して $aA\cap bA\neq 0$ かつ $Aa\cap Ab\neq 0$ が成立することを示せばよい. 前者を示せば後者も同様に示される. a,b の多項式としての次数をそれぞれ $m,n\geqq 0$ と書く. 次数が d 以下の $K[t]$ の元全体の集合を A_d と書くことにする. A_d は自然に $d+1$ 次元の右 K ベクトル空間とみなせる. $aA_n+bA_m\subset A_{m+n}$ であり, aA_n, bA_m の右 K ベクトル空間としての次元はそれぞれ $m+1, n+1$ であり, A_{m+n} の次元は $m+n+1$ である. よって $aA_n\cap bA_m\neq 0$ でなければいけない. もしもそうでないならば aA_n+bA_m は直和になり, その次元は $m+n+2$ となり, それを含む空間の次元よりも大きくなってしまう. □

例 2.7. K は非可換体であるとし, $K[t]$ は K の元と可換な不定元 t から生成される一変数多項式環であるとする. このとき $M=tK[t]$ は $K[t]$ の完全素イデアルであり, その補集合 $S=K[t]\setminus M$ は $K[t]$ における Ore 集合になる. (S は定数項が 0 でないような多項式全体の集合である.)

証明. $K[t]/M\cong K$ なので M は $K[t]$ の完全素イデアルである. S が $K[t]$ における右 Ore 集合になることを示そう. (左 Ore 集合になることも同様に示される.) $f\in K[t]$ の定数項を $f(0)$ と書くことにする. 任意に $a\in K[t]$ と $s\in S$ を取る. $K[t]$ は Ore 整域なので, ある $u,b\in K[t]$ で $u\neq 0$, $au=sb$ を満たすものが存在する. このとき $a(0)u(0)=s(0)b(0)$, $s(0)\neq 0$ であるから, $u(0)=0$ ならば $b(0)=0$ となる. よって u と b を t で必要なだけ同時に割り切った結果でそれらを置き換えることによって $u(0)\neq 0$ となるようにできる. このとき $u\in S$ である. これで S が右 Ore 集合であることがわかった.

$S=K[t]\setminus M$ による $K[t]$ の局所化を $K[t]_M$ と書くことにする. $K[t]_M$ は自然に $K(t)$ の部分環とみなされる:

$$K[t]_M=\{\,a/s=as^{-1}\mid a,s\in K[t],\ s(0)\neq 0\,\}\subset K(t).$$

補題 1.1 より $K[t]_M$ のイデアル $\mathfrak{m}=MK[t]_M=tK[t]_M$ の補集合 $K[t]_M\setminus\mathfrak{m}$ は $K[t]_M$ の乗法群 $K[t]_M^\times$ に一致し, $\mathfrak{m}$ は $K[t]_M$ の最大固有右イデアルでかつ最大固有左イデアルになり, 自然な環同型 $K[t]_M/\mathfrak{m}\cong K$ が成立している. 特に $K[t]_M$ は局所環である. □

[3] このとき $\operatorname{ad} f$ は $\mathfrak{g}$ 上で**局所べき零 (locally nilpotent)** であると言う.

他の例については非可換 Noether 環の教科書 [Ja], [MR], [GW] を参照せよ.

2.2 整域が Ore 整域であるための十分条件

環 A が**右 Noether 環 (right Noetherian ring)** であるとは以下の同値な条件のどれかが成立することである:

- A の任意の右イデアルは有限生成である.
  すなわち A の右イデアル I は $I = a_1A + \cdots + a_nA$ $(a_i \in I)$ と表わされる.
- A の右イデアルの昇鎖列 $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ に対して
  ある正の整数 n が存在して $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ となる.
- A の右イデアルの空でない集合は包含関係に関する極大元を持つ.

同様に**左 Noether 環 (left Noetherian ring)** も定義される. 環 A が **Noether 環 (Noetherian ring)** であるとは A が右 Noether 環かつ左 Noether 環であることである.

定理 2.8. A は (可換とは限らない) 整域であるとする. A が右 Noether 環であれば A は右 Ore 整域である[4]. 同様に A が左 Noether 環であれば A は左 Ore 整域である. よって A が Noether 環であれば A は Ore 整域である. □

証明. 整域 A が右 Noether ならば右 Ore 整域であることだけを示す. 左 Noether ならば左 Ore であることも同様に示せる.

任意に 0 でない $a, b \in A$ を取り, A の右イデアル H を $H = aA + baA + b^2aA + \cdots$ と定める. A は右 Noether 環なのである正の整数 n が存在して $H = aA + baA + \cdots + b^{n-1}aA$ となる. $b^na \in H$ なのである $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in A$ が存在して $b^na = ac_0 + bac_1 + \cdots + b^{n-1}ac_{n-1}$ となる. $c_i \neq 0$ となる最小の i を k と書く. $b^na = b^kac_k + b^{k+1}ac_{k+1} + \cdots + b^{n-1}ac_{n-1}$ なので, A が整域であることより $b^{n-k}a = ac_k + bac_{k+1} + \cdots + b^{n-k-1}ac_{n-1}$. ゆえに $0 \neq ac_k = b(b^{n-k-1}a - (ac_{k+1} + \cdots + b^{n-k-2}ac_{n-1}))$. したがって $aA \cap bA \neq 0$. これで A が右 Ore 整域であることがわかった. □

例 2.9. 可換体 K 上の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ は Noether 整域なので Ore 整域である. 有限次元 Lie 代数の普遍展開環が Noether 整域であることについては [D] の p. 76 を見よ. □

例 2.10. 有限型の量子展開環は Noether 整域なので Ore 整域である. 量子展開環およびその双対である量子群の環としての性質に関しては Joseph [Jo] が詳しい. 量子展開環が整域であることの証明は [Jo] の第 7.3 節にあり, 有限型の量子展開環が Noether であることの証明は [Jo] の第 7.4 節にある. □

例 2.11. (可換とは限らない) Neother 整域 A 上の n 変数の多項式環 $A[t_1, \dots, t_n]$ と形式べき級数環 $A[[t_1, \dots, t_n]]$ は Noether 整域なので Ore 整域である. それらの剰余整域も Noether 整域になるので Ore 整域になる.

