# 線型代数学要旨

東北大学 1998 年度

長谷川浩司[1] (東北大学理学研究科数学専攻)

[1] 仙台市荒巻字青葉 kojihas@math.tohoku.ac.jp 217-6392

# 0　記号

- 自然数の全体を $\mathbf{N}$, 実数の全体を $\mathbf{R}$, 複素数の全体を $\mathbf{C}$ で表わす。
- ものの集まりを集合といい、$X, Y, \cdots$ などで表わす。$\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ は集合である。もの $x$ が集合 $X$ に含まれるとき、$x$ は $X$ の元または要素であるといい、$x \in X$ または $X \ni x$ と書く。含まれないときは、$x \notin X$ または $X \not\ni x$ と書く。集合をあらわすには、

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad (\text{自然数全ての集合の場合})$$

のように元を書きならべたり、あるいはその集合を定める条件を書いて

$$A = \{x | x \text{ は実数}, x^2 = 1\}$$

のようにする。この $A$ はもちろん実際は $A = \{1, -1\}$ である。
- 通常の $1$ 変数関数は、実数 $x$ にひとつの実数 $f(x)$ を対応させるものであった。
一般に $X, Y$ をふたつの集合とするとき、$X$ の各元 $x$ に対し $Y$ の元をひとつ (複数であってはいけない) 対応させる規則があるとき、これを $X$ から $Y$ への写像という。$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像が $1$ 変数関数に他ならない。
$x$ に対してきまる $Y$ の元を $x$ の像とよび、関数と同様 $f(x)$ などと書く。また、この写像を

$$f : X \to Y \qquad \text{とか} \qquad f : X \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

のように表す。$f(x) = y$ を、$f : x \mapsto y$ (矢印の根本に注意) とも表す。
- 2 つの関数の合成関数 $g(f(x))$ と同じように、2 つの写像

$$f : X \to Y, \ \ g : Y \to Z$$

の合成写像 $h : X \to Z$ が

$$h(x) := g(f(x))$$

で定まる。「$:=$」は、「左辺を右辺で定める」と読む。この $h$ を $g \circ f$ と書く。

# 1　平面ベクトルと 2 × 2 行列

## 1.1　平面ベクトル

以下数の範囲は実数 $\mathbf{R}$ または複素数 $\mathbf{C}$ とする。2 成分タテベクトルとは、ふたつの数を縦にならべてカッコでまとめたもののことである。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

これを単にひとつの文字で、たとえば $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ などと表わす。(矢印をつけるのがメンドウなのでここでは単に $v$ などと書くことにする。ベクトルであることを太字で強調する流儀もある。) 数 $x, y$ をこのベクトル $v$ の第 $1$、第 $2$ 成分とよぶ。2 つのベクトルが等しいとは、成分がふたつとも等しいときにいう。成分が実数ならば実ベクトル、複素数ならば複素ベクトルなどという。

平面上の点 $P$ の位置は、座標軸をとった上でふたつの実数 (座標) $x, y$ で指定できる。上で $x, y$ が実数の場合、すなわち実 $2$ 成分タテベクトルは、この座標をならべて書いたものと思うことができる。

座標の原点 $O$ から $P$ にむかう矢印を考え、幾何ベクトルとか平面ベクトルと呼ぶ。矢印の長さを実数 $a$ 倍することに対応して、ベクトルの $a$ 倍を

$$a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}$$

で定義する。$a$ が $0$ ならこれは $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ で原点をあらわし、$a$ が負のとき、これはもとのベクトルの反対を向いている。

また、ふたつの矢印はつなぐことができる。これに対応するのがベクトルの和である。ふたつのベクトルの和は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}$$

で定義される。これはつないだ矢印の終点の座標を表わしている。

ベクトルの $a$ 倍　　ベクトルの和

以下では平面ベクトルと実 2 成分ベクトルを特に区別しないことにする。実数の全体すなわち実数直線を $\mathbf{R}$ で表わすように、平面ベクトルの全体 (= 実 2 成分ベクトルの全体) からなる集合を、記号 $\mathbf{R}^2$ で表わす。

$$\mathbf{R}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

平面ベクトルでは成分は実数であるが、成分が複素数のときもベクトルの和と複素数倍を同じ式で定める。次の性質は明らかであろう。

$$(a+b)v = av + bv \tag{1}$$
$$a(v+w) = av + aw \tag{2}$$
$$a(bv) = (ab)v \tag{3}$$

ここで $a, b$ は任意の数、$v, w$ は任意のベクトルとする。

## 1.2 行列の演算

ここでは 2× 2 行列に限っての復習をしよう。

2× 2 行列とは、4 つの数を正方形に配置してカッコでまとめたもののことである。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ベクトルのときと同じように、これをひとつの文字で (大文字にすることが多い)、たとえば $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ などと表わす。$a, b, c, d$ はそれぞれ行列 $A$ の (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) 成分とよばれる。2 つの行列が等しいとは、成分がすべて等しいことをいう。成分が実なら実行列、複素数なら複素行列とよんだりすること、ベクトルのときと同じである。

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と、ベクトル $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は「かけあわせる」ことができ、

$$Av = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \tag{4}$$

で定義された。これは慣れが必要な式だが、もともとベクトルや行列が、連立一次方程式

$$\begin{cases} ax + by = X \\ cx + dy = Y \end{cases} \quad \text{をまとめて} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{5}$$

とあらわすためだと言われれば、マア納得がいくだろう。あとで見るように

$$Av = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \tag{6}$$

と見るのが、しばしば非常に有効である:「前を $x$ 倍、後を $y$ 倍して足す」。

問 **1**　2 つの行列 $A$ と $B$ が等しい $\Longleftrightarrow$ すべてのベクトル $v$ に対して、$Av = Bv$.

さて行列 $A$ を数 $k$ 倍することは、$kA := \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ で定めた。行列同士の和も同様に簡単だが、積はやはり慣れが必要なのであった。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

のとき

$$A+A' := \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}, \quad AA' := \begin{bmatrix} aa'+bc' & ac'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix} \tag{7}$$

であった。積をこうすると、なぜかいろいろうまくいっており、たとえば $(1)$ ~ $(3)$ に対応して、次が成り立つことが計算で確認できる。($A, B$ は 2× 2 行列、$v, w$ はベクトル。)

$$(A+B)v = Av+Bv \tag{8}$$

$$A(v+w) = Av+Aw \tag{9}$$

$$A(Bv) = (AB)v \tag{10}$$

行列の積が和より難しいもうひとつの点として、$A+A'=A'+A$ だが、$AA'=A'A$ とは限らない— むしろ、違う方が普通である、ということがあった。

たとえば $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A'=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき $AA'=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A'A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり、これらは異る成分をもつ。すなわち、$AA' \neq A'A$.

ところで、こんな「難しいかけ算」$(4), (7)$ をどうして考えついたのだろうか？次節はこれに答えるものである。

## 1.3 平面の一次変換と行列

平面から平面への写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ で、次を満すものを考えよう。

$$f(av) = af(v), \tag{11}$$

$$f(v+w) = f(v)+f(w) \tag{12}$$

ここで $a$ は任意の実数、$v, w$ は任意の平面ベクトルである。これはベクトルの $a$ 倍を $a$ 倍にうつし、和を和にうつすということを意味する。

例えば、$x$ 軸についての (線) 対称変換 (対称移動、折り返し) は、これら 2 つの性質を満たしている。実際この対称変換を $f$ とすれば

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

であるから、これより $(11)$,$(12)$ とも一目で確認できる。

$$f(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -ax \\ ay \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = af(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}),$$

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x-x' \\ y+y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -x' \\ y' \end{bmatrix} = f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})+f(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}).$$

一般にも、原点を通る直線に関する対称変換 (折り返し) は $(11)$, $(12)$ をみたす。

性質 $(11)$,$(12)$ をあわせて線型性と呼び、これらを満す写像のことを (平面の) 一次変換と呼ぶ。これは線型写像とよばれるもののうち、平面から平面という特殊な場合のものである。

性質 $(12)$ より $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$、よって $f(0)=0$ である。つまり一次変換においては原点は常に固定されることに注意しよう。[2]

[2] さっき折り返しを考える際、原点を通る直線についてのものに限ったのはこのためであった。

平面の一次変換のもうひとつの例として、原点を中心とした回転を考える。平面の点を、原点を中心としていっせいにある角度 $\theta$ だけ回転移動するのである。この変換 (写像) を $f_\theta$ と書こう：

$$f_\theta : \mathbf{R}^2 \ni v \mapsto f_\theta(v) \in \mathbf{R}^2$$

($f_\theta(v)$ は、 $v$ を原点を中心に角 $\theta$ だけ回転した点を表すベクトル)

平面の角 $\theta$ だけの回転

回転が $(11)$ を満たすことはあきらかであろう。$(12)$ を満たすことは、ベクトルの $v, w$ の和を考えるときの平行四辺形が、回転によって合同な平行四辺形に写ることでわかる。

実際、$0, v, w, v+w$ の行き先が $0, f_\theta(v), f_\theta(w), f_\theta(v+w)$ (原点は動かないことに注意) であるが、$f_\theta(v+w)$ は移ってできた「新しい」平行四辺形の頂点として、「新しい」2 辺 $f_\theta(v), f_\theta(w)$ の和でなくてはならない。すなわち $f_\theta(v+w) = f_\theta(v) + f_\theta(w)$.

こうして、原点を通る直線についての折り返しと、原点を中心とした回転という二つの一次変換の例を知った。同様にして、原点を中心にした点対称変換、あるいはやはり原点を中心とした拡大・縮小なども一次変換であることが確かめられる。では

問. 平面の一次変換は、どれくらいあるだろうか？

勝手な平面のベクトルは、いわゆる基本ベクトル

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

により

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = xe_1 + ye_2 \tag{13}$$

と表わされることに注意しよう。

今 $f$ が $(11)$,$(12)$ をみたすとする、つまり一次変換であったとする。すると $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に対して

$$f(v) \overset{(13)}{=} f(xe_1 + ye_2) \overset{(12)}{=} f(xe_1) + f(ye_2) \overset{(11)}{=} xf(e_1) + yf(e_2). \tag{14}$$

従って、基本ベクトルの像 $f(e_1), f(e_2)$ (これらもベクトル) がわかれば $f$ はわかってしまう！

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, f(e_2) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

とすれば、

$$f(v) = xf(e_1) + yf(e_2) = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \tag{15}$$

これはどこかで見た式であり、実際行列とベクトルの積そのものである！

行列 $A$ を、$f(e_1), f(e_2)$ を並べてできる $4$ つの成分からなるものとしよう。

$$A = \left[ \left[ \begin{array}{c} a \\ c \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} b \\ d \end{array} \right] \right] = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$$

すると、上の計算 $(15)$ は

$$f(\left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]) = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = A \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \quad (A = [f(e_1), f(e_2)])$$

あるいは、さらに

$$f(v) = Av \tag{16}$$

とまとめられる。

ベクトルをベクトルにうつす勝手な一次変換といっても、必ず行列によるかけ算で表わされてしまう。むしろ、こういえるように行列とベクトルとのかけ算を定めたと言った方が良いのである！

今は一次変換から出発したが、写像 $f$ を行列 $A$ によるかけ算 $(16)$ で定義すれば、これが線型性 $(11), (12)$ を満たすのは先に述べた $(1)$ ~ $(3)$、$(8)$ ~ $(10)$ からすぐにわかる。たとえば、$(12)$ は $(9)$ そのもの。

$(16)$ は二通りに、「一次変換 $f$ の行列表示」(「$f$ が $A$ で書けた」と見る場合)、あるいは「$A$ で定まる一次変換の式」のどちらとも読める。結局、さっきの 問 に対して、

答　一次変換は行列とちょうど同じだけ沢山ある

と答えることができる。「$f$ は $A$ で書け、$A$ があれば $f$ ができる」からである。

$$\text{線型写像 } f \quad \Rightarrow \quad A = [f(e_1), f(e_2)] \tag{17}$$

$$f(v) = Av \quad \Leftarrow \quad A \tag{18}$$

$A$ の成分 $a, b, c, d$ は、写像 $f$ のいわばデータであり、$f$ を完全に決定してしまう。

行列の積も、一次変換の見方で自然に説明できる。平面の一次変換が

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad f' : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2.$$

とふたつあったとする。この合成

$$f \circ f' : \mathbf{R}^2 \ni v \mapsto f(f'(v)) \in \mathbf{R}^2$$

を考えることは非常に自然である。この $f \circ f'$ を表示する行列を、$f, f'$ を表示する行列から求めてみよう。

まず $f, f'$ の行列表示を、さっきのように

$$A = [f(e_1), f(e_2)] = \left[ \left[ \begin{array}{c} a \\ c \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} b \\ d \end{array} \right] \right], A' = [f'(e_1), f'(e_2)] = \left[ \left[ \begin{array}{c} a' \\ c' \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} b' \\ d' \end{array} \right] \right]$$

つまり

$$f(v) = Av \quad \left( A = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \right), \quad f'(v) = A'v \quad \left( A' = \left[ \begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d' \end{array} \right] \right)$$

とする。$f(f'(v))$ を、$v = xe_1 + ye_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に対して計算する。

$$f(f'(v)) \quad = \quad f(f'(xe_1 + ye_2)) = f(xf'(e_1) + yf'(e_2)) = xf(f'(e_1)) + yf(f'(e_2))$$

であるから、さっきと同じく

$$f(f'(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})) = [f(f'(e_1)), f(f'(e_2))] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

である：$f(f'(e_1)), f(f'(e_2))$ はベクトル、それを並べて行列にした。さらにこの行列を計算すると、

$$\begin{aligned} [f(f'(e_1)), f(f'(e_2))] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \left[ f(\begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix}), f(\begin{bmatrix} b' \\ d' \end{bmatrix}) \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[ A \begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} b' \\ d' \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aa' + bc' & ac' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

これが $f(f'(v))$ を表わす。一方 $f(v) = Av, f'(v) = A'v$ からは

$$f(f'(v)) = f(A'v) = A(A'v)$$

であるから、$A, A'$ の積とは $A(A'v) = Bv$ である行列 $B$ のこととするならば、$(19)$ の右辺の行列で $AA'$ を定めねばならない。これが行列の積の法則 $(7)$ の由来である。

3 つの行列の積について $(AB)C = A(BC)$ がなりたつことも、3 つの平面の一次変換 $f, g, h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の合成について $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ であることから自然に出てくる。