特に (可換とは限らない) 体 K 上の n 変数の多項式環 $K[t_1, \dots, t_n]$ と形式べき級数環 $K[[t_1, \dots, t_n]]$ は Noether 整域なので Ore 整域である. $K[t_1, \dots, t_n]$ の分数体を $K(t_1, \dots, t_n)$ と表わす. □

[4] この結果は [MR] の 2.1.15 (p. 48) および [GW] の Corollary 6.7 にある. $a, ba, b^2a, \dots$ で生成される右イデアルを考えるという証明のアイデアは前者から拝借した.

アフィン Lie 代数の普遍展開環のような非 Noether 整域が Ore 整域であることを示すためには次の定理が役に立つ.

定理 2.12. A は (可換とは限らない) 整域であるとし, K は A の (可換とは限らない) 部分体であるとする. A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ は A の右 K ベクトル部分空間であり, $K \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A$, $A_k A_l \subset A_{k+l}$ を満たしていると仮定する. このときべき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (\dim_K A_k) z^k$ の収束半径が 1 以上ならば A は右 Ore 整域である. (左 Ore 整域であることに関しても同様の十分条件がある.)

証明. 0 でない $a, b \in A$ で $aA \cap bA = 0$ を満たすものが存在すると仮定して, べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (\dim_K A_k) z^k$ の収束半径が 1 未満になることを示せばよい.

$1 \in A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ と $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A$ よりある正の整数 N で $a, b \in A_N$ を満たすものが存在する. $aA_N + bA_N \subset A_{2N}$ であり, 仮定 $aA \cap bA = 0$ より $aA_N + bA_N$ は直和になるので, $\dim_K A_{2N} \geqq 2 \dim_K A_N$ となる. 同様にして $\dim_K A_{3N} \geqq 2 \dim_K A_{2N} \geqq 2^2 \dim_K A_N$. この議論を繰り返して $\dim_K A_{mN} \geqq 2^{m-1} \dim_K A_N$ を示せる. $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} (\dim_K A_N) z^{mN}$ の収束半径は $1/2^{1/N} < 1$ になるので, $\sum_{k=0}^{\infty} (\dim_K A_k) z^k$ の収束半径も 1 より小さくなる. □

定理 2.12 は [RCW] の Lemma 1.2 の自明な一般化になっている.

定理 2.12 の優れた点は体 K を含む任意の部分環と任意の剰余整域の両方に性質が遺伝することである[5].

系 2.13. A が定理 2.12 の条件を満たしているならば, 体 K を含む A の任意の部分環と A の任意の剰余整域も定理 2.12 の条件を満たしており, 右 Ore 整域になる. (左 Ore 整域であることについても同様の十分条件が成立している.)

証明. B は体 K を含む A の部分環であるとする. A は整域なので B も整域になる. $B_k = B \cap A_k$ とおく. B は K を含むので A の右 K ベクトル部分空間である. B_k も定理 2.12 における A_k と同様の条件を満たしている. ゆえに B も右 Ore 整域になる.

P は A の完全素イデアルであるとし, $C = A/P$ とおく. $P \neq A$ より $P \cap K = 0$ となるので C も K を部分体として含む. A_k の C における像を C_k と書く. C_k も定理 2.12 における A_k と同様の条件を満たしている. ゆえに C も右 Ore 整域になる. □

例 2.14. (可換とは限らない) 体 K 上の可算変数多項式環 $K[t_1, t_2, \ldots]$ も Ore 整域である.

証明. $K[t_1, t_2, \ldots]$ に次数を $\deg t_i = i$ で定める. 次数が n 以下の $K[t_1, t_2, \ldots]$ の元全体の集合を A_n と表わす. A_n は自然に右かつ左 K ベクトル空間とみなされ, その次元は左右どちらも分割数 $p(n)$ に等しくなる. よってべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\dim_K A_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ の収束半径は 1 である. (収束先は $\left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)\right)^{-1}$ になる[6].) よって定理 2.12 より $K[t_1, t_2, \ldots]$ は Ore 整域である.

別証明. 環 Q を $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(t_1, \ldots, t_n)$ と定めることができる. Q は体になり, $A = K[t_1, t_2, \ldots]$ を部分環として含んでいる. さらに A でない元は Q の中で可逆であり, $Q = \{\, as^{-1} \mid a, s \in A,\ s \neq 0 \,\} = \{\, s^{-1} a \mid a, s \in A,\ s \neq 0 \,\}$ が成立している. よって $A = K[t_1, t_2, \ldots]$ は Ore 整域である. □

[5] Noether 環の剰余環も Noether 環になるが, Noether 環の部分環は Noether 環になるとは限らない. たとえば可換体 K 上の無限変数多項式環はその商体 (可換体は自明に Noether 環) の部分環であるが Noether 環ではない.

[6] 一般に無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ が絶対収束することと無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することは同値になる. このことから $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$ が $|z| < 1$ で絶対収束することがわかる.