**REMARK 1** 線型性 *(11), (12)* を満たす写像を一次変換と呼んだ。どこが一次か？といえば、$v$ の像を書く式 *(15)* が、$v$ の成分 $x, y$ の一次式であるところがそれである。二次以上の式で定義される平面から平面への変換もモチロンあるわけだが、そういうものを調べるときにも、まず一次式 *(*一次変換*)* による近似をするのが基本の一つである。ちょうど関数を調べるのにグラフに接線を引いて一次式で近似するように。

「一次」あるいは「線型」の原語 linear は直線 line からきているが、次の問題はその意味をよりはっきりさせるものである。

問 **2** 平面の一次変換により、直線は直線または一点に写ることを示せ。また、平行な 2 直線は、それらが一点につぶれない限りやはり平行な 2 直線にうつることを示せ。

## 1.4 例：回転を表わす行列

すでに見たように、回転はひとつの一次変換である。従って上でわかったことによれば、行列で表示できる。その行列は $f_\theta$ による $e_1, e_2$ の像を並べれば得られるのだが、図を自分で書いてみれば

$$f_\theta(e_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, f_\theta(e_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

よって、回転 $f_\theta$ を表す行列 $A(\theta)$ は、

$$A(\theta) = [f_\theta(e_1), f_\theta(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

となる：

$$f_\theta(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

さて、回転を合成しても (ひきつづき行っても) また回転である。角度$\theta, \theta'$ の回転を合成したら、当然角度 $\theta + \theta'$ だけの回転になる。つまり、 $f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'}$. 一方、2 つの一次変換を合成した変換を表す行列は、それぞれを表す行列の積になるのだから、この式は

$$A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta') \tag{20}$$

を意味しているハズである。では、本当にそうか ?: 確かめてみると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{bmatrix}, \\ \text{右辺} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。(20) はしたがって、三角関数の加法定理により「本当にそう」とわかったことになるが、実はこれは検算をしているのだからこの考察で三角関数の加法定理を導けたと言ってよい。これを覚えておけば、以後は「加法公式は行列のかけ算から出る」と、記憶の節約ができる！

問 3　*1.* 原点を通る直線 $ax + by = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0$ とする*)* についての折り返しも、一次変換であった。この変換を表わす行列 $A$ を求めてみよ。

*2.* 回転のときと同じように、折り返しを引き続いて行う。同じ直線についての折り返しを二回やったら何もしなかったのと同じ結果になるが、違う直線についての折り返しの場合はどうか考えよ。回転の場合は $f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta'} \circ f_\theta$ *(*回転角の和だけが問題で、順序によらない*)* であったが、これも折り返しの場合はどうだろうか？

# 2　2 × 2 行列の行列式と逆行列

## 2.1　単位行列、逆行列、行列式

もっとも簡単な 2 × 2 行列として、次の 2 つがある。

- 零 (ゼロ) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ : 通常 $O$ であらわす。零行列は、

$$A + O = A = O + A$$

( $A$ は任意の行列) という性質がある[3] 。また明らかに、すべてのベクトル $v$ に対して $Ov = 0$ $(0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ はゼロベクトル ) である。つまり、零行列は、全てのベクトルにゼロベクトルを対応させる写像 $f : v \mapsto 0$ を表現する行列である。

[3] このことを、$O$ は加法に関する単位元であると言い表わす。

- 単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ : 流儀がいくつかあるが、$E, I$ あるいは $1$ などと表わす。単位行列は

$$AE = A = EA$$

( $A$ は任意の行列) という性質がある[4] 。すべてのベクトル $v$ に対して $Ev = v$ である。つまり、単位行列は、全てのベクトルにそれ自身を対応させる写像 $f : v \mapsto v$ (恒等写像という) を表現する行列である。これは $v$ を数 $1$ 倍だけのばすといっても同じことなので、$E$ のかわりに $1$ と書いても良い (マチガイがおきない) のである。
同様に数 $k$ と行列 $kE$ についても $kEv = kv$ なので、$kE = k$ と同じに思ってよい。

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して $A + B = O$ を満たす $B$ は、もちろん $B = -A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ で与えられ、このとき $B + A = O$ でもある。積に関して同じ問題を考えてみよう。

**定義 1** 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して、

$$AB = E \quad \text{かつ} \quad BA = E \tag{21}$$

であるような行列 $B$ があれば、$B$ を $A$ の逆行列とよび、$A^{-1}$ と表わす。

ここで、たとえば零行列 $O$ についてはどんな行列 $B$ をもってきても $OB = O = BO$ であるから、$O$ は逆行列を持たない。「あれば」というのはこういう意味である。

それでは、いつ行列 $A$ には逆行列があるだろうか。連立方程式の見方 $(5)$ を思い出すと、もし逆行列 $B$ があったとすれば

$$Av = w \quad \left( A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}; x, y \text{が 未知数} \right)$$

のとき、左から $B$ を掛けて

$$BAv = Bw \quad \text{よって } (BA = E \text{ より}) \quad v = Bw \tag{22}$$

と解けてしまう。つまり、逆行列は $Av = w$ の解を与えねばならない。これから $B$ がわかるであろう。やってみると

$$\begin{cases} ax + by = X \\ cx + dy = Y \end{cases}$$

の第 $1$ 式を $d$ 倍、第 $2$ 式を $b$ 倍して引けば

$$\begin{cases} dax + dby = dX \\ bcx + bdy = bY \end{cases} \quad \text{よって} \quad (ad - bc)x = dX - bY,$$

同様に第 $1$ 式を $c$ 倍、第 $2$ 式を $a$ 倍して引けば

$$\begin{cases} cax + cby = cX \\ acx + ady = aY \end{cases} \quad \text{よって} \quad (ad - bc)y = -cX + aY.$$

[4] このことを、$E$ は乗法に関する単位元であると言い表わす。

よって $ad-bc \neq 0$ であれば

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{dX-bY}{ad-bc} \\ y = \frac{-cX+aY}{ad-bc} \end{array} \right. \quad \text{すなわち} \quad v = \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \frac{1}{ad-bc} \left[ \begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right] \tag{23}$$

である。(22),(23) を比べると

$$B = \frac{1}{ad-bc} \left[ \begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right]$$

が、求める逆行列であろうとわかる。ただし、$ad-bc \neq 0$ でなくてはならない。確かめてみると

$$\frac{1}{ad-bc} \left[ \begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] = \frac{1}{ad-bc} \left[ \begin{array}{cc} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{array} \right] = E,$$

同様に $AB = E$ も確かめられて、$ad-bc \neq 0$ ならこれが確かに逆行列であるとわかる。

一方 $ad-bc = 0$ のときはどうかというと、このとき方程式 $Av = w$ は $dX - bY = 0, -cX + aY = 0$ でない限り解をもたない (しかも、そのとき解 $x, y$ は任意で良い)。(22) より、仮に逆行列があるとすれば全ての $w$ に対して方程式 $Av = w$ が解けるはずであるのに、これはおかしい。つまり、逆行列があるという仮定がまちがいである。よってこの場合は逆行列は無いことになる。以上を定理の形でまとめておこう。

**定理 1** 行列 $A = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$ の逆行列が存在するための必要十分条件は $ad-bc \neq 0$ である。このとき、逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \left[ \begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right]$ で与えられる。

逆行列をもつような行列のことを、可逆行列とか正則行列と呼ぶ。状況にもよるが、$ad-bc \neq 0$ という条件を満す行列は、$ad-bc = 0$ であるものよりはるかに多いと考えてよいだろう。この意味で「ほとんどの」行列は逆行列をもつ可逆行列であると言える。$ad-bc = 0$ だと逆行列が無い理由は、この章の最後により幾何的にはっきりするであろう。何度も出てくるこの量は、行列式という重要なものである。

**定義 2** 行列 $A = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$ に対し、$ad-bc$ を $A$ の行列式 *(determinant)* とよび、

$$\det(A), \quad |A|, \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|$$

などと書く。[5]

英語の determinant (デターミナント) は「決定式」くらいの意味であり、この量が連立一次方程式の解のあるなしを決定することからきている。実際解のあるなしだけでなく、解そのものも

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} X & b \\ Y & d \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|}, \quad y = \frac{\left| \begin{array}{cc} a & X \\ c & Y \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|} \tag{24}$$

[5] 高校では $\Delta$ などとも書いたかもしれないが、あとで $\Delta(A)$ を別の意味 (「余因子行列」) で用いるので、混乱をさけるため使わないようにしたい。ついでながら、$a+d$ にはトレースという名前がついていて、$\mathrm{tr}(A)$ とか $\mathrm{trace}(A)$ で表わす。古い本ではドイツ語流でシュプール $\mathrm{Spur}(A)$ と書いてあることもある。

と簡潔に書けてしまうことが (23) よりわかる。これはクラメルの公式 (10.3 章) とよばれるものの 2 次 (未知数 2 個) の場合である。なおクラメルはフランス革命のころの人である。

歴史的には、行列式の方が行列そのものよりもずっと先にできあがった概念であり、パスカルによって考えられたという。同時代 (江戸初期) に関孝和も 4 次のときまで考察している。行列や一次変換 (より一般に線型写像) がはっきり定式化されたのは意外と新らしく、ここ 100 年ほどのことである。

## 2.2 逆行列を用いる例題

問 4 平面ベクトル $v_1, v_2$ を、それぞれ平面ベクトル $w_1, w_2$ に写すような一次変換 $f$ を表わす行列を求めよ。

前節では基本ベクトル $e_1, e_2$ の行き先で一次変換が定まることを見たが、そこでの基本ベクトルの役割は勝手なベクトルがその 2 つのベクトルの何倍かの和で書けるということであった。そこでここでも、$e_1, e_2$ の代わりの $v_1, v_2$ は異なる方向を向いていると仮定する。

その像 $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$ が与えられているというのが題意である。

任意のベクトル $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を、基本ベクトルでなく $v_1, v_2$ により

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 \tag{25}$$

($k_1, k_2$ は数) と表わせるというのが仮定である。すると

$$f(v) \quad = \quad f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) = k_1 w_1 + k_2 w_2 = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

すなわち

$$f\left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

この式はまだ $x, y$ だけで書けていない。$x, y$ と $k_1, k_2$ は (25) によって結ばれているが、これを

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

と書き直してみれば、これを $k_1, k_2$ は $[v_1, v_2]$ の逆行列を用いて

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = [v_1, v_2]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と書ける。これを (26) に代入すれば

$$f\left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = [w_1, w_2][v_1, v_2]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

よって求める行列は

$$A = [w_1, w_2][v_1, v_2]^{-1} \tag{27}$$

というわけである。

ここで、逆行列 $[v_1, v_2]^{-1}$ が存在するかどうかが問題であるが、これについては次節で明かになる。

結論だけ言えば、はじめに仮定した「$v_1, v_2$ が異る方向を向いている」という条件はこの 2 つのベクトルを 2 辺とする平行四辺形の面積が $0$ でないと言い換えられるが、このことが行列 $[v_1, v_2]$ の逆行列が存在するために必要十分なのである。

前章の問題の解答も、これを使うとてっとり早くできる。直線 $l : ax + by = 0$ の方向ベクトルを $v_1$, これと直交するベクトルを $v_2$ にとって考える。ちょっと考えると

$$v_1 = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

にとれる。$l$ についての折り返し写像 $f$ について

$$f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = -v_2$$

であるから、$f$ を表わす行列 $A$ は上の考察より

$$A = [v_1, -v_2][v_1, v_2]^{-1} = \begin{bmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ -a & b \end{bmatrix}^{-1}$$

ここで必要な逆行列は、$\det \begin{bmatrix} b & a \\ -a & b \end{bmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$ (仮定より) であるから存在する。(この $a^2 + b^2 \neq 0$ という条件は、方向ベクトルが $0$ でないという条件であった。) 計算を続けて

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix}$$

となる。これが求める行列である。

## 2.3 一次変換の面積比と行列式

ここでは、数は実数の範囲とする。

行列は、平面 $\mathbf{R}^2$ の一次変換と思うことができる (前章)。$A = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ としよう。$v_1, v_2$ は、この $A$ が定める一次変換 $f = f_A : v \mapsto Av$ においては、基本ベクトル $e_1, e_2$ の行き先という意味を持っていた。

今、$e_1, e_2$ を 2 辺とする単位正方形 $U$ を考え、これを常識的に面積 $1$ と思うことにする ($U = \mathrm{unit} = 1$ のつもり)。この正方形 $U$ が $f$ によってどれだけの面積を持つ図形になるかを考えよう。

$U$ の $f$ による像を $f(U)$ と書くことにする。集合の記号を用いると

$$f(U) = \{f(v) | v \in U\}$$

である。これがまずどんな形の図形かが問題であるが、一次変換で平行な直線は平行な直線に写される。従って正方形の二組の対辺は、やはり平行な二組の線分に写る。これらの辺ははじめの正方形と同じ順にならぶであろう。すると、$f(U)$ は平行四辺形となるであろう。

これを確かめるためには、まず正方形 $U$ の周及び内部の点が

$$xe_1 + ye_2, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

と書けることに注意する。すると $f(U) = \{f(v) | v \in U\}$ の点は

$$P = f(xe_1 + ye_2) = xv_1 + yv_2, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

の形である。まず、$y = 0$ として $x$ を $0$ から $1$ まで動かすと、この点 $P$ は原点からベクトル $v_1$ の終点まで動く。$x = 0$ として $y$ を $0$ から $1$ まで動かすと、原点から $v_2$ の終点まで動く。$y = 1$ として $x$ を $0$ から $1$ まで動かすと、今度は $v_2$ の終点から $v_1$ の方向に、ちょうど $v_1$ の長さまで動いてゆく。最後に $x = 1$ として $y$ を $0$ から $1$ まで動かすと、$v_1$ の終点から $v_2$ の方向に、ちょうど $v_2$ の長さまで動いてゆく。これらは $4$ つの線分をなしており、それがなす図形は $v_1$ と $v_2$ を 2 辺とする平行四辺形に他ならない。$x, y$ が $0$ と $1$ の間にあるときは、$P$ はこれら $4$ つの線分の内部を動くことがわかる。したがって、$f(U)$ は $v_1$ と $v_2$ を 2 辺とする平行四辺形の周と内部となる。

さて、$f(U)$ の面積を考えよう。さっき書いた絵のようになっている保証は必ずしもないが、とりあえず絵のような状況であるとする。そして、$v_2$ の $y$ 成分の絶対値を高さにもち、$x$ 軸を底辺とするように等積変形して、(底辺× 高さ) により面積を求めることにする。

すると、底辺の長さは、$v_2$ の対辺を延長した直線 $l$ の $x$ 切片の絶対値である。直線 $l$ は「方向ベクトルが $v_2$ の原点を通る直線を $v_1$ だけ平行移動したもの」であるから、その上の点 $Q(x, y)$ は、ベクトルを用いると

$$Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v_1 + tv_2 = \begin{bmatrix} a + tb \\ c + td \end{bmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

と表わされる。よって求める $x$ 切片は、

$$y = 0 \Longleftrightarrow c + td = 0 \Longleftrightarrow t = -c/d$$

より、$a - \frac{c}{d}b$ となる。(高さ) $= |(v_2 \text{ の } y \text{ 成分})| = |d|$ であるから、あわせて

$$f(U) \text{ の面積} = |(a - \frac{c}{d}b) \cdot d| = |ad - bc|$$

つまり

**定理 2**

$$f(U) \text{ の面積} = |\det A|$$

という関係が得られた。行列 $A$ で表わされる一次変換 $f$ は、単位正方形を行列式の絶対値だけの面積をもつような平行四辺形に写し、したがって種々の図形の面積をやはり行列式の絶対値倍にする。これが表題の意味である。

定理 $2$ によれば、なぜ行列式が $0$ のときに逆行列がないかも幾何的な意味がついてはっきりする (実行列のときに限ってだけれども、直観を養うには十分であろう)。

すでに見たように、行列 $A$ の逆行列は、連立方程式 $Av = w$ の解 $v$ を与える： $v = A^{-1}w$. $Av = w$ の解 $v$ は、「点 $w$ は $A$ がどこから運んで来たものか」という意味をもつ点である。これが各 $w$ についてひとつ定まるためには、異なる点 $v, v'$ が異なる点 $w, w'$ に写っていなくてはならない。(たとえば共に同じ $w$ に写るとすると、$w$ は $v$ から来たとも $v'$ から来たとも言えて、つまり解 $v$ がひととおりに決らないから。)

したがって、逆行列をもつためには、$A$ による一次変換の面積比は $0$ になっては困る。なぜなら、たとえば正方形 $U$ が面積 $0$ の図形に写るとき、それは $f(U)$ が線分あるいは一点につぶれることを意味し、この場合異なる無数の点が同じ点に写っているからである。

実際 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式が $0$ のとき、$ad = bc$ より $a : b = c : d$. そこで ($a \neq 0$ と仮定し) $b = ka$ とすると $d = kc$. すると $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ c & kc \end{bmatrix}$ であり、点 $v$ を通る直線 $v + t \begin{bmatrix} k \\ -1 \end{bmatrix}$ ($t$ は実数を動く) は $A$ により一点 $Av$ に写る。そして $v$ が平面全体を動いても、$Av$ の軌跡は原点を通り方向ベクトルが $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ の直線にしかならない。(ここで $a = 0, b \neq 0$ のときは $a$ と $b$、$c$ と $d$ をそれぞれ入れかえて議論すれば同様。$a = b = 0$ のときは、直線 $v + t \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$ が一点 $Av$ につぶれる。)

以上をまとめて、次のように言える。

**定理 3** 行列 $A$ の行列式が $0$ のとき、あるベクトル $v \neq 0$ で $Av = 0$ をみたすものが必ずある。

$\det A \neq 0$ のとき

$\det A = 0$ のとき

**問 5** $\det[v, w] = 0$ のとき、ある数 $a, b$ *(少くとも一方は $0$ でない)* があって $av + bw = 0$ と書ける。これを示せ。

問 **6** $A$ の行列式の符号は、$A$ による一次変換が平面 *(*の向き*)* を裏返すかどうかを表わし、正ならば裏返さず負ならば裏返す。*(*そして、$0$ ならば面積を $0$ 倍にする=「つぶす」。*)*

このことを、簡単な行列の場合に確かめよ。たとえば、回転という一次変換は平面を裏返さないが、この行列式は $1$ であることを確かめよ。*(*したがって、回転は面積を変えない。これも経験と合っている。*)*

また、以前求めた直線 $ax + by = 0$ に関する折り返しは平面を裏返す変換の典型的な例であるが、これを表わす行列の行列式を計算してみよ。

問 **7** 「積の行列式は行列式の積」: 行列式の重要な性質として、次の乗法性がある。

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{28}$$

このことを計算によって確かめよ。特に $A^{-1} = B$ のときを考えれば、$\det(AB) = \det E = 1$ であるから $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$、従って

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \tag{29}$$

行列式の絶対値は面積比であるというさっきの定理によれば、この性質も「$A$ による一次変換の面積比が $k$ 倍、$B$ が $h$ 倍ならば、積 $AB$ は $kh$ 倍だろう」と、常識的な理解ができる。(ただし、やはり実数の行列のとき。)

絶対値をとった行列式そのものを考えると、さらに符号の正負が関わってくる。上の式によれば「積の行列式の符号がそれぞれの行列式の符号の積」であるが、この事実も「向きを裏返す変換を二回やるともとの向き」という経験法則にかなっている。

# 3　2× 2 行列の対角化

## 3.1　対角化と固有ベクトル

2× 2 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について、$a, d$ を対角成分といい、これ以外 (非対角成分、$b$ と $c$) が $0$ ならば $A$ を対角行列という。一般にも正方行列において、対角成分 (すなわち左上から右下にかけての対角線上の成分) 以外が $0$ のとき、これを対角行列とよぶ。

対角行列の大事なところは、それが簡単であるところにある。$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ は対角行列だが、これについては

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ dy \end{bmatrix}$$

である。よって、$A$ が定める一次変換は

「平面を $x$ 軸方向に $a$ 倍、$y$ 軸方向に $d$ 倍する」

と単純に述べることができる。$A$ の行列式は、単に対角成分の積 $ad$ であり、この絶対値はたしかにこの変換の面積比である。また、$a$ が負なら $x$ 成分が、$d$ が負なら $y$ 成分が逆符号となる (「ひっくりかえる」) が、平面全体が $A$ で裏返るかどうかが積 $ad$ の符号の正負できまることも見やすい。

このように、前節で得た知識も対角行列なら実はあたりまえのことである。

一次変換 $f : v \mapsto f(v)$ を行列で表わすのに、まずベクトル $v$ をその $x, y$ 座標で表わしてきた。しかし $x, y$ 座標を使うのは単に習慣であって、本来は考える一次変換ごとに固有の方向があって、それを使うとほとんどの場合その一次変換は対角行列で表わせる。

たとえば、$f$ が直線 $l : ax + by = 0$ に関する折り返しの場合、以前のように方向ベクトルを $v_1$, これと直交するベクトル (法線ベクトルという[6] ) を $v_2$ ととれば、この一次変換は

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 \mapsto f(v) = k_1 v_1 - k_2 v_2, \tag{30}$$

すなわち

「$l$ の方向ベクトル方向に $1$ 倍、これと直交する方向に $-1$ 倍する変換」

であると述べることができる。

ここで $k_1, k_2$ は $v_1, v_2$ についての $v$ の座標といえる。つまり折り返し変換では、座標軸を変えただけで対角行列の場合と同じ述べ方ができる。折り返しに限らずこれを実際に行うのがここで説明する対角化という作業であり、そうすることで一次変換=行列をもっと扱いやすくすることが目標である。

それでは、一次変換に「固有の方向」を、式では何と言えばよいだろう？これまでの考察から、「固有の方向」とはこの変換で方向が変わらないベクトルというべきであろう。方向は変わらなくても、その大きさは変わってよい。そこで次のように定義する。

定義 **3** 2× 2 行列 (一般に正方行列) $A$ に対し、ベクトル $v \neq 0$ がある数 $\lambda$ に対して

$$Av = \lambda v$$

をみたすとき、$v$ を $A$ の固有ベクトルといい、$\lambda$ を $v$ の固有値とよぶ。

一次変換 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ についても、$0$ でないベクトル $v \in \mathbf{R}^2$ が

$$f(v) = \lambda v$$

を満たすとき、$v$ を $A$ の固有ベクトル、$\lambda$ をその固有値とよぶ。 □(定義おわり)

例

- たとえば $A$ が直線に関する折り返しを表わすとき、直線の方向ベクトルは $A$ の固有値 $1$ の固有ベクトル、法線ベクトルは $A$ の固有値 -1 の固有ベクトルである (30)。これからわかるように、固有ベクトルは方向が大事であって、長さは (1 にとることも多いが) とりあえず $0$ でなければ何でも良い。
- 単位行列については、 $0$ でないベクトルはすべて固有値 $1$ の固有ベクトルである。 □

一般の行列 $A$ でこのような固有ベクトルが 2 つ ( 2 方向) あったとして、それらを $v_1, v_2$ とする。定義より

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_2 = \mu v_2 \tag{31}$$

である。

ここで 2 方向というのはやや曖昧だが、この 2 つの方向が座標を定める資格を持つということである。それには $v_1, v_2$ が作る平行四辺形が面積 $\neq 0$ である、すなわち

$$\det[v_1, v_2] \neq 0 \tag{32}$$

[6] 法線というのは変な語だが、法のもとは normal で、基準という意味があるから直交方向を表すことになったのであろう。

ならば良い。このとき $v_1, v_2$ は、平面上にいわゆる斜交座標 (軸が必ずしも直交していない座標系) を定め、任意のベクトル $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

と (一通りに) 書ける。$k_1, k_2$ がこの斜行座標系に関する $v$ の座標である。仮定 $(32)$ の下では、$[v_1, v_2]$ は逆行列をもつので

$$[v_1, v_2]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

である。この関係はすでに以前 $2.2$ 節で用いたもので、通常の $(x, y)$ 座標から新しい座標 $(k_1, k_2)$ への座標変換の公式と呼ぶべきであろう。

さて、$(31)$ と $(33)$ より、新しい座標 $(k_1, k_2)$ では $A$ の作用は単に $k_1$ を $\lambda$ 倍、$k_2$ を $\mu$ 倍するだけである。

$$Av = A(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 A v_1 + k_2 A v_2 = \lambda k_1 v_1 + \mu k_2 v_2$$

これは

$$A[v_1, v_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \lambda k_1 \\ \mu k_2 \end{bmatrix}$$

とも書け、さらに右辺は

$$A[v_1, v_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

と書き直せる。これが全ての $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ について成り立つのだから、両辺の行列は等しくないといけない (この言い方にためらいがある人は、問 $1$ で復習のこと)。

$$A[v_1, v_2] = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{35}$$

仮定より $[v_1, v_2]^{-1}$ があるので、これを左から掛ければ

$$[v_1, v_2]^{-1} A [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{36}$$

を得る。このようにして、適当な可逆行列 $P$ により行列 $A$ を $P^{-1}AP$ が対角であるように変形することを、$A$ を対角化するという。今 $(35)$ ~ $(36)$ で見たように、実際には $P$ は固有ベクトルを並べて作るのである。

**まとめ** 以上 $k_1, k_2$ についての $A$ の表示を求めるという動機で $(35)$ に至る式変形を行ったが、わかってしまえば $(31)$ からすぐに出る。実際 $(31)$ を並べて書けば

$$[Av_1, Av_2] = [\lambda v_1, \mu v_2]$$

であり、書きなおせば

$$A[v_1, v_2] = [\lambda v_1, \mu v_2] = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

これは $(35)$ に他ならない。逆行列 $[v_1, v_2]^{-1}$ を (あれば) 左から掛けて、対角化 $(36)$ を得る。

## 3.2　固有方程式

そこで、固有ベクトルをどう求めるかが問題となる。固有ベクトルの式 $Av = \lambda v$ を、$Av - \lambda v = 0$ と書きなおす。これはより具体的には

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} v - \lambda v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} v - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} v = 0$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} v = 0$$

と書ける。固有ベクトル $v$ は (方向を表わすために) $0$ であってはならないから、この式は $v \neq 0$ にある行列を書けると $0$ になるという式である。行列

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \tag{37}$$

が逆行列を持つとすると、それを上の式に左からかけると $v = 0$ となってしまう。したがってこの行列は、逆行列をもってはならない。よって行列式 $= 0$, すなわち

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0. \tag{38}$$

である。これは、固有値 $\lambda$ が満たすべき方程式で、固有方程式[7] と呼ばれる。行列式をとる前の行列 $(37)$ は特性行列と呼ぶことがある。

さて、この方程式を解けば、それが固有値の候補である。ところで以前の定理 $3$ によれば、行列式が $0$ である行列 $\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$ は、必ずある $v \neq 0$ を「消す」:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} v = 0.$$

これは $Av = \lambda v$ に他ならない。すなわち、固有方程式の解 $\lambda$ から一つの固有ベクトル $v$ が得られることがわかった。

固有方程式の解を $\lambda, \mu$ とし、これに対するそれぞれの固有ベクトルを $v, w \neq 0$ とする。前節の要領で $A$ の対角化をするには、$\det[v, w] \neq 0$ かが問題である。実は $\lambda \neq \mu$ なら、これは自動的に正しい:

**定理 4** 行列 $A$ の固有ベクトル $v, w(\neq 0)$ について、これらの固有値 $\lambda, \mu$ が互いに異るならば

$$\det[v, w] \neq 0.$$

**証明**　問題の行列式が $0$ と仮定してみる。これは (数の範囲が実数であれば) $v$ と $w$ が一直線上にあるということで、ある数 $a$ があって $av = w$ と書ける (複素数の範囲で考えても、行列式がゼロなら必ずこう書けるというのが問 $5$)。$av$ を改めて $v$ と書けば、はじめから $v = w$ としてよい。この式に $A$ を掛けると$\lambda v = \mu w$. $v = w \neq 0$ であるから、これは $\lambda = \mu$ を意味し仮定に反する。 □

[7] 化学方面では、永年方程式とも呼んでいる。

重根のときが最もこまるが、これについてはこの章の最後の節で論ずる。

また、ここでは固有方程式の解が実数解かどうかはあまり気にしなかった。複素数の範囲までいけば、二次方程式 (に限らずすべての代数方程式) は必ず解をもつ。その場合でも $\lambda, \mu$ が複素数になるだけでやる計算は同じで、ただ平面に結果を図示できないだけである。もっとも固有値が物理量などと関連するときには実数であるかどうかは (あたりまえだが) 重要である。

問 **8** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め、対角化せよ。

## 3.3 ケーレー・ハミルトンの定理とその応用

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の固有方程式 $(38)$ の左辺を $P_A$ と書こう。

$$P_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc) \tag{39}$$

である。$\lambda, \mu$ をこの解 (固有値) とすれば

$$P_A(t) = (t - \lambda)(t - \mu) \tag{40}$$

である。ケーレー・ハミルトンの定理とは、「$P_A$ に $A$ を代入すると $O$」というものであった。

**定理 5 (Cayley(), Hamilton())**

$$P_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc) = O. \tag{41}$$

ここで最後の項は「数を行列と思うときのルール」によって、$(ad - bc)E$ と思うのである。

問 **9** $A^2$ など各項を計算し加えることによって、これを確かめよ。

この定理は「やってみるとなっている」不思議な式だ、というのが通常の感覚だと思う。これは $P_A$ を $(40)$ の形でとらえるとより納得しやすくなる。簡単のため、$A$ は対角行列だとしよう。その対角成分すなわち固有値は、$P_A$ の根であるから $\lambda, \mu$ である。$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ を $(40)$ に代入すると

$$P_A(A) = \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \lambda \right) \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \mu \right)$$