例 2.15 ([K2])**.** A が可換体 K 上の代数の場合の定理 2.12 と系 2.13 を用いて, 有限次元 Lie 代数もしくはアフィン Lie 代数の普遍展開環およびその任意の部分環と任意の剰余整域が Ore 整域になることを示せる. 同様の結果が有限型もしくはアフィン型の量子展開環についても成立する. 特に有限型もしくはアフィン型の量子展開環において「通分可能な分数」の概念を自由に利用できる. □

2.3 AR 性質を用いた Ore 集合の構成

A は環であるとし, I はそのイデアルであるとする.

I が**右 AR 性質 (right AR property)** もしくは**右 Artin-Rees 性質 (right Artin-Rees property)** を満たすとは A の任意の右イデアル H に対してある正の整数 n で $H \cap I^n \subset HI$ を満たすものが存在することである[7]. **左 AR 性質 (left AR property)** も同様に定義される.

環 A 上の一変数多項式環 $A[x]$ の部分環 $A(I) = A + Ix + I^2x^2 + I^3x^3 + \cdots$ をイデアル I の **Rees 環 (Rees ring)** と呼ぶ. Rees 環 $A(I)$ は A と Ix から生成される $A[x]$ の部分環である.

補題 2.16 ([GW] の Lemma 13.2)**.** I は環 A のイデアルであるとする. もしも I の Rees 環 $A(I)$ が右 Noether ならば I は右 AR 性質を満たす. (左 AR 性質についても同様のことが成立する.)

証明. A の右イデアル H に対して $A(I)$ の右イデアル H^* を

$$H^* = HA[x] \cap A(I) = \sum_{k=0}^{\infty}(H \cap I^k)x^k = H + (H \cap I)x + (H \cap I^2)x^2 + \cdots$$

と定めることができる. $R(I)$ の右 Noether 性より, H^* は右イデアルとしての有限生成系を持つ. ある番号 n が存在して $\sum_{k=0}^{n-1}(H \cap I^k)x^k$ にその有限生成系が含まれる. このとき $(H \cap I^n)x^n \subset H^* = \left(\sum_{k=0}^{n-1}(H \cap I^k)x^k\right) A(I)$ であるから, 両辺の x^n の係数を比較して $H \cap I^n = \sum_{k=0}^{n-1}(H \cap I^k)I^{n-k} \subset HI$ を得る[8]. □

補題 2.17 ([GW] の Theorem 13.3)**.** A は右 Noether 環であるとする. I は A の中心元たちで生成される A のイデアルであるとする. このとき I は右 AR 性質を持つ. (左 Noether 環と左 AR 性質についても同様のことが成立する.)

証明. A の右 Noether 性より I は A の有限個の中心元 $c_1, \ldots, c_n$ から生成される. このとき Rees 環 $A(I)$ は A と中心元 $c_1x, \ldots, c_nx$ で生成されるので, 多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ の剰余環に同型になる. Hilbert の基底定理より $A[x_1, \ldots, x_n]$ は右 Noether 環なので, その像 $A(I)$ も右 Noether 環になる. よって補題 2.16 より I は右 AR 性質を満たす. □

定理 2.18. K は (可換とは限らない) 体であるとし, $A = K[t_1, \ldots, t_n]$ とおき, $t_1, \ldots, t_n$ で生成される A の極大イデアルを M と表わす. このとき M の補集合 $S = A \setminus M$ は A における Ore 集合である. (S は定数項が 0 でない多項式全体の集合になる.)

---

[7] $n = 1$ の場合の逆の包含関係 $HI \subset H \cap I$ は常に成立している.

[8] より精密には $H \cap I^n = (H \cap I^{n-1})I$ が成立している. 証明は次の通り. $(H \cap I^{n-1})I \subset H \cap I^n$ が成立していることはすぐにわかる. 同様にして $(H \cap I^k)I^{n-k-1} \subset H \cap I^{n-1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ が成立することもわかるので, $H \cap I^n = \sum_{k=0}^{n-1}(H \cap I^k)I^{n-k}$ から逆向きの包含関係 $H \cap I^n \subset (H \cap I^{n-1})I$ が出る.

証明. 任意に $a \in A$ と $s \in S$ を取る.

正の整数 k に関する帰納法である $a_k \in A$ で $a - sa_k \in M^k$ を満たすものが存在することを示そう. $f \in A$ の定数項を $f(0)$ と書くことにする. $a_1 = s(0)^{-1}a(0)$ とおくと a と $sa_1 = ss(0)^{-1}a(0)$ の定数項は等しいので $a - sa_1 \in M$ となる. $a - sa_k \in M^k$ が成立しているとき, $a - sa_k$ の k 次の部分を h_k と書いて $a_{k+1} = a_k + s(0)^{-1}h_k$ とおくと $a - sa_k$ と $ss(0)^{-1}h_k$ の k 次以下の部分は等しいので $a - sa_{k+1} = a - sa_k - ss(0)^{-1}h_k \in M^{k+1}$ となる.

A は右 Noether 環であり, $t_1, \dots, t_n$ は A の中心元なので, 補題 2.17 より M は右 AR 性質を満たす.