ここで「数を行列と思うルール」によれば、右辺は

$$\left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right)$$

であるが、これが $0$ になるのは明らかであろう。

$$P_A(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

これはカンタン！ では、$A$ が対角でないときはどうか？今やったばかりのウマイ話にもちこめないか

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} (=: \Lambda \text{ とおく})$$

と対角化できたと仮定してみる。このとき、$P_A = P_\Lambda$ である : なぜなら、これらの多項式は (最高次の係数が $1$ と等しいため) その根できまるわけだが、根とは固有値そのものであり、$A$ の対角化が $\Lambda$ である以上 $P_A$ と $P_\Lambda$ は同じ根をもつからである。

- これは単に
$$t^2 - (a+d)t + (ad-bc) = t^2 - (\lambda+\mu)t + \lambda\mu$$
というだけのことだが、別の方法でも確認してみる。$A = X\Lambda X^{-1}$ より、$A$ の特性行列 $A - tE$ も ($E = XEX^{-1}$ に注意して！)
$$A - tE = X\Lambda X^{-1} - tE = X(\Lambda - tE)X^{-1}$$
と書きなおせ、問 $7$ の二つの性質を用いて行列式をとれば
$$P_A(t) = |A - tE| = |X(\Lambda - tE)X^{-1}| \overset{(28)}{=} |X| \cdot |\Lambda - tE| \cdot |X^{-1}| \overset{(29)}{=} |\Lambda - tE| = P_\Lambda(t).$$

$P_A = P_\Lambda$ より、問題が対角行列 $\Lambda$ に対する場合に帰着することが期待できる。実際
$$E = XEX^{-1}, A = X\Lambda X^{-1}, A^2 = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1}) = X\Lambda^2 X^{-1} \tag{42}$$
なので、$t$ に $A$ を代入した行列 $(41)$ についても
$$P_A(A) = P_A(X\Lambda X^{-1}) = XP_A(\Lambda)X^{-1}.$$
そして $P_A = P_\Lambda$ なので、さっきやった対角行列に対しての場合より、(この式) $= O$ : すなわち、この場合にも $P_A(A) = O$ がいえた。

以上は定理 $5$ の再証明というべきだが、対角化できればというものであった。すでに見たように固有方程式の根が異なる場合には、この根を固有値とする異る方向の固有ベクトルがあって、対角化ができる。従ってあとは固有方程式が重根を持つ場合のみ問題だが、重根の場合の方がそうでない場合よりも特殊なのだからすでに重要な場合はつくしているはずだと思うべきである。そもそも強引に計算すれば正しいことはすでにわかっているのだから、これ以上気にしないことにしよう。

さて、定理の証明もさることながら、ここではその応用について述べたかった。それは、固有ベクトルが (半ば) 自動的にできることである。$P_A(A) = O$ は、$P_A$ を因数分解した形では
$$(A - \lambda E)(A - \mu E) = O \tag{43}$$
と書ける。これより、$A - \mu E = [v, v']$ とすると
$$(A - \lambda)v = 0, \quad (A - \lambda)v' = 0$$
つまり、$v, v'$ は $A$ の固有値 $\mu$ の固有ベクトルになっている。

ここで、$\det[v, v'] = \det(A - \mu) \neq 0$ とすると、$(43)$ に右から $(A-\mu)^{-1}$ を掛けて $A - \lambda E = O$. つまり $A = \lambda E$ で、はじめから $A$ が対角である。よって $A \neq \lambda E$ ならば $\det[v, v'] = 0$ で、$v$ と $v'$ の定める方向は等しく、本質的に同じものである。

同様に、$A - \lambda E = [w, w']$ とすると $(A - \mu)w = 0, \quad (A - \mu)w' = 0$ である。このように、固有値 $\lambda, \mu$ がわかっていれば、固有ベクトルはほぼ自動的に得られてしまう。

問 **10** 上の方法で、次の行列を対角化せよ。

## 3.4　固有方程式が重根をもつとき

$A$ の固有方程式 $P_A(t)=0$ が異なる根 $\lambda,\mu$ を持てば、二つの根に対応する固有ベクトルが存在し $A$ は対角化可能である。しかし、重根 $\lambda=\mu : P_A(t)=(t-\lambda)^2$ のときはどうだろうか？

もしも $\lambda$ を固有値とする異る方向のベクトル $v,w$ があれば

$$A[v,w]=[\lambda v,\lambda w]=\lambda[v,w]$$

であるが、仮定より $[v,w]^{-1}$ があるから右から掛けると

$$A=\lambda E.$$

すなわち $A$ は単位行列の $\lambda$ 倍というわけで、すでに対角型である。

そこで、異る方向のベクトル $v,w$ がないとしよう。ケーレー・ハミルトンの定理により

$$(A-\lambda E)^2=O. \tag{44}$$

今 $A-\lambda E=O$ であればさっきの場合だから、$A-\lambda E\neq O$ としよう。(44) の行列式をとれば、$|A-\lambda E|=0$. よって、$A-\lambda$ で消えるベクトルがある、つまり一つは固有ベクトル $v\neq 0$ がある。これは、前節と同様に $A-\lambda E=[v_1,v_2]$ と書いたときの $v_1,v_2$ で得られる ($\because$ (44)) が、ここでは $v_1=k_1v, v_2=k_2v$ と書こう。すると $A-\lambda E=[v_1,v_2]=[k_1v,k_2v]$. 従って、どんな $w$ をもってきても $An-\lambda$ で写すと $v$ の何倍かになっている。

$$(A-\lambda E)w=av \quad \left(w=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\text{ ならば、}a=k_1x+k_2y.\right)$$

$w$ として、$v$ と方向の異なる $0$ 以外のものをとれば $a\neq 0$ である。(そうでなければすべての $w$ に対し $a=0$ であり、$(A-\lambda E)=O$ になってしまうから。) $a$ でわっておけば

$$(A-\lambda E)w=v$$

としてよい。

ここまでの過程から、$v$ と異る方向のベクトルをとろうとしたら、この関係式が最も簡単なものといえるだろう。

このとき $(A-\lambda E)^2=O$ なのだから、$(A-\lambda E)^2w=0$ であるべきだが、やってみると

$$(A-\lambda E)^2w=(A-\lambda E)v=0$$

でたしかにそうなる。

まとめると、$v,w:\det[v,w]\neq 0$ が

$$(A-\lambda E)w=v,(A-\lambda E)v=0$$

のようにとれた。

$$\therefore (A-\lambda E)[v,w]=[0,v]=[v,w]\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \qquad \therefore [v,w]^{-1}(A-\lambda E)[v,w]=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

この両辺に $\lambda E$ を加えれば、結局

$$[v,w]^{-1}A[v,w]=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix} \tag{45}$$

である。この最後の形が今の場合 (重根をもつが対角化できない場合) の標準形であり、ジョルダン標準形といわれる。

## 3.5　対角化の応用

対角化の応用として、行列 $A$ の $n$ 乗 $A^n$ をきわめて簡単に計算できることがあげられる。実際、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \therefore A = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} P^{-1}$$

とすると、

$$A^n = (P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} P^{-1}) \cdots (n \text{ 回}) \cdots (P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} P^{-1})$$

であるが、途中の $P^{-1}, P$ はすべてたがいに打ち消しあい、また対角行列の $n$ 乗は各対角成分の $n$ 乗を並べたものだから

$$A^n = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}^n P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

よって、固有値の計算および $P^{-1}$ の計算ができれば、任意の $n$ 乗の計算ができる。

$A^n$ を計算する必要がある場面としては、一次の漸化式で定まる数列の一般項を求める問題や、これをいわば連続にした場合である線型・定数係数の常微分方程式を解く場合などがあげられ、どちらもきわめて基本的である。

また、2 次式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = Const.$$

が標準形でない $(b \neq 0)$ とき、この式で定まるいわゆる 2 次曲線の概形を調べるために変数変換を行い $b = 0$ の標準形に変形するのも、対角化の計算そのものといえる。

これらについて、とりあえず昨年の中間試験の後半の問題、およびその略解を参考にしてほしい。

なお、対角化は実用上も重要である。たとえば建築物の耐震性の評価のためには、建築物を多数の質点がバネによって連結されたものであると見る近似を行ない、バネ定数にあたるしばしば巨大になる行列を考える。この行列が建築物の強度をあらわす。その固有値は地盤との共振が起りやすいかどうかをきめる重要な量である。これはより小さなレベルでは固体の振動などでもほぼ同じことである。

大きな行列をコンピュータなどを用いて数値的に対角化するためには、(普通はプログラムの中に隠れており意識することはないけれども) 最新の数学とも関わる高度な知識が用いられる。

# 4　中間試験

## 4.1　問題 (1997 年度前期)

線型代数学 I 中間試験問題

1. 次のような 2 次の正方行列を求めよ。
 (a) $A, B \neq O$ ($O$ はゼロ行列) であるが、$AB = O$ であるような $A, B$ の例。[8]
 (b) $AB \neq BA$ であるような $A, B$ の例。[9]
 (c) $A$ は二つのベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を、それぞれ $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ に写す。
 (d) $A$ による線型写像で直線 $l : y = 2x + 1$ がまた $l$ 自身に写るような行列 $A$。(すべて求めよ。)

2(a) $l$ を平面 $\mathbf{R}^2$ の原点を通る直線とする。平面から平面への写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を、点 $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$f(P) := (l \text{ に関して } P \text{ と線対称の位置にある点})$$

として定める。$f$ が線型写像であることを示せ。
 (b) $l$ を $y = 3x$ とするとき、$f$ を表わす行列を求めよ。

3(a) 正方行列について、その固有値および固有ベクトルの定義を述べよ。
 (b) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め、対角化せよ: $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
 (c) 漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定まる数列を考える。ベクトル $v_n := \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$ が $v_{n+1} = Av_n$ を満すことに注目して、一般項 $a_n$ を $a_0, a_1$ で表わせ。

4(a) 楕円 $x^2 + 3y^2 = 1$ を、正の向きに $\frac{\pi}{3}$ ラジアン回転して得られる楕円の方程式を

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

と書くとき、$a, b, c$ を求めよ。
 (b) 2 次曲線 $x^2 - 6xy + y^2 = 1$ の標準形を求め、その概形を描け。
 (c) 2 次曲線

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k$$

は回転により、必ず標準形 $\lambda X^2 + \mu Y^2 = C$ に変換されることを示せ。

$\infty$. 講義の内容について質問があれば書くこと。スジの良い質問には点を与えます。

## 4.2　略解

1(a) 例はいくらでもある。たとえば $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は二乗して $O$ であるから (たしかめよ) $B = A$ でこれを例にもできる。実は $A^2 = O$ である $O$ でない 2 次正方行列 $A$ は、

[8] このような $A$ および $B$ を「零因子」と呼ぶ。
[9] このとき、$A$ と $B$ とは「互いに非可換である」という。

適当な可逆行列 $P$ により $P^{-1}AP$ と変換すると必ずこの形になる。考えてみよ (Hint: Cayley-Hamilton の定理)。

(b) これも沢山ある。たとえば $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ を $A$ について解いて (左辺のふたつめの行列の逆を右からかける)、$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$.

(d) 方向ベクトルを$\vec{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に、また「始点」を$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ にとれば、$l = \{\vec{P} = s\vec{D}+\vec{Q} | s$ は実数$\}$ である。$l$ が $l$ にうつるということは、すべての $s$ に対してある $s'$ があって $A(s\vec{D}+\vec{Q}) = s'\vec{D}+\vec{Q}$ (同値)。よって $A\vec{D}$ は $\vec{D}$ のある実数倍であるが、もし $0$ 倍だったとすると $l$ の像は一点になってしまう。よって $A\vec{D} = \lambda\vec{D}(\lambda \neq 0)$. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすれば、これより $\frac{a+2b}{c+2d} = \frac{1}{2}$. 一方 $A(\vec{Q})$ がまた $y = 2x+1$ の上にあるから $d = 2b+1$. この二つから、$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a-2 & 2b+1 \end{bmatrix}$. ただし $\lambda \neq 0$ より、$a+2b \neq 0$.

2(a) $l$ の方向ベクトルを $\vec{D}$、これと直交する $0$ でないベクトルを$\vec{E}$ とすれば、$\mathbf{R}^2$ の点はすべて$\vec{P} = s\vec{D}+t\vec{E}$ ($s,t$ は実数) と表されるが、このとき $f(\vec{P}) = s\vec{D}-t\vec{E}$ である。よって別の点を $\vec{P'} = s'\vec{D}+t'\vec{E}$ とするとき $f(\vec{P}+\vec{P'}) = (s+s')\vec{D}-(t+t')\vec{E} = s\vec{D}-t\vec{E}+s'\vec{D}+t'\vec{E} = f(\vec{P})+f(\vec{P'})$、これが示すべきことであった。

(b) $A\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ より、$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

3(a) 正方行列 $A$ に対し、(縦) ベクトル $v \neq 0$ がある数 $\lambda$ に対して $Av = \lambda v$ をみたすとき、$v$ を $A$ の固有ベクトルといい、$\lambda$ をその固有値という。

(b) $\mathbf{1}$ を単位行列とする。固有方程式 $0 = \det(A-\lambda\mathbf{1}) = \lambda^2-\lambda-2$ を解いて、$\lambda = 2, -1$. $(A-2\mathbf{1})v = 0$ より、$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$(の何倍でもよいがこうとる)。また $(A+1\mathbf{1})w = 0$ より、$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$(の何倍でもよいがこうとる)。これらから $A[v,w] = [2v,-w] = [v,w]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. すなわち $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ によって $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $v_n = A^n v_0$ であるから、$A^n$ を求めればよいが、

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^n P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^n+(-1)^n & 2^n+(-1)^{n+1} \\ 2^n+(-1)^{n+1} & 2^n+(-1)^{n+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。よって $v_n = A^n v_0$ の第 $1$ 成分に注目して、$a_n = \frac{2^n+(-1)^n}{2}a_0 + \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{2}a_1$.

4(a) 点$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$を$\frac{\pi}{3}$ラジアン回転した点を$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$とすれば、$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.
この時$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$であるから

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

まんなかの行列が求めるものであるから、これを計算することにより$a = \frac{5}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{3}{2}$.

(b) $1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$と書いて対角化を用いる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

と対角化されるから、(両側の行列が$\pm\frac{\pi}{4}$の回転をあらわすものにとれる。これに注意して、)
$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$とすれば、$1 = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 4X^2 - 2Y^2$. よってこの2次曲線は、もとの座標を$\frac{\pi}{4}$回転した座標$X, Y$で見れば、$Y = \pm\sqrt{2}X$をふたつの漸近線とする双曲線である。

(c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$とするとき、元の方程式は

$$1 = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

この式の3つの行列の積をとると

$$\begin{bmatrix} a\cos^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + d\sin^2\theta & b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a-d)\sin\theta\cos\theta \\ b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a-d)\sin\theta\cos\theta & a\sin^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + d\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

これが対角行列になればよいが、それには

$$0 = b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a-d)\sin\theta\cos\theta = b\cos 2\theta + \frac{a-d}{2}\sin 2\theta,$$

$b = 0$ならはじめから対角であるから$b \neq 0$とすれば、結局$\theta$を$\cot 2\theta = \frac{d-a}{2b}$にとればよいが、cotはすべての実数値をとるからこれは可能である。

# 5　多成分ベクトルと線型写像

ここまで、2 成分 (縦) ベクトルについて述べた (1.1)。これは成分が実数ならば平面の幾何ベクトルとして図示できる。同様に 3 成分実ベクトルも空間のベクトルとして考えることができるが、以下では更に進んで $n$ 成分のベクトルを考えよう ($n$ は自然数)。

ここで、「$4$ 成分以上のベクトルとは一体何であるか？」という問があるところだが、2 成分でも複素数成分のベクトルは図示することができない。それでも、実のときと同じ演算は可能であり、実のときの経験からある程度の幾何的直観も働き、「道具」として使うことができる。$4$ 成分以上でも事情は同様で、直接図示はできなくても (あるいは目で見えなくても)、今までの直観が働く範囲を拡げるところに意味がある。多成分のベクトルを扱うため、行列も一般のサイズのものを扱えるようになることが必要になる。主に大事となるのが、掃き出し法による変形、および行列式である。行列式は、平面における面積、空間における体積を拡張する形で定義され、直観が目で見えない範囲でも働くようになる。これはすばらしいことであろう！

## 5.1　$n$ 成分ベクトル

数の範囲は実数 $\mathbf{R}$ または複素数 $\mathbf{C}$ とする。2 成分のときと同様、$n$ 成分縦ベクトルとは $n$ 個の数を縦にならべてカッコでまとめたもののことである。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

これを単にひとつの文字で、たとえば $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ などと表わすのも同様である。数 $x_1, \cdots, x_n$ を、このベクトル $v$ の第 $1, \cdots,$ 第 $n$ 成分とよぶ。2 つのベクトルが等しいとは、成分がすべて (順番もこめて) 等しいときにいう。成分が実数ならば実ベクトル、複素数ならば複素ベクトルなどという。

$n$ 成分の横ベクトルも、数の並べかたを縦でなく横にしただけのものである。

ベクトルの $a$ 倍 ($a$ は数)、またふたつのベクトルの和も、

$$a\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{bmatrix}$$

で定義される。$a$ 倍のことは $a$ によるスカラー倍とも呼ばれる。2 成分のときに確かめた性質 $(1), (2), (3)$ は、もちろんそのまま成りたつ。平面ベクトルの全体 (=実 2 成分ベクトルの全体) を $\mathbf{R}^2$ で表わしたように、$n$ 成分ベクトルの全体を、成分が実であるか複素であるかに従い、記号 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ で表わす。

$$\mathbf{R}^n := \left\{ \left. \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right| x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R} \right\}, \quad \mathbf{C}^n := \left\{ \left. \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right| x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{C} \right\}.$$

## 5.2　行列の演算

$m, n$ を自然数という。$m$ 行 $n$ 列、あるいはサイズ $m \times n$ の行列とは、$mn$ 個の数を縦のサイズが $m$、横のサイズが $n$ の長方形に配置し、カッコでまとめたもののことである。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

いちいち行列を長方形に書くのがめんどうなとき、$A = [a_{i,j}]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ などと書く。$a_{i,j}$ を行列 $A$ の $(i,j)$ 成分とよぶ。2 つの行列が等しいとは、各成分がすべて等しいことをいう。成分がすべて実なら実行列、複素数なら複素行列とよぶ。(実行列は複素行列でもある。)

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ と、$m$ 成分のタテベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ は「かけあわせる」ことができる。(サイズに注意。)

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{46}$$

つまり、ベクトル $Ax$ の第 $i$ 成分を $(Ax)_i$ と書けば

$$(Ax)_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

である。$Ax$ を行列 $A$ の列ベクトルの和として表すことも、(6) と同様にできる。すなわち

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

とすれば

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

そこで、$m$ 行 $n$ 列の行列を、$m$ 成分縦ベクトルが $n$ 個並んだもの

$$A = [a_1, \cdots, a_n] \tag{47}$$

と見るのが、再び有効である。

行列 $A = [a_{i,j}]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ の、数 $k$ 倍は、

$$kA := [ka_{i,j}]$$

で定義される。和については、同じサイズの行列に対してのみ定義され、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

である。これは

$$A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}\ ,\quad B = [b_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

と略記する仕方で書けば

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

と書ける。積については、サイズについて最も注意が必要である。ふたつの行列 $A,\ B$ は、$A$ の「横幅」と、$B$ の「縦幅」が同じときのみ積が考えられ、

$$AB = [Ab_1, \cdots, Ab_n]$$

($B = [b_1, \cdots, b_n]$ のとき) である。$A,\ B$ がそれぞれ $l$ 行 $m$ 列、$m$ 行 $n$ 列としよう: $A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq l, 1\leq j\leq m}\ ,\quad B = [b_{j,k}]_{1\leq j\leq m, 1\leq k\leq n}$. すると、積 $AB$ の $i, k$ 成分は $(1 \leq i \leq l, 1 \leq k \leq n)$

$$(AB)_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \cdots + a_{i,m}b_{m,k} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,j}b_{j,k}$$

である。(8) ~ (10) の関係も、和と積が意味をもつ範囲で成り立つ：

$$(A + B)v = Av + Bv \tag{48}$$
$$A(v + w) = Av + Aw \tag{49}$$
$$A(Bv) = (AB)v \tag{50}$$

問 **11** 次の行列 $A, B$ の積は $AB, BA$ 共に定義されるが、異なる結果となることを確かめよ。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = {}^t A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 5.3 線型写像とその行列表示

「平面の一次変換と行列」の章で見たように、行列の積は線型写像を書き下すことから自然に現れる。以下実係数とするが複素数でも全く同じである。

考える行列を $m$ 行 $n$ 列とし、$m$ と $n$ に対応して 2 つの「空間」$\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ を考える。写像 $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ で、以前と同じ「線型性」の式 (11), (12) を満すものを考えよう。

$$f(av) = af(v),$$
$$f(v + w) = f(v) + f(w)$$

ここで $a$ は任意の実数、$v, w$ は任意の $\mathbf{R}^m$ の元、つまり $m$ 成分実ベクトルである。これはベクトルの $a$ 倍を $a$ 倍にうつし、和を和にうつすという式であった。

平面のときと同様、基本ベクトル (基本単位ベクトル)

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \cdots, e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

を導入する。すると

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \tag{51}$$

と表わされる。

写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が線型であるとすると、

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

に対して

$$f(x) \overset{(13)}{=} f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \overset{(12)}{=} f(x_1 e_1) + \cdots + f(x_n e_n) \overset{(11)}{=} x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n). \tag{52}$$

以前と同じく、基本ベクトルの像 $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ (これらも $\mathbf{R}^m$ のベクトル) がわかれば $f$ はわかってしまう。

$$f(e_1) = a_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \cdots, f(e_n) = a_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix},$$

とすれば、

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = [a_1, \cdots, a_n] x \tag{53}$$

つまり、行列 $A = [a_1, \cdots, a_n]$ とベクトル $x$ の積になった。平面のときと同様、こういえるように行列とベクトルとのかけ算を定めたのである。行列 $A = [a_1, \cdots, a_n]$ の第 $j$ 列ベクトル $(1 \leq j \leq n)$ は、$f$ による基本ベクトル $e_j$ の像 $f(e_j)$ である。

平面のときと同様、このようにして線型写像と行列とは一対一に対応する。(「$f$ は $A$ で書け、$A$ があれば $f$ ができる」。) 注意すべきは

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

に対応するのが $m$ 行 $n$ 列の行列であって、$n$ 行 $m$ 列の行列ではないこと。これは $f$ および $A$ が「どんなベクトル $x$ をお相手するか」$(f(x)$ あるいは $Ax$ に意味があるか) 冷静に考えれば間違えないはずである。

行列の積も、線型写像ふたつの合成を表わす行列として自然に説明できるが、これも平面の一次変換の場合と全く同じである。[10] 2 つの線型写像

$$g : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^m, \quad f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n.$$

があったとする。この合成

$$f \circ g : \mathbf{R}^l \ni x \mapsto f(g(x)) \in \mathbf{R}^n$$

を表示する行列を、$g, f$ を表示する行列

$$\begin{aligned} B = [g(e_1), \cdots, g(e_l)], \qquad & A = [f(e_1), \cdots, f(e_m)] \\ (g(x) = Bx : x \in \mathbf{R}^l, \qquad & f(y) = Ay : y \in \mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

からどう決まるかは、以前と同様に $f \circ g(e_1), \cdots, f \circ g(e_l)$ を求めれば良い。

$$\begin{aligned} [f \circ g(e_1), \cdots, f \circ g(e_l)] &= [f(g(e_1)), \cdots, f(g(e_l))] \\ &= [f(b_1), \cdots, f(b_l)] \\ &= [Ab_1, \cdots, Ab_l] \end{aligned}$$

従って $(f \circ g)(x) = ABx$ と書くために、積はやはり $AB := [Ab_1, \cdots, Ab_l]$ とせざるを得ない。

[10] 一般に、写像 $f : X \to Y$ が「同じ集合の間のもの」$X = Y$ のとき、変換と呼ぶことが多い。

# 6　いろいろな行列

行と列のサイズが等しい ($n$ 行 $n$ 列の) 行列を $n$ 次の正方行列と呼ぶ。行と列のサイズが等しいと限らぬときを長方行列と呼ぶ。

## 6.1　単位行列と行列単位

$n$ 次の単位行列 $E$. 正方行列 ($n$ 行 $n$ 列) であり、$I$, $1$ とも書く。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E$ の成分は対角線上に $1$ がある他は $0$ であり、$0$ を略して書くことも多い。単位行列は恒等写像 $x \mapsto x$ を表わし、かけ算が意味をもつ $A, B$ すべてに対し $AE = A, EB = B$ を満たす。

行列単位一般に $m$ 行 $n$ 列のとき、$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対し

$$E_{i,j} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (i \text{ 行 } j \text{ 列が } 1 \text{ 、それ以外は } 0.)$$

と置き、$(i, j)$ 行列単位と呼ぶ。これを用いると、$A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ は

$$A = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$$

と表わせる。

問 **12** 行列単位どうしの積は

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

となる。ここで$\delta_{j,k}$ はクロネッカーのデルタと呼ばれ、$j = k$ のとき *1*, それ以外の場合には $0$ を表わす記号である。

## 6.2　対角行列、三角行列

対角行列. 正方行列において、左上から右下にかけてを (主) 対角線 (principal) diagonal と呼ぶ。これ以外の位置の成分が $0$ であるような次の形の行列を対角行列と呼ぶ。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

これは紙面の省略のために $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と書かれることも多い。対角行列の積はまた対角行列である：

$$diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)diag(\mu_1, \cdots, \mu_n) = diag(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n).$$

一般の正方行列を「対角化」することは、2× 2のときと同様重要な問題である。

問 **13** $A = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を $n$ 次の対角行列で、$\lambda_i \neq \lambda_j$ と仮定する。行列 $B$ がこの $A$ と可換 $(AB = BA)$ であるためには、$B$ は対角行列でなくてはならないこと (必要十分) を示せ。

また、必ずしも $\lambda_i \neq \lambda_j$ とは限らない場合にはどうか。

上三角行列、下三角行列. それぞれ、次の形の行列をいう。

$$\begin{bmatrix} * & * & & \cdots & * \\ 0 & * & & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & 0 & & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & & * & * \end{bmatrix}$$

ここで、$*$ の印の位置には何が入っていてもよい ($*$ はコンピュータの世界でいうところの「ワイルドカード」)。言い換えれば、$*$ 印以外は $0$ ということである。

問 **14** 上三角行列の積はまた上三角、下三角行列の積はまた下三角である。これを確かめよ。

問 **15** 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ に対し、${}^tA := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ & \cdots & \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ を $A$ の転置行列と呼ぶ。$A$ が $m$ 行 $n$ 列であるのに対し、${}^tA$ は $n$ 行 $m$ 列である。

$A, B$ の積 $AB$ が意味をもつとき、${}^tB$ と ${}^tA$ の積${}^tB{}^tA$ はやはり意味を持ち

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

が成り立つことを示せ。

## 6.3 3 次元の回転を表わす行列

すでに平面の回転を扱ったが、今度は空間のときである。空間においても、(回転とは何か定義はまだしていないけれど)「回転」によって平行四辺形は合同な平行四辺形に移るべきであり、このことが回転が線型写像 (一次変換) であることを示している。これを表わす行列はどのように表わされるであろうか？ここでは、オイラーの方法を紹介する。

空間 $\mathbf{R}^3$ の基本単位ベクトル $e_1, e_2, e_3$ を、ひとつの回転 $f$ で回す。すると、像 $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ はやはり互いに直交する長さ $1$ のベクトルとなる。$e_3$ 軸 ($z$ 軸) を中心とする正の向きの $\theta$ ラジアンの回転を $Z_\theta$ と書こう。$Z_\theta^{-1} = Z_{-\theta}$ である。この回転角を適当にとれば

$$Z_\theta^{-1} f(e_3)$$

が $x - z$ 平面内にあるようにできる。これは $y$ 軸中心の $\phi$ ラジアンの正回転 $Y_\phi$ を用いて、

$$Y_\phi^{-1} Z_\theta^{-1} f(e_3) = e_3$$

とできるであろう。このとき

$$Y_\phi^{-1}Z_\theta^{-1}f(e_1),\ \ Y_\phi^{-1}Z_\theta^{-1}f(e_2)$$

は、$e_3$ と直交するから $x-y$ 平面内にあり、かつこれら同士で互いに直交する。これらは $e_3$ 軸 ($z$ 軸) を中心とする正の向きの $\psi$ ラジアンの回転で

$$Z_\psi^{-1}Y_\phi^{-1}Z_\theta^{-1}f(e_1)=e_1,\ \ Z_\psi^{-1}Y_\phi^{-1}Z_\theta^{-1}f(e_2)=e_2$$