$a - sa_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ 全体で生成される A の右イデアルを H と書くと, A が右 Noether であることと M が右 AR 性質を満たすことより, ある正の整数 n で $H = \sum_{k=1}^{n-1}(a - sa_k)A$ と $H \cap M^n \subset HM$ を満たすものが存在する. このとき $a - sa_n \in H \cap M^n \subset HM = \sum_{k=1}^{n-1}(a - sa_k)M$ となる. よってある $m_1, \dots, m_{n-1} \in M$ で $a - sa_n = \sum_{k=1}^{n-1}(a - sa_k)m_k$ を満たすものが存在する. このとき

$$a\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} m_k\right) = s\left(a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k m_k\right), \quad 1 - \sum_{k=1}^{n-1} m_k \in S.$$

これで S が A における右 Ore 集合であることがわかった. 左 Ore 集合であることも同様に示せる. □

同様の論法で次のより一般的な定理を示すことができる.

定理 2.19. A は右 Noether 整域であるとする[9]. P は A の中心元たちで生成される A のイデアルであり, A/P は右 Ore 整域になると仮定する. このとき P の補集合 $S = A \setminus P$ は A における右 Ore 集合になる. (左 Noether 環と左 Ore 集合についても同様のことが成立する.)

証明. A の右 Noether 性より, P は有限個の中心元 $x_1, \dots, x_n$ から生成される. 多重インデックス $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}^n$ にに対して $|\nu| = \sum_{i=1}^n \nu_i$, $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$ とおく. この記号法のもとで $P^k = \sum_{|\nu|=k} x^k A$ が成立している.

任意に $a \in A$ と $s \in S$ を取る.

A/P は右 Ore 整域なので, ある $s_1 \in S$ と $a_1 \in A$ が存在して $as_1 - sa_1 \in P$ となる.

$k \geqq 0$ のとき, ある $s_k \in S$ と $a_k \in A$ で $as_k - sa_k \in P^k$ を満たすものが存在すると仮定する. $|\nu| = k$ を満たす $\nu \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}^n$ に対する x^ν の全体を $y_1, \dots, y_N$ と表わそう. $as_k - sa_k \in P^k$ は $as_k - sa_k = y_1 b_1 + z_1$ $(b_1 \in A,\ z_1 \in \sum_{i=2}^N y_i A)$ と表わされる. A/P は右 Ore 整域なので, ある $t_1 \in S$ と $b_1' \in A$ が存在して $b_1 t_1 - sb_1' \in P$ となる. このとき $\bmod P^{k+1}$ で

$$\begin{aligned} a(s_k t_1) - s(a_k t_1 + y_1 b_1') &= (as_k - sa_k)t_1 - y_1 s b_1' \\ &= (y_1 b_1 + z_1)t_1 - y_1 s b_1' = z_1 t_1 + y_1(b_1 t_1 - sb_1') \equiv z_1 t_1. \end{aligned}$$

さらに $as_k - sa_k$ と y_1 に対する上の議論と同様の議論を $z_1 t_1$ と y_2 に適用する. $z_1 t_1$ は $z_1 t_1 = y_2 b_2 + z_2$ $(b_2 \in A,\ z_2 \in \sum_{i=3}^N y_i A)$ と表わされる. A/P は右 Ore 整域なので, ある $t_2 \in S$ と $b_2' \in A$ が存在して $b_2 t_2 - sb_2' \in P$ となる. このとき $\bmod P^{k+1}$ で

$$a(s_k t_1 t_2) - s((a_k t_1 + y_1 b_1')t_2 + y_2 b_2') = (a(s_k t_1) - s(a_k t_1 + y_1 b_1'))t_2 - y_2 s b_2'$$

[9] このノートでは整域の場合に限って右 Ore 集合を定義したので整域の場合に制限してあるが, 実際には整域に制限する必要はない.

$$\equiv z_1t_1t_2 - y_2sb_2' = (y_2b_2 + z_2)t_2 - y_2sb_2' = z_2t_2 + y_2(b_2t_2 - sb_2') \equiv z_2t_2.$$

以上の議論を合計で N 回繰り返すことによって, ある $s_{k+1} \in S$ と $a_{k+1} \in A$ で $as_{k+1} - sa_{k+1} \in P^{k+1}$ を満たすものが得られる.

k に関する帰納法によってすべての $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対してある $s_k \in S$ と $a_k \in A$ で $as_k - sa_k \in P^k$ を満たすものが存在することがわかる.

A は右 Noether 環であり, $x_1, \ldots, x_n$ は A の中心元なので, 補題 2.17 より P は右 AR 性質を満たす.

$as_k - sa_k \in P^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ で生成される A の右イデアルを H と表わす. A が右 Noether 環であり, P が右 AR 性質を満たすことより, ある正の整数 n で $H = \sum_{k=1}^{n-1}(as_k - sa_k)A$ と $H \cap P^n \subset HP$ を満たすものが存在する. このとき $as_n - sa_n \in H \cap P^n \subset HP = \sum_{k=1}^{n-1}(as_k - sa_k)P$ となる. よってある $p_1, \ldots, p_{n-1} \in P$ で $as_n - sa_n = \sum_{k=1}^{n-1}(as_k - sa_k)p_k$ を満たすものが存在する. このとき

$$a\left(s_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_kp_k\right) = s\left(a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_kp_k\right), \quad s_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_kp_k \in s_n + P \subset S.$$

これで S が A における右 Ore 集合であることが示された. □

以上で解説した AR 性質を用いた Ore 集合の構成法のさらなる一般化については [S], [Ja] の第 3.3 節, [MR] の第 13 章, [GW] の第 4 章などを参照せよ.

定理 2.20. B は Ore 整域であるとし, B 上の m 変数多項式環を $A = B[x_1, \ldots, x_m]$ と表わし, $x_1, \ldots, x_m$ で生成される A の完全素イデアルを P と書くことにする. このとき P の補集合 $S = A \setminus P$ は A における Ore 集合になる. (S は多項式としての定数項が 0 でない A の元全体の集合になる.)

証明. B の分数体を L と書き, $A' = L[x_1, \ldots, x_m]$ とおき, $x_1, \ldots, x_m$ で生成される A' の極大イデアルを M と書くことにする. このとき定理 2.18 より $S' = A' \setminus M$ は A' における Ore 集合になる. (S' は多項式としての定数項が 0 でない A' の元全体の集合になる.) A' の S' による局所化を A'_M と書くことにする.

A は自然に A' の部分環であり, A' は A'_M の部分環であるから, A は A'_M の部分環である. さらに $S \subset S'$ なので S の元は A'_M の中で可逆である.

A'_M の元はある $a' \in A'$ と $s' \in S$ によって $a's'^{-1}$ と表わされる. A' に含まれる多項式の係数は B の分数体 L に含まれる. 係数の右分母たちを通分することによって $a' \in A'$ を $a' = a\sigma^{-1}$ $(a \in A, \sigma \in B, \sigma \neq 0)$ と表わすことができる. 同様に $s' \in S'$ を $s' = s\tau^{-1}$ $(s \in A, \tau \in B, \tau \neq 0)$ と表わすことができる. s' の定数項は 0 ではないので $s = s'\tau$ の定数項も 0 ではない. すなわち $s \in S$ である. B は Ore 整域なので, ある $\sigma', \tau' \in B$ で $\sigma' \neq 0$, $\sigma^{-1}\tau = \tau'\sigma'^{-1}$ を満たすものが存在する. このとき $a's'^{-1} = a\sigma^{-1}\tau s^{-1} = a\tau'(s\sigma')^{-1}$. さらに $a\tau' \in A$, $s\sigma' \in S$ である. よって A'_M の任意の元を bt^{-1} $(b \in A, t \in S)$ と表わすことができる. これより S が A における右 Ore 集合であることがわかる. 同様にして S が A における左 Ore 集合であることも示せる. □

例 2.21. K は(可換とは限らない)体であるとし, $A = K[t_1, \ldots, t_n]$ とおき, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して $t_{k+1}, \ldots, t_n$ で生成される A のイデアルを P_k と表わす. このとき $A/P_k \cong K[t_1, \ldots, t_k]$ は Ore 整域である. よって定理 2.19 より $S_k = A \setminus P_k$ は A における Ore 集合になる. (S_k は $t_{k+1}, \ldots, t_n$ の多項式としての定数項 $(\in K[t_1, \ldots, t_k])$ が 0 でないような A の元全体の集合になる.)

$B = K[t_1, \dots, t_k]$ と $(x_1, \dots, x_m) = (t_{k+1}, \dots, t_n)$, $m = n - k$ に定理 2.20 を適用することによって, S_k が A における Ore 集合であることを示すこともできる.

S_k による A の局所化を A_{P_k} と書くことにする. このとき A_{P_k} は自然に $K(t_1, \dots, t_n)$ の部分環とみなされる. さらに補題 1.1 より, A_{P_k} の P_k で生成されるイデアル $\mathfrak{m}_k = \sum_{i=k+1}^n t_i A_{P_k}$ の補集合 $A_{P_k} \setminus \mathfrak{m}_k$ は A_{P_k} の乗法群 $A_{P_k}^\times$ に一致し, $\mathfrak{m}_k$ は A_{P_k} の最大固有右イデアルでかつ最大固有左イデアルになり, 自然な環準同型 $A_{P_k}/\mathfrak{m}_k \cong K(t_1, \dots, t_k)$ が得られる. 特に A_{P_k} は局所環である. □

3 付録

非可換環に関する初等的な結果の一部をまとめておく.

3.1 非可換環に関する Hilbert の基底定理

定理 3.1 (Hilbert の基底定理)**.** 右 Noether 環 A 上の n 変数多項式環 $A[x_1, \dots, x_n]$ も右 Noether 環である. (左 Noether 環についても同様のことが成立する.)

証明. $A[x_1, \dots, x_n] = A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ であるから, n に関する帰納法によって $n = 1$ の場合だけを示せば十分である.

I は一変数多項式環 $A[x]$ の右イデアルであるとする.

各整数 $k \geqq 0$ に対して I に含まれる k 次以下の多項式の第 k 次の係数全体の集合を J_k と表わす. J_k は A の右イデアルをなし, $Ix \subset I$ より $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots$ となる. A の右 Noether 性より, ある番号 N が存在して $J_N = J_{N+1} = J_{N+2} = \cdots$ となる.

各右イデアル J_k は有限生成である. 各 k ごとに I に含まれる k 次式 $f_1^{(k)}, \dots, f_{M_k}^{(k)} \in A[x]$ でそれらの最高次の係数たちが J_k を生成するものが存在する.

$f_i^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, N,\ i = 1, 2, \dots, M_k)$ で生成される $A[x]$ の右イデアルを I' と書くことにする. $I' = I$ となることを示せば証明が終わる. $I' \subset I$ なので $I \subset I'$ を示せばよい. $g \in I$ として g の次数 d に関する帰納法で $g \in I'$ を示そう.

$d = 0$ のとき $g \in f_1^{(0)} A + \cdots + f_{M_0}^{(0)} \subset I$ である.

$0 < d \leqq N$ のとき, g の最高次の係数は J_n の有限生成系の右 A 一次結合で表わされる. よってある $a_1, \dots, a_{M_d} \in A$ が存在して $h := g - (f_1^{(d)} a_1 + \cdots + f_{M_d}^{(d)} a_{M_d}) \in I'$ の次数が d より小さくなる. 帰納法の仮定より $h \in I$ となるので $g \in I$ を得る.