とできるであろう。そしてこのとき $Z_\psi^{-1}e_3=e_3$, よって

$$Z_\psi^{-1}Y_\phi^{-1}Z_\theta^{-1}f(e_3)=e_3$$

である。つまり $i=1,2,3$ いずれについても $Z_\psi^{-1}Y_\phi^{-1}Z_\theta^{-1}f(e_i)=e_i$, 従って

$$f(e_i)=Z_\theta Y_\phi Z_\psi e_i.$$

これは、全てのベクトル $x$ に対して

$$f(x)=Z_\theta Y_\phi Z_\psi x \tag{54}$$

であることを意味する。結局、空間の任意の回転は、3 つの連続パラメータ $\theta,\phi,\psi$ で表されることがわかった。

$z$ 軸中心の回転を表わす行列 $Z_\theta$ を求めよう。

$$Z_\theta(e_1)=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix},\ Z_\theta(e_2)=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{bmatrix},\ Z_\theta(e_3)=e_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

である。よって、$Z_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ である。

同様に $Y_\phi=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$ がわかる。結局 $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=xe_1+ye_2+ze_3$ に対して、

$$f(\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

これが回転を表わす行列である。パラメータの組 $(\theta,\phi,\psi)$ を回転 $f$ のオイラー角とよぶ。

**問 16** オイラー角 $(\theta,\phi,\psi)$ にはこのパラメータには重複がある。$Z_\theta Y_\phi Z_\psi, Z_{\theta'}Y_{\phi'}Z_{\psi'}$ *(54)* がいつ同じ回転を表わすかを調べよ。

**問 17** *(*オイラー角と緯度・経度の関係*)* $Z_\theta Y_\phi Z_\psi e_3$ *(54)* は球面上のどの位置にあるか、図示せよ.

問 18 内積と長さの関係。ベクトル $x$ の (原点からの) 長さは、ピタゴラスの定理によって

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

で与えられる。内積と長さとが、平面のときと同じ関係にあるとすると、3 成分ベクトル $x, y$ の内積は長さを通じて

$$(x, y) := \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right) \tag{55}$$

で定めるべきであろう。すると

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

である：これを確かめよ。

**REMARK 2** (内積と角度の関係) 平面の場合、内積と角度の間には

$$(x, y) = |x||y| \cos\theta \tag{56}$$

という関係があった。ここで $\theta$ は $x, y$ の間の角度である。空間においても、(55) で定義される内積について (56) が成り立つ。なぜなら、(55) の右辺は長さのみで書けているが、長さは回転不変だから、左辺の内積もまた回転不変である。そこで問題の $x, y$ について、これらをある回転 $f$ によって $e_1, e_2$ がなす平面にもっていって考える。今述べたことより

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \tag{57}$$

である。$f(x), f(y)$ については、平面ベクトルであるので

$$(f(x), f(y)) = |f(x)||f(y)| \cos\theta' \tag{58}$$

である。ここで $\theta'$ は $f(x), f(y)$ がなす角度であるが、これは $x, y$ のなす角度 $\theta$ に等しい。よって $|f(x)| = |x|, |f(y)| = |y|$ とあわせて、(56) が成り立つことになる。

問 19 一般に内積を変えない一次変換 (線型写像)、つまり (57) をみたす $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を、(直交性を保つので) 直交変換という。直交変換を表わす行列を (実) 直交行列という。

1. $f$ を直交変換、$f$ を表わす行列を $T$ とする: $f(x) = Tx$.

   $$\text{条件 } (57) \iff {}^txy = {}^tx{}^tTTy$$

   を示せ。ただし、${}^tT$ は $T$ の転置行列である。
2. $T$ が直交行列であることと、${}^tTT = E$ が同値であることを示せ。従って、直交行列 $T$ の逆は単に転置行列 ${}^tT$ である。

問 20 一般に、空間が $\mathbf{R}^n$ においても、長さを変えない線型変換で「裏返さない」もののことを回転と呼ぶ。$\mathbf{R}^n$ の回転を表わすためには $\frac{n(n-1)}{2}$ 個のパラメータが必要であるが、このことをオイラー角と同じ方法で考えてみよ。

問 21 原点を通る平面 $ax + by + cz = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ とする) についての折り返しが線型写像であることを確認し、これを表わす行列 $A$ を求めてみよ。

(平面のときと同様、平面に関する折り返しを引き続いて行うとそれはどのような変換といえるか? 考えてみよ。)

問 22 直交行列はかならず回転または回転と (ある平面に関する) 裏返しの合成であることを示すことができる。考えてみよ。

# 7　はきだし法と逆行列

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \cdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

は消去法によって解くことができるが、掃きだし法はそれを行列の変形として整理したものである。

上の方程式において、行列 $[a_{i,j}]$ をこの方程式の係数行列という。

## 7.1　行の基本変形、列の基本変形

まず、次の 3 種の正方行列 $C_{i,j}$, $D_i(\lambda)$, $E_{i,j}(\lambda)$ を覚えておこう。

1. 置換行列. $i \neq j$ とする.

$$C_{i,j} := E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{k \neq i,j} E_{k,k} = \begin{bmatrix} \ddots & & (i\text{ 列}) & & & (j\text{ 列}) & \\ & 1 & \vdots & & & \vdots & \\ (i\text{ 行}) & \cdots & 0 & \cdots & & 1 & \\ & & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ & & & & 1 & & \\ (j\text{ 行}) & \cdots & 1 & \cdots & & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

とおく。単位行列と比べると、$(i,i),(j,j)$ 成分が 0 である代わりに $(i,j),(j,i)$ 成分が 1 としたものである.

2. $i$ 番目に $\lambda$、他は 1 が並んだ対角行列. ここで $\lambda \neq 0$ とする.

$$D_i(\lambda) := diag(1,\cdots,1,\lambda,1,\cdots,1) = \begin{bmatrix} \ddots & & (i\text{ 列}) & & \\ & 1 & \vdots & & \\ & & \lambda & \cdots & (i\text{ 行}) \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

3. 単位行列から一つの成分だけが異なる三角行列.

$$E_{i,j}(\lambda) := E + \lambda E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & (j\text{ 列}) & \\ & \ddots & \lambda & (i\text{ 行}) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

問 **23** 上の *3* 種の行列が逆行列をもつこと、より直接には

$$C_{i,j}C_{j,i} = E, \quad D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = E, \quad E_{i,j}(\lambda)E_{i,j}(-\lambda) = E$$

であることを確かめよ. 但し第 *2* 式においては $\lambda \neq 0$ とする.

これらを行列 $A$ に左から掛けるとどうなるか、$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ (3 行 3 列) の場合にやってみる。

1. まず
$$C_{1,2}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}. \tag{59}$$
同様に、

問 **24** $C_{i,j}$ を左から掛けると $A$ の第 $i$ 行と第 $j$ 行の入れ換えがおこる。これを確かめよ。

2. 次に $D_i(\lambda)$ について。$i = 2$ でやると
$$D_2(\lambda)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}. \tag{60}$$
つまり、第 2 行が $\lambda$ 倍された。$D_i(\lambda)$ では、第 $i$ 行が $\lambda$ 倍される。
3. 最後に $E_{i,j}(\lambda)$ であるが、たとえば
$$E_{1,2}(\lambda)A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 & c_1 + \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \tag{61}$$
$$E_{3,1}(\lambda)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda a_1 & b_3 + \lambda b_1 & c_3 + \lambda c_1 \end{bmatrix}. \tag{62}$$
同様に $E_{i,j}(\lambda)$ を左から掛けると、第 $i$ 行に第 $j$ 行の $\lambda$ 倍を加えることになる.

$A$ に $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を左から掛けた時の変化は, $A$ が正方でなくとも同じである。 つまり、(左から行列 $B$ を書けることを、$B$ の右に・を打って $B\cdot$ と表わせば)

1. $C_{i,j}\cdot$ は第 $i$ 行と第 $j$ 行の入れ換えを、
2. $D_i(\lambda)\cdot$ は第 $i$ 行の $\lambda$ 倍を、
3. $E_{i,j}(\lambda)\cdot$ は第 $i$ 行に第 $j$ 行の $\lambda$ 倍を加えることを、

それぞれ表わす. 以上の変形の繰り返しを、行の基本変形と呼ぶ. つまり、行の基本変形とは左から $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を繰り返し掛けて得られる変形である.

1 ~ 3 のうちで、一番大切なのは **3** の変形である。$E_{i,j}(\lambda)\cdot$ は、もとの一次方程式でいうと第 $i$ 式に第 $j$ 式の $\lambda$ 倍を加えることに対応する。$\lambda$ を適当に選んでこの操作をすることで, 第 $i$ 式 からひとつの未知数 (たとえば $x_j$) を消去できる. 詳しくはすぐ後で述べるが、この操作の繰り返しこそが一次方程式を解くときの消去法と言ってよい。

次に $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を右から掛けたときの $A$ への変化を見ると、

1. $\cdot C_{i,j}$ は第 $i$ 列と第 $j$ 列の入れ換えを、
2. $\cdot D_i(\lambda)$ は第 $i$ 列の $\lambda$ 倍を、
3. $\cdot E_{i,j}(\lambda)$ は第 $j$ 列に第 $i$ 列の $\lambda$ 倍を加えることを、

それぞれ表わすことがわかる。以上の変形の繰り返しを、列の基本変形と呼ぶ。

問 25 このことを確かめよ。

列の基本変形は、一次方程式でいえば何をしていることになるか考えてみる。$x$ に対する方程式 $Ax = y$ の係数行列を $A \xrightarrow{\cdot B} A' = AB$ と列変形したとき、新しい係数行列で書いた方程式は $A'(B^{-1}x) = y$ となる。つまり、未知ベクトル $x$ が $x' = B^{-1}x$ に変化する。結局列変形は変数の (一次式による) とりかえにあたっている。

例. 2 変数で, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ のとき.

$$C_{1,2}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

は変数の順序のとりかえである. また

$$E_{1,2}(\alpha)x = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

は, 第一の変数 $x_1$ を $x_1' = x_1 + \alpha x_2$ にとりかえる変換を表わす. □

先に触れたように、一次方程式を解くときの消去法は、係数行列でみれば行の基本変形の繰り返しと言ってよい。一次方程式を解くことは逆行列を求めることと同じ内容をもつのであるから、これは行の基本変形を使って正方行列の逆が求められることを意味する。

実際、$Ax = b$ の解を求めることは、係数行列が $E$ になるまで消去法すなわち行変形をすることに他ならない。行変形は左から可逆行列 $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\mu)$ を掛けることだったから、$E$ にいたるまで変形することは

$$A \overset{E_{i,j}(\lambda)\cdot}{\to} B \overset{E_{i',j'}(\lambda')\cdot}{\to} \cdots \overset{E_{i'',j''}(\lambda'')\cdot}{\to} E$$

と表せるであろう。(簡単のために $E_{i,j}(\lambda)$ たちだけで $E$ まで変形できたとして述べるが、途中で $D_i(\lambda)$ や $C_{i,j}$ を使ったとしても以下の原理は同じである。) つまり

$$E_{i'',j''}(\lambda'') \cdots E_{i',j'}(\lambda') \cdot E_{i,j}(\lambda) \cdot A = E$$

である。これは

$$E_{i'',j''}(\lambda'') \cdots E_{i',j'}(\lambda') \cdot E_{i,j}(\lambda)$$

が $A$ の逆行列であることを意味する。$A$ に何を掛けていったら $E$ になったかの過程を記録しておけば逆行列がわかることになる。そのためには

$$[A|E]$$

と、同じサイズの単位行列 $E$ を横にならべておいて、$A$ に対して行った行変形をこの $E$ に対しても同時に行っていけばよい。

$$[A|E] \overset{E_{i,j}(\lambda)\cdot}{\to} [B|E_{i,j}(\lambda)] \overset{E_{i',j'}(\lambda')\cdot}{\to} \cdots \overset{E_{i'',j''}(\lambda'')\cdot}{\to} [E|E_{i'',j''}(\lambda'') \cdots E_{i',j'}(\lambda') \cdot E_{i,j}(\lambda)]$$

であるから、$A$ が単位行列になった段階で隣の行列は求める逆行列になっている。

注意. 行の基本変形を主に使うのは、連立方程式を $Ax = y$ と列ベクトルの等式の形に書くことによる。逆行列を求めるだけなら、$A$ と単位行列 $E$ を横でなくタテに $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$ とならべ、列の基本変形によっても良い:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \overset{\cdot E_{k,l}(\mu)}{\to} \begin{bmatrix} A \\ E_{k,l}(\mu) \end{bmatrix} \overset{\cdot E_{k',l'}(\mu')}{\to} \cdots \overset{\cdot E_{i'',j''}(\mu'')}{\to} \begin{bmatrix} E \\ E_{k,l}(\mu) \cdot E_{k',l'}(\mu') \cdot E_{i'',j''}(\mu'') \end{bmatrix}.$$

## 7.2 例 (逆行列を掃きだしで求めること)

1. 次の行列の逆を求める: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. はじめに左下を 0 に「掃き出し」、次に右上を 0 にし、最後に対角線を 1 にそろえる、という方針で行の基本変形を行おう。

$$[A|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{倍} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(第 2 行に第 1 行の $1/2$ 倍を足し
第 3 行に第 1 行の $1/2$ 倍を足す.
第 1 行はそのまま.)

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{倍} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3/2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

(第 3 行に第 2 行の 2 倍を足す.
第 2 行はそのまま.)

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{倍} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3/2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

(第 2 行から第 3 行を引く.
第 3 行はそのまま.)

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{倍} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3/2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

(第 1 行に第 2 行の 2 倍を足す.
第 2 行はそのまま.)

$$\to \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \text{倍} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & -1 & -1/2 \end{array}\right]$$

(第 1 行を $1/2$ 倍、
第 2 行を 1 倍、
第 3 行を $-1/2$ 倍する.)