$d > N$ のとき, $J_d = J_N$ となるので g の最高次の係数は J_N の有限生成系の右 A 一次結合で表わされる. よってある $a_1, \dots, a_{M_N} \in A$ が存在して $h := g - (f_1^{(N)} a_1 + \cdots + f_{M_N}^{(N)} a_{M_n}) x^{d-N} \in I'$ の次数 が d より小さくなる. 帰納法の仮定より $h \in I$ となるので $g \in I$ を得る. □

系 3.2. 右 Noether 環上の n 変数多項式環 $A[x_1, \dots, x_n]$ の剰余環も右 Noether 環になる.

証明. 定理 3.1 より $A[x_1, \dots, x_n]$ は右 Noether 環になる. 一般に右 Noether 環の剰余環もまた右 Noether 環なので $A[x_1, \dots, x_n]$ もの剰余環も右 Noether 環になる. □

定理 3.3. 右 Noether 環 A 上の n 変数形式べき級数環 $A[[x_1, \dots, x_n]]$ も右 Noether 環である. (左 Noether 環についても同様のことが成立する.)

証明. $A[[x_1,\dots,x_n]] = A[[x_1,\dots,x_{n-1}]][[x_n]]$ であるから, n に関する帰納法によって $n=1$ の場合だけを示せば十分である.

I は一変数形式べき級数環 $A[[x]]$ の右イデアルであるとする. 形式べき級数 $f(t)$ が k 次の項から始まるとき $f(t)$ の位数は k であると言うことにする. (0 の位数は ∞ であると約束しておく.)

各整数 $k \geqq 0$ に対して I に含まれる位数が k 以上のべき級数の第 k 次の係数全体の集合を J_k と表わす. J_k は A の右イデアルをなし, $Ix \subset I$ より $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots$ となる. A の右 Noether 性より, ある番号 N が存在して $J_N = J_{N+1} = J_{N+2} = \cdots$ となる.

各右イデアル J_k は有限生成なので, 各 k ごとに I に含まれる位数 k のべき級数 $f_1^{(k)},\dots,f_{M_k}^{(k)} \in A[[x]]$ でそれらの最高次の係数たちが J_k を生成するものが存在する.

$f_i^{(k)}$ $(k=0,1,\dots,N,\ i=1,2,\dots,M_k)$ で生成される $A[[x]]$ の右イデアルを I' と書くことにする. $I'=I$ となることを示せば証明が終わる. $I' \subset I$ なので $I \subset I'$ を示せばよい. $g \in I$ に対して $g \in I'$ となることを示そう.

g の 0 次の係数は J_0 の生成元の右 R 一次結合で表わされるので, $f_i^{(0)}$ たちの適当な右 R 一次結合 $g_0 \in I'$ が存在して $g-g_0 \in I$ の位数は 0 より大きくなる同様にして $f_i^{(1)}$ たちの適当な右 R 一次結合 $g_1 \in I'$ が存在して $g-(g_0+g_1) \in I$ の位数は 1 より大きくなる. 同じ操作を繰り返して, ある $g_2,\dots,g_{N-1} \in I'$ が存在して $g-(g_0+g_1+\cdots+g_{N-1}) \in I$ の位数は N 以上になる.

g の位数 d が N 以上のとき, g の d 次の係数は J_N の生成元の右 R 一次結合で表わされるので, $f_i^{(N)}x^{d-N}$ たちの適当な右 R 一次結合 $g_d \in I'$ が存在して $g-g_d \in I$ の位数は d より大きくなる.

この結果を用いると, ある $a_i^{(d)} \in A$ $(d \geqq N,\ i=1,2,\dots,M_N)$ が存在して $g_d = \sum_{i=1}^{M_N} f_i^{(N)}x^{d-N}a_i^{(d)}$ とおくと $g-(g_0+g_1+\cdots+g_d)$ の位数は d より大きくなる. このとき $\sum_{d=0}^{\infty} g_d$ は $A[[x]]$ の中で収束し, g に等しくなる. $h_i = \sum_{d=N}^{\infty} x^{d-N}a_i^{(d)} \in A[[x]]$ とおくと,

$$\sum_{d=N}^{\infty} g_d = \sum_{d=N}^{\infty}\sum_{i=1}^{M_N} f_i^{(N)}x^{d-N}a_i^{(d)} = \sum_{i=1}^{M_N} f_i^{(N)}h_i.$$

したがって $g = g_0+g_1+\cdots+g_{N-1}+\sum_{i=1}^{M_N} f_i^{(N)}h_i \in I'$. □

3.2 Jacobson 根基

R は (可換とは限らない) 0 ではない環であると仮定する.

M が単純左 R 加群のとき $\operatorname{Ann} M = \{\, x \in R \mid xM = 0 \,\}$ は R のイデアルをなし, R の**左原始イデアル (left primitive ideal)** と呼ばれる. 同様に**右原始イデアル (right primitive ideal)** も定義される.

環 R のすべての極大左イデアルの共通部分を $J(R)$ と表わし, R の **Jacobson 根基 (Jacobson radical)** と呼ぶ. $J(R)$ は以下のような複数の表示を持つ:

$$\begin{aligned}
J(R) &= \bigcap_{I \text{ は } R \text{ の極大左イデアル}} I = \{\, x \in R \mid Rx \neq R \,\} \\
&= \bigcap_{I \text{ は } R \text{ の極大右イデアル}} I = \{\, x \in R \mid xR \neq R \,\} \\
&= \bigcap_{I \text{ は } R \text{ の左原始イデアル}} I = \{\, x \in R \mid \text{任意の単純左 } R \text{ 加群 } M \text{ に対して } xM = 0 \,\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcap_{I\ \text{は}\ R\ \text{の右原始イデアル}} I = \{\, x \in R \mid \text{任意の単純右}\ R\ \text{加群}\ M\ \text{に対して}\ Mx = 0 \,\} \\
&= \{\, x \in R \mid \text{任意の}\ a \in R\ \text{に対して}\ 1 - ax\ \text{は左逆元を持つ} \,\} \\
&= \{\, x \in R \mid \text{任意の}\ a \in R\ \text{に対して}\ 1 - xa\ \text{は右逆元を持つ} \,\} \\
&= \{\, x \in R \mid \text{任意の}\ a, b \in R\ \text{に対して}\ 1 - axb\ \text{は可逆である} \,\}.
\end{aligned}
$$

これらの等号は以下のようにして証明される.

まず 0 でない環 R において R と一致しない任意の左イデアルに対してそれを含む極大イデアルが存在する. そのことから $\bigcap_{I\ \text{は}\ R\ \text{の極大左イデアル}} I = \{\, x \in R \mid Rx \neq R \,\}$ が出る. 左原始イデアルの定義から $\bigcap_{I\ \text{は}\ R\ \text{の左原始イデアル}} I = \{\, x \in R \mid \text{任意の単純左}\ R\ \text{加群}\ M\ \text{に対して}\ xM = 0 \,\}$ は自明である. 任意の $a, b \in R$ に対して $1 - axb$ は可逆という条件は左右対称である. よって $x \in R$ に対して以下の条件が互いに同値であることを示せば示したい等号がすべて証明される:

(a) 任意の極大左イデアル I に対して $x \in I$.

(b) 任意の $a \in R$ に対して $1 - ax$ は左逆元を持つ.

(c) 任意の単純左 R 加群 M に対して $xM = 0$.

(d) 任意の $a, b \in R$ に対して $1 - axb$ は可逆である.

(a) $\implies$ (b). (b) を否定して (a) の否定を導く. ある $a \in R$ が存在して $1 - ax$ が左逆元を持たないと仮定する. そのとき $R(1 - ax) \neq R$ となるので, $R(1 - ax)$ を含む極大左イデアル I が存在する. このとき $1 - ax \in I$. もしも (a) が成立するならば $x \in I$ なので $1 = (1 - ax) + ax \in I$ となり矛盾する.

(b) $\implies$ (c). (c) を否定して (b) の否定を導く. ある単純左 R 加群 M で $xM \neq 0$ を満たすものが存在すると仮定する. ある $m \in M$ が存在して $xm \neq 0$ を満たす. M は単純左 R 加群なので $Rxm = M$ となる. 特にある $a \in R$ が存在して $axm = m$ すなわち $(1 - ax)m = 0$ となる. もしも (b) が成立するならば $m = 0$ となってしまい矛盾する.

(c) $\implies$ (a). (c) から (a) を導く. 任意の極大左イデアル I に対して $M = R/I$ は単純左 R 加群になる. (c) から $xM = x(R/I) = 0$ すなわち $x \in I$ が出る. これで (a) が導かれた.

以上によって特に $J(R)$ はすべての左原始イデアルの共通部分であることが示された. すべての左原始イデアルはイデアルなので $J(R)$ もイデアルである.

(d) $\implies$ (b). (d) を仮定するとき, $b = 1$ とおけば (b) が導かれる.

(b) $\implies$ (d). (b) を仮定して, $a, b \in R$ を任意に取る. $J(R) = \{\text{(b) を満たす}\ x \in R\ \text{の全体}\}$ はイデアルをなすので xb も (b) を満たしている. よって $1 - axb$ は左逆元 $u \in R$ を持つ. このとき $u(1 - axb) = 1$ を $u = 1 - (-uaxb)$ と変形すると, u も (b) を満たしており, u の左逆元 $v \in R$ が存在することがわかる. u は右逆元 $1 - axb$ と左逆元 v を持つので可逆である. したがって $1 - axb$ も可逆である. これで (d) が導かれた.

以上の結果についてはたとえば [Y] の第 7.4 節や [L] の第 4 節を参照せよ.

3.3 非可換局所環

R は (可換とは限らない) 0 ではない環であると仮定する.

環 R に関して以下の条件は互いに同値である:

(a) R の二つの非可逆元の和も非可逆になる.

(b) 任意の $x \in R$ に対して x または $1-x$ は可逆になる.

(c) R の元の有限和が可逆になるならばその和に含まれる元のどれかは可逆になる.

(d) $R/J(R)$ は体になる.

(e) R の極大左イデアルは唯一である.

(e') R の極大右イデアルを唯一である.

(f) R の非可逆元全体の集合は R のイデアルになる.

(g) $J(R) = \{\, x \in R \mid x$ は R の非可逆元$\}$.

これらの条件のどれかが成立するとき R は**局所環 (local ring)** もしくは **完全準素環 (completely primary ring)** であると言う. 上の条件の同値性は以下のように証明される.

条件 (a),(b),(c) は左右対称の形をしている. よってダッシュが付いていない条件たちが互いに同値であることを示せば十分である.

条件 (a) は「R の二つの元の和が可逆ならば二つの元のどちらかは可逆になる」という条件と同値である.

(a) $\Longrightarrow$ (b). $x + (1-x) = 1$ は可逆なので (a) から x または $1-x$ の可逆性が導かれる.