従って $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3/4 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$ □

2. 今の例では $C_{i,j}$ は使わずに済んでいるが、たとえば $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ について同じ方針で変形しようとすると必要になる。

$$[B|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{倍} \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ (第 2 行に第 1 行の $1/2$ 倍を足し第 3 行に第 1 行の $1/2$ 倍を足す. 第 1 行はそのまま.)

$$\to \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{倍} \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ (第 2 行と第 3 行を入れ換えた)

$$\to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{倍} \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ (第 2 行に第 3 行を足す)

$$\to \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{倍} \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ (第 1 行から第 2 行を引く)

$$\to \left[\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \text{倍} \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/2 & 0 \end{array}\right] = (E|B^{-1}).$$

**問 26**

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

に対して逆行列を求める。各段階で、左から何を掛けて行変形しているかを確認せよ。

$$[A|E] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -2 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -2 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -2 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 1/4 & 1/2 & 5/8 & 3/4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 0 & 1/6 & 1/3 & 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/2 & 5/8 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 0 & 1/6 & 1/3 & 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 3/5 & 1/2 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right] = [E|A^{-1}].$$

**問 27** 次の行列の逆行列を *(*あれば*)* 求めよ。

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{array}\right]$$

## 7.3 はきだし法による連立一次方程式の解法 (係数行列が可逆正方行列のとき)

連立一次方程式 $Ax = y$ に左から正方行列 $B$ をかければ、もちろん $BAx = By$ である。$A$ が可逆とすれば、逆行列は適当な行の基本変形 (のくりかえし) として得られる。この行変形を

表わす行列 (の積) を $B(=A^{-1})$ とすると、さっき $E$ を書いた場所に $y$ を書いておけば

$$(A|y) \xrightarrow{B} (BA|By) = (E|A^{-1}y).$$

つまり、$(A|y)$ の左側を行変形で単位行列にもっていくとき、$y$ も同時に行変形することで解 $x = A^{-1}y$ が得られる。

なお、「右辺が $0$」の一次方程式 $Ax = 0$ を斉次型、そうでない $Ax = y$ を非斉次型とよぶ。非斉次型の方程式に対して、上の考えに従い $A$ と $y$ を並べて作った行列 $(A|y)$ を、方程式 $Ax = y$ の拡大係数行列という。

例. 次の連立一次方程式を解く: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第 1 行の 2 倍,3 倍を 2,3 行から引く}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 3 行から引く}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行の}-1\text{ 倍,}3/4\text{ 倍を第 2 行に足す}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行の }1/2\text{ 倍を第 1 行に足す}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2,3 行を}-1/4\text{ 倍する}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

よって解は、$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

問 28 次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

## 7.4　行列の階数

一般に (正方と限らぬ)、$m$ 行 $n$ 列の $A$ を考えよう。この場合、$A$ は左右からの基本変形 $P$, $Q$ (それぞれ $m$ 次、$n$ 次の正方行列) によって次の形にできる。

$$PAQ = R = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ & O & & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{63}$$

これは対角線にそって $1$ が何個か並び、残りは全て $0$ という行列のつもりである。

変形の方針

1. $A$ の $(1,1)$ 成分が $0$ でなければ次へ進み、$0$ であれば $C_{1,j}$ を左または右から掛けて $0$ でない成分が $(1,1)$ に来るようにする。もしこうできなければ、それはもともと $A = O$ ということである。
2. $(1,1)$ 成分を用いて下と右に「掃き出す」ことにより、$A$ は

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

の形になる。$D_1(a_{1,1}^{-1})$ を左あるいは右から掛ければ、$a_{1,1}$ の部分は $1$ にできる。
3. 次に、この $A'$ を $A$ と考えて初めのステップと同じことをする。すると

$$P_2P_1AQ_1Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & \vdots & & A'' \end{bmatrix}$$

の形になる。
4. これを繰り返して、右下の $A', A'', \cdots$ の部分にもはや $0$ しかなくなれば、それが求める形である。 □

**定義 4** $A$ を上の形に変形する $P$ や $Q$ はいろいろあっても、並んだ $1$ の個数 $r$ は変形の仕方によらず定まる *(次章)*。この $r$ を行列 $A$ の階数またはランクと呼び、$\mathrm{rank}A$ で表わす。

$A$ が階数 $r$ のとき、その転置行列 ${}^tA$ もまた階数 $r$ である。$A \to PAQ = R$ のとき ${}^tA \to {}^tQ{}^tA{}^tP = {}^t R$ であり、$R$ と ${}^tR$ は同じ階数をもつからである。

例 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の階数を求める。まず

$$A \overset{C_{13}\cdot}{\to} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{E_{31}(-3/2)\cdot}{\to} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \overset{E_{32}(9/2)\cdot}{\to} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 14 \end{bmatrix},$$

ここまでは行変形のみを用いた。ついで列変形を用いて、

$$\overset{\cdot E_{21}(-3/2)E_{41}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 14 \end{bmatrix} \overset{\cdot E_{32}(-2)E_{42}(-3)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\overset{\cdot E_{43}(-14/9)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \overset{\cdot D_1(1/2)D_3(1/9)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって、$\mathrm{rank}A = 3$ である。

問 **29** 次の行列を上のように変形し、その階数を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = {}^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

問 **30** 行の基本変形のみを用い、列の基本変形は用いないことにする。この場合、前問の $A$ は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形できることを確かめよ。また、$B$ についてはどうか。

一般にも、行の基本変形のみを用いた場合、$A$ (やはり $m$ 行 $n$ 列とする) は、$m$ 次正方行列 $P$ によって次の形にまで変形できる。

$$A \rightarrow PA = \begin{bmatrix} 1 & O & 0 * \cdots * & 0 & & 0 & * \cdots * & & \\ & \ddots & 0 * \cdots * & \vdots & O & 0 & & & \\ & & 1 * \cdots * & 0 & & \vdots & \vdots & & \\ & & & 1 & & & & * & \\ & & & & \ddots & 0 & & & \\ & O & & & & 1 & * \cdots * & & \\ & & & & & & & \ddots & \end{bmatrix} \tag{64}$$

左上から右下にかけて $1$ が並び、「時々たいらになりながら」$1$ とも $0$ とも限らない数 $(*)$ が並んでいる。これらの数の左下の成分はすべて $0$ だが、右上については斜めにならぶ $1$ の上方しか一般には $0$ にできない。「斜めにならぶ $1$」は、最終的に $r = \mathrm{rank}A$ 個だけ現われる。言い換えれば、これは $e_1, \cdots, e_r$ の間に、ときどき $e_1, \cdots, e_r$ までで書けるベクトルが混じっている行列である。

変形の方針は前と同様で、まず行変形で対角線の左下に $0$ を作ることを基本に考える。これはある成分 $(\neq 0)$ の下側に掃きだすことで可能である。一方列の基本変形が使えないため、ある成分の右側に掃きだすということができない。しかたないので、右上方向を掃きだす作業はある成分 $(\neq 0)$ の上側に掃きだすことで代用する: これは行変形であり使ってよい。

今第 $i$ 列までは対角線以外を $0$ にできたが、次の第 $(i+1, i+1)$ 成分は $0$ であったとする。しかも、この成分の下方がすべて $0$ であり、下の行との入れ換えによってはこの成分を $0$ でな

くすることができないとする[11] 。これはすでに $i+1$ 列についても上の形になっていることを意味している。そこで単に次の列に進むことにして、次の列でも下方に $0$ しかなければ、また次の列に進むことになる。これが、$1$ の横に「たいらに」* が並ぶ理由である。

## 7.5 連立一次方程式の解のパターン (一般の係数行列のとき)

係数行列 $A$ が $m$ 行 $n$ 列 (正方と限らない) であり、$n$ 成分ベクトル $x$ を未知ベクトルとする方程式

$$Ax = y \tag{65}$$

を考える。前節のように $A$ を変形 $(63)$ するとき、$P, Q$ は共に逆行列をもつことに注意して

$$Rx' = y' \ \ (R = PAQ, x' = Qx, y' = P^{-1}y) \tag{66}$$

と変形しよう。$R$ の形から、これは

$$\begin{aligned} x'_1 &= y'_1 \\ &\vdots \\ x'_r &= y'_r \\ 0 &= y'_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= y'_m \end{aligned}$$

ということであり、解を持つかどうかのパターンは次のようにまとめられる。

**定理 6** 方程式 *(65)* は、$y'_{r+1} = \cdots = y'_n = 0$ のときのみ解 $x'$ を持ち、$x'_1 = y'_1, \cdots, x'_r = y'_r$ である。解 $x'$ においては、$x'_{r+1}, \cdots, x'_m$ は *(*何でも良いので、この分だけ*)* 決まらない。ここで $x' = Qx, y' = P^{-1}y$ である。

つまり、方程式 $(65)$ の解はあるとすれば $m - r$ 変数だけある: $m$ は未知数の個数、$r$ は独立な条件の個数であり、定理は

$$\text{「解は (未知数の数) } - \text{ (条件式の数) だけある」} \tag{67}$$

という経験則を表したものである。

例.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第 1 行の 8 倍,9 倍を 2,3 行から引く}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{array}\right]$$

[11] 上の行との入れかえを考えてもよさそうだが、そうすると折角 $0$ ばかりが並んでいる左側がそうでなくなってしまう。下の行と入れ換える限りでは、すでに $0$ ばかりになっているからこの悩みは生じない。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第 2 行の } 8/9 \text{ 倍を 3 行に足す}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行の } 2/9 \text{ 倍を 1 行に足す}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第 2 行を} -1/9 \text{ 倍する}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

これより、$x = -2, y = 3, z = 0$ はひとつの解である。他に解 $x', y', z'$ があったとすれば

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \\ 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{array}\right] = 0$$

である. $x - x', y - y', z - z'$ を改めて $x', y', z'$ とし, 上と同じ変形をして

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right] = 0$$

更に列変形により右上を掃き出すことは、変数をとりかえて

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x' - z' \\ y' + 2z' \\ z' \end{array}\right] = 0$$

とすることに他ならない。これより, $(x', y', z') = (z', -2z', z')$ ($z'$ は任意). 従って一般の解は

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -2 + z' \\ 3 - 2z' \\ z' \end{array}\right]$$

で与えられる。 □

係数行列が逆をもたないときは、定理に述べられている通りいつも解があるとは限らない.

例. 次の連立一次方程式はどんな $a, b, c$ に対して解をもつか。

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right] \tag{68}$$

定理の形に変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\text{第 1 行の 4 倍,7 倍を 2,3 行から引く}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & -4a + b \\ 0 & -6 & -12 & -7a + c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行の 2 倍を 3 行から引く}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & -4a + b \\ 0 & 0 & 0 & a - 2b + c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行の } 2/3 \text{ 倍を 1 行に足す}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5a/3+2b/3 \\ 0 & -3 & -6 & -4a+b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を} -1/3 \text{ 倍する}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & (-5a+2b)/3 \\ 0 & 1 & 2 & (4a-b)/3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right]$$

つまり

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (-5a+2b)/3 \\ (4a-b)/3 \\ a-2b+c \end{array}\right]$$

と変形できた。列変形により右上を掃き出すと、

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x-y \\ y+2z \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (-5a+2b)/3 \\ (4a-b)/3 \\ a-2b+c \end{array}\right]$$

よって $(68)$ は $a-2b+c=0$ のときに解をもち、それは

$$z: \text{任意},\ y=\frac{4a-b}{3}-2z,\ x=\frac{-5a+2b}{3}+\frac{4a-b}{3}-2z=\frac{-a+b}{3}-2z$$

で与えられる。

**問 31** 次の $x, y, z, w$ に対する方程式の解がいつどれだけ存在するかを調べよ。

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right]$$

# 8　部分空間、次元、像および核

階数の理論的背景として、ここでベクトル空間の次元について述べよう。

## 8.1　部分ベクトル空間とその次元

### 8.1.1　次元とは何か、どう定義すべきか?

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 $W$ は、 $W$ の元のタシザンと $a$ 倍 $(a \in \mathbf{R})$ がまた $W$ の元であるとき、$\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間、あるいは単に部分空間と呼ばれる。つまり $W$ が $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間であるとは

$$w, w' \in W \; a \in \mathbf{R} \Longrightarrow w + w' \in W, aw \in W$$

という 2 条件を満たすことである。

例えば「空間」$\mathbf{R}^3$ の中の、原点を通る直線、原点を通る平面は、[12] すべて部分ベクトル空間である。実際、たとえばこの平面上のベクトルは何倍かしても、またふたつ足しあわせても、再びもとの平面に含まれる。また $\mathbf{R}^n$ 自身も $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間である。

さて $n > 3$ のときは、$V = \mathbf{R}^n$ は我々が視覚で直観できる「空間」とは「大きさ」が異なっており、一つの点 $x$ を指定するのに $n$ 個のパラメータ $x_1, \cdots, x_n$ を必要とする。日常のことば遣いをすれば、このようなとき $V$ は $n$ 次元であると呼びたくなる。たとえば平面は 2 次元、空間は $3$ 次元と呼ぶべきであろう。この $2$ とか $3$ は, その集合における一点を指定する際に必要なパラメータ (座標) の数を表わしている。これは独立な方向がそれだけあるということでもある。

そこで、$V = \mathbf{R}^n$ に限らず部分空間 $W$ についても、次のように定義しよう。

定義 **5** $W$ において、ベクトルの組 $w_1, \cdots, w_d$ がとれて、任意の元 $w$ がこれらの和 *(1* 次結合*)* として

$$w = c_1 w_1 + \cdots + c_d w_d$$

と唯一通りに書けるとする。このとき $W$ は $d$ 次元であるといい、$\dim W = d$ と書く。また、ベクトルの組 $w_1, \cdots, w_d$ を $W$ の基底という。 □

ここで、ただ一通りというのは

$$w = c_1 w_1 + \cdots + c_d w_d = c'_1 w_1 + \cdots + c'_d w_d \quad \text{とすれば、実は} \quad c_1 = c'_1, \cdots, c_d = c'_d$$

という意味である。

これは大事な点である。たとえば平面上に $w_1 = e_1, w_2 = e_2$ 以外に $w_3 = e_1 + e_2$ を考えて、わざわざこの $3$ つのベクトルを使って

$$xe_1 + ye_2 = (2x - y)e_1 + (-x + 2y)e_2 + (x + y)w_3$$

と見ても、だれも平面を表すのに $3$ つのパラメータが要る ( $3$ つの独立な方向がある) とは考えない。この場合、左辺を $xe_1 + ye_2 + 0w_3$ とみれば、「一通り」の条件はくずれている。これ

[12] 定義より、部分ベクトル空間はその中の元の $0$ 倍として原点を必ず含まなくてはならない。原点を含まない直線や平面は、これと平行で原点を含むような直線あるいは平面 $W$ を、あるベクトル $v$ だけ平行移動した集合 $v + W = \{v + w | w \in W\}$ と考えることができる。このように部分ベクトル空間 $W$ を平行移動した集合 $v + W$ のことは、部分アフィン空間と呼ぶことになっている。(affine とは「もどき」という意味らしい。)

はそもそもの $w_3 = e_1 + e_2$ からきている。いいかえれば $w_3$ は「不要な方向」であり、$e_1, e_2$ ですでに「独立な方向」は尽きているといえよう。

定義における $w_1, \cdots, w_d$ は $W$ における「独立な方向のひとそろえ」であり、それをひとことで「基底」とよぶ、というわけである。

例 **1.** 実数直線 $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$、平面 $\mathbf{R}^2$、空間 $\mathbf{R}^3$ にはひとつの基底として、それぞれ $\{e_1\}$、$\{e_1, e_2\}$、$\{e_1, e_2, e_3\}$ がとれる。よって、上の定義の意味においてそれぞれは 1 次元, 2 次元, 3 次元である。

例 **2.** $\mathbf{R}^3$ において通常の $(x, y, z)$ 座標を考え、$z = 0$ で定義される平面 $W$ を考える。これは

$$W = \left\{ \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] \middle| z = 0 \right\}$$

と書け、$\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間である (確かめよ)。$W$ の一組の基底として、あきらかに $e_1, e_2$ がとれる。従って $\dim W = 2$ である。

問 **32** 次の $W$ の一組の基底を与え、それぞれ何次元か答えよ。

*1.* $W = \left\{ \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] \middle| x + y + z = 0 \right\}$ *2.* $W = \left\{ \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] \middle| z = 2y = 3x \right\}$

### 8.1.2 定義の反省 (定義がうまくいっていること : well-definedness)

ところで、上の定義 5 は実は形式的に不完全なところがある。目ザトイ人なら次のようなイチャモンをつけてくるであろう。

「独立な方向のとりかたは、3 次元だって回転したりすればいろいろあるし、一通りではないだろう。つまり基底にはいろんな取り方がある。$W$ の他の基底 $w'_1, \cdots, w'_{d'}$ をみつけたとして、そのとき個数 $d'$ が $d$ と違うようなことはないのか??