(b) $\Longrightarrow$ (a). $a, b \in R$ で $a + b = u$ が可逆だとすると (b) より $u^{-1}a$ または $u^{-1}b = 1 - u^{-1}a$ の可逆性が導かれる. このとき a または b は可逆である.

(c) $\Longrightarrow$ (a). 自明.

(a) $\Longrightarrow$ (c). (a) を仮定し, $a_1, \dots, a_n \in R$ で $a_1 + \cdots + a_n$ は可逆であるとする. $(a_1 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$ は可逆であることから $a_1 + \cdots + a_{n-1}$ または a_n は可逆である. $a_1 + \cdots + a_{n-1}$ が可逆ならば帰納的に $a_1, \dots, a_{n-1}$ のどれかが可逆であることがwかある. これで (c) が導かれた.

以上によって (a),(b),(c) の同値性が証明された.

$a \in R$ に対応する $R/J(R)$ の元を $\bar{a}$ と表わすことにする.

(a) $\Longrightarrow$ (d). $\bar{a} \neq 0$ $(a \in R)$ と仮定する. このとき $a \notin J(R)$ であり, $J(R)$ はすべての極大左イデアルの共通部分なので, ある極大左イデアル I で $a \notin I$ を満たすものが存在する. I の極大性より $I + Ra = R$ となる. よってある $m \in I, b \in R$ が存在して $m + ba = 1$ となる. m は極大イデアルの元なので可逆ではないから, (a) より $ba = u$ は R で可逆になる. このとき $u^{-1}ba = 1$. よって $\bar{a}$ は左逆元 $\overline{a'} = \overline{u^{-1}b}$ を持つ. 同様にして $\overline{a'}$ は左逆元 $\overline{a''}$ を持つ. $\overline{a'}$ は右逆元 $\bar{a}$ と左逆元 $\overline{a''}$ を持つので可逆である. したがって $\bar{a}$ も可逆である. これで $R/J(R)$ が体であることが示された.

(d) $\Longrightarrow$ (e). R の極大左イデアル I は $J(R)$ を含む. しかし (d) より $R/J(R)$ は非自明な極大左イデアルを持たない. したがって $I = J(R)$ でなければいけない. これで (e) が導かれた.

(e) $\Longrightarrow$ (d). $J(R)$ は R のすべての極大左イデアルの共通部分なので, R の極大左イデアルが唯一つならば $J(R)$ はその唯一の極大左イデアルに一致する. そのとき $R/J(R)$ は自明な極大左イデアルを持たないので体になる. これで (d) が導かれた.

以上によって (a)〜(e) の同値性が証明された.

(f) $\Longrightarrow$ (a). 自明.

(g) $\Longrightarrow$ (f). $J(R)$ が R のイデアルであることから出る.

(d) $\Longrightarrow$ (g). $J(R)$ は R のすべての極大左イデアルの共通部分だったので, $J(R)$ のすべての元は非可逆である. (d) を仮定する. $a \notin J(R)$ のとき, $R/J(R)$ が体であることより, ある $b \in R$ で $ba \in 1 + J(R)$ を満たすものが存在する. このとき $1 - ba \in J(R)$ なので $1 - (1 - ba) = ba$ は左逆元 u を持つ. ($J(R)$ は $1 - ax$ $(a \in R)$ が可逆になるような $x \in R$ 全体の集合であった.) よって a は左逆元 $a' = u^{-1}b$ を持つ. 同様にして a' も左逆元 a'' を持つ. a' は右逆元 a と左逆元 a'' を持つので可逆である. よって a も可逆である. これで $J(R)$ が R の非可逆元全体の集合に一致することが示された.

以上によって (a)〜(g) の同値性がすべて証明された.

以上の結果についてはたとえば [Y] の第 7.5 節や [L] の第 19 節を参照せよ.

参考文献

[D] Dixmier, Jacques. Enveloping Algebras, The 1996 Printing of the 1977 English Translation. Graduate Studies in Mathematics, Volume 11, American Mathematical Society, 1996, 379 pp.

[Ja] Jategaonkar, A. V. Localization in Noetherian rings. London Mathematical Society lecture note seies, 98, Cambridge University Press, 1986, xii+323 pp.

[Jo] Joseph, Anthony. Qauntum groups and their primitive ideals. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Forge, Band 29, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 1995, ix+383 pp.

[K1] 黒木玄, 非可換環の局所化の演習問題, 2006 年 5 月 19 日作成, 2007 年 2 月 16 日更新. `http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20070216_localization.pdf`

[K2] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Preprint 2008. `http://arXiv.org/abs/0808.2604v3`

[GW] Goodearl, K. R. and Warfield, R. B., Jr., An introduction to noncommutative Noetherian rings, Second edition. London Mathematical Society Student Texts, 61, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, xxiv+344 pp.

[L] Lam, T. Y. A First Course in Noncommutative Rings. Graduate texts in mathematics, 131, Springer-Verlag, 1991, x+397 pp.

[MR] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative Noetherian rings, With the cooperation of L. W. Small, Revised edition, Graduate Studies in Mathematics, 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xx+636 pp.

[RCW] Rocha-Caridi, Alvany and Wallach, Nolan R. Characters of irreducible representations of the Virasoro algebra. Math. Z., 185, 1984, 1–21.

[S] Smith, P. F. Localization and the AR property. Proc. London Math. Soc. (3) 22 (1971), 39–68.

[Y] 山崎圭次郎, 環と加群 III, 岩波講座基礎数学, 代数学 ii, 岩波書店, 1978, 399–614 pp.