つまり他のベクトルの組 $w'_1, \cdots, w'_{d'}$ があって、やはり任意の元を

$$w = k'_1 w'_1 + \cdots + k'_{d'} w'_{d'}$$

と表わせて、しかも $d \neq d'$ なんてことは起きないか?」

もしこんなことがあれば、次元が一通りにきまらないことになって大変である (こういう場合を「定義になっていない」とか「ill-defined である」などという)。幸い

命題 **1** そんなことはない:常に $d = d'$ である。

証明 次のように考えればよい。$W$ の任意の元が $\{w_i\}$ でも $\{w'_i\}$ でも書けるというのだが、それなら

$$w_i \text{を} \{w'_j\} \text{で、} \quad w_i = a_{i1} w'_1 + \cdots + a_{id'} w'_{d'} = \sum_{j=1}^{d'} a_{ij} w'_j \text{と、}$$

また

$$w'_j \text{を} \{w_i\} \text{で、} \quad w'_j = b_{j1} w_1 + \cdots + b_{jd} w_d = \sum_{k=1}^{d} b_{jk} w'_k \text{と、}$$

書けるはずである。これを組みあわせれば、

$$w_i = \sum_{j=1}^{d'} a_{ij} w'_j = \sum_{j=1}^{d'} a_{ij} \sum_{k=1}^{d} b_{jk} w_k = \sum_{j=1}^{d'} \sum_{k=1}^{d} a_{ij} b_{jk} w_k, \tag{69}$$

ところが

$$w_i = 0w_1 + \cdots + 1w_i + \cdots + 0w_d \tag{70}$$

であり、仮定より $w_i$ を $\{w_1, \cdots, w_d\}$ で書く方法はただ一通りであるから、$(69), (70)$ における $w_k$ の係数を比較して

$$\sum_{j=1}^{d'} a_{ij} b_{jk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{array} \right\} = \delta_{i,k} \tag{71}$$

でなくてはならない。同様に

$$w'_j = \sum_{k=1}^{d} b_{jk} w_k = \sum_{k=1}^{d} b_{jk} \sum_{l=1}^{d'} a_{kl} w'_l = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d'} b_{jk} a_{kl} w'_l$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{d} b_{jk} a_{kl} = \delta_{j,l}. \tag{72}$$

$(71), (72)$ は、行列

$$A := [a_{i,j}]_{i=1,\cdots,d, j=1,\cdots,d'}, \quad B := [b_{j,i}]_{j=1,\cdots,d', i=1,\cdots,d}$$

を考えれば

$$AB = E_d, \quad BA = E_{d'}$$

と書ける。ここで $A$ は $d$ 行 $d'$ 列、$B$ は $d'$ 行 $d$ 列であり、$E_d$, $E_{d'}$ はそれぞれ $d$ 次, $d'$ 次の単位行列である。

ここまで準備したところで、 $d \neq d'$ として矛盾が出ることを示そう。$d > d'$ として考える。すると $B$ は横長の行列であり、掃き出し法により $(63)$ の形に変形できる:

$$B \to PBQ = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & & O \\ & \ddots & \\ & 0 & \\ O & & \ddots \end{array} \right] \tag{73}$$

ここで $d > d'$ であるから、最後の列は必ず $0$ ばかりになる。従って

$$PBQe_d = 0.$$

$P$ は行変形をあらわす行列であり可逆だから、$BQe_d = 0$ であり、よって

$$AB(Qe_d) = 0.$$

ところが $AB = E$ だから $Qe_d = 0$. $Q$ も $P$ と同様可逆だから、結局 $e_d = 0$ となるがこれは矛盾である。

$d < d'$ としても $A, B$ の役割をいれかえて同様に矛盾が出るから、結局 $d = d'$. (証明終)□

かくして、次元がきちんと定義できることがわかった!

### 8.1.3　独立な方向の最大数としての次元

さて、$w_1, \cdots, w_d$ が $W$ の基底であれば、あきらかに

$$c_1 w_1 + \cdots + c_d w_d = 0 \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_d = 0 \tag{74}$$

である。あるいは対偶をとって

$$c_1, \cdots, c_d\text{のどれかが } 0 \text{ でない} \Longrightarrow c_1 w_1 + \cdots + c_d w_d \neq 0 \tag{75}$$

である。これらは、$w_1, \cdots, w_d$ が「独立な方向をもつ」ことの数学的表現である。

実際、独立である、または独立でないとはどういうことか ? を考えてみると、たとえば 2 つの平面ベクトルが原点を通る一直線上にあるとき、あるいは 3 つの空間ベクトル $u, v, w$ が (原点を通る) 同一平面上にあるときなどが独立でない例と言うべきだろう。後者の場合 $w$ が $u$ と $v$ とで $w = au + bv$ と書けてしまう。これは $v$ が $u, w$ で書けるなどと言っても良いが、

$$u, v, w \quad \text{は} \quad au + bv + cw = 0 \quad \text{をみたす} \tag{76}$$

と書き変えることで ($c = -1$) 3 つのベクトルの役割が同じになる。( 2 つのベクトルが一直線上にあるときも、同様に $au + bv = 0$ と書ける。) 今は $c = -1$ だけれども、(76) において $a, b, c$ のどれかが 0 でなければ、たとえば $a \neq 0$ なら

$$u = -\frac{1}{a}(bv + cw)$$

と変形でき、$u$ が $v$ と $w$ で書ける。ところが (76) において $a = b = c = 0$ であったとすると、もはや $u, v, w$ のどれかを他の 2 つのベクトルで表わすということはできない。これが (74), (75) を「独立性の表現」といった意味である。そこで

**定義 6** ベクトルの組 $\{w_1, \cdots, w_d\}$ が、同値な条件 *(74), (75)* を満たすとき、これらは一次独立であるという。そうでないときを一次従属であるという。 □

今迄「独立な方向の組」というような言い方をしていたところが, これで数学的に安心な形になった。わざわざ「一次」をつけるのは、(74), (75) が一次式で書かれる条件だからと思うとよい。

**問 33** つぎのベクトルの組は何個までが一次独立か。独立であるような最大個数の組を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**問 34** $A = [a_1, \cdots, a_n]$ を正方行列とするとき、その列ベクトルの組 $a_1, \cdots, a_n$ が一次独立であることと、$A$ が逆行列をもつことが同値であることを示せ。

**問 35** $A = [a_1, \cdots, a_n]$ を正方とは限らない行列とし、${}^tA = B = [b_1, \cdots, b_m]$ と書く。

$\{a_1, \cdots, a_n\}$ および $\{b_1, \cdots, b_m\}$ のうちからそれぞれ、一次独立なベクトルをなるべく個数が多くなるように選ぶ。このときその最大個数が互いに等しいことを示せ。

$W$ が基底 $\{w_1, \cdots, w_d\}$ を持つとき、はじめに言ったこと (74) はこれら $\{w_1, \cdots, w_d\}$ が一次独立である、と述べられる。しかし一次独立ならば基底かというとそうはいかない。たとえばただ一つの $0$ でないベクトル $w$ はあきらかに一次独立であるが、これで $cw$ と書ける点は、$w$ の方向の直線上の点だけである。同様に $w_1, w_2$ で書ける

$$c_1 w_2 + c_2 w_2$$

という点は、このふたつのベクトルが成す (張る) 平面の点のみである。しかし一次独立な $W$ の元を最大個数そろえれば、それは $W$ の基底になるであろう。

これは実際簡単に示すことができる。$\{w_1, \cdots, w_k\}$ は $W$ の一次独立な元からなり、これにどんな元 $w$ を一つつけくわえてももはや $\{w_1, \cdots, w_k, w\}$ は一次独立ではないとする。すると

$$c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k + cw = 0 \tag{77}$$

という "従属関係式" があって、$c_1, \cdots, c_k, c$ のすべては $0$ でない。ここで $c = 0$ なら、

$$c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k = 0$$

となるが $c_1, \cdots, c_k$ のどれかが $0$ でないので $\{w_1, \cdots, w_k\}$ の独立性に反する。よって $c \neq 0$. したがって (77) より、$w$ は $\{w_1, \cdots, w_k\}$ で

$$w = -\frac{1}{c}(c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k)$$

と表わせる。またこのような表し方が他にもあったとして

$$w = -\frac{1}{c}(c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k) = c_1' w_1 + \cdots + c_k' w_k$$

とすれば、引き算して

$$(c_1' - \frac{c_1}{c}) w_1 + \cdots + (c_k' - \frac{c_k}{c}) w_k = 0.$$

よって $\{w_1, \cdots, w_k\}$ の一次独立性より

$$c_1' - \frac{c_1}{c} = \cdots = c_k' - \frac{c_k}{c} = 0.$$

つまり、表し方は一つしかない。以上のことを定理の形にまとめておこう。

**定理 7** $\{w_1, \cdots, w_k\}$ は $W$ の一次独立な元の組で、これにどんな $W$ の元をくわえても一次独立でなくなるとする。このとき $\{w_1, \cdots, w_k\}$ は $W$ の基底であり、$k = \mathrm{dim} W$ である。

定理の内容は国語辞典的には「次元とは独立な方向の最大数である」と言えるもので、日常の感覚との一致を示している。

### 8.1.4 可逆変換で次元が変らないこと

$A$ を $n$ 行 $n$ 列の可逆行列とする。このとき $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間 $W$ を $A$ で変換した

$$A(W) := \{Aw | w \in W\}$$

を考える。これもまた $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間であることは見易い。逆行列があるので

$$w = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k \Longleftrightarrow Aw = c_1 A w_1 + \cdots + c_k A w_k$$

であるから、一方の書きかたが一通りなら他方でもそうである。よって $w_1, \cdots, w_k$ が $W$ の基底ならば、$Aw_1, \cdots, Aw_k$ が $A(W)$ の基底となる。特に、基底の個数 (=次元) を比べれば

**命題 2** $A$ が逆行列をもてば、$\mathrm{dim}W = \mathrm{dim}A(W)$

がわかる。これは例えば、 $\mathbf{R}^3$ の平面 ($2$ 次元部分空間) を回転したものがやはり平面であることに対応している。

**問 36** $W$ は $\mathbf{R}^3$ の $2$ 次元部分空間とする。このとき、すべては $0$ でない実数 $a, b, c$ があって

$$W = \{{}^t[x, y, z] | ax + by + cz = 0\}$$

と書けることを示せ。*(*ヒント*:* $W$ が 2 次元ということは、$2$ 個の元からなる基底 $v, w$ があって $W = \{\alpha v + \beta w | \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$ ということである。*)*

## 8.2 線型写像の像と核

**定義 7** 行列 $A$ を $m$ 行 $n$ 列とし、$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ という線型写像を考える。

$$\mathrm{Im}A := \{Ax | x \in \mathbf{R}^n\} \subset \mathbf{R}^m$$

$$\mathrm{Ker}A := \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\} \subset \mathbf{R}^n$$

と書く。これらは $A$ があれば直ちに考えられる部分空間であり、それぞれ $A$ の像 *(*像空間、*image)*、$A$ の核 *(*核空間、*kernel)* と呼ばれる。

**問 37** これらが確かにタシザンとスカラー倍で閉じており、それぞれ $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間であることを確かめよ。

$A = [a_1, \cdots, a_n]$ ($m$ 行 $n$ 列) とすれば、$A$ による線型写像 $A : \mathbf{R}^n \ni c \to Ac \in \mathbf{R}^m$ の像は

$$W = \{Ac | c \in \mathbf{R}^n\} = \{c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n | c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{R}\}$$

である。これは、ベクトル $a_1, \cdots, a_n$ が張る空間とも呼ばれる。

一方核のほうは、方程式 $Ax = b$ に解があったとして、それがどれくらいあるかを表わす。実際 $x, x'$ がこの方程式を満たせば、

$$A(x - x') = b - b = 0 \qquad \therefore x - x' \in \mathrm{Ker}A$$

であるから、たとえば $\mathrm{Ker}A = \{0\}$ であれば自動的に $x = x'$. つまり解は一つしかありえない.

一方 $\mathrm{Ker}A \neq \{0\}$ のときを考えよう。この場合 $w_1, \cdots, w_k$ を $\mathrm{Ker}A \neq \{0\}$ の基底とすれば, 二つの解 $x, x'$ の差は上に述べたことより

$$x' - x = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k$$

と書ける。これは、一つの解 $x$ がわかれば、他の解は

$$x' = x + c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k$$

と書けてしまうことを意味する。(あるいはひとつの解から $k$ 個のパラメータ $c_1, \cdots, c_k$ の分だけの解が新たに得られると言っても良い。) したがって、解全体は

$$\{x + c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k | c_1, \cdots, c_k \in \mathbf{R}\} = x + \mathrm{Ker}A \tag{78}$$

で与えられ、これは「核 $\mathrm{Ker}A$ を特解 $x$ だけ平行移動したアフィン部分空間」と呼ぶことができる。

核の次元

$$k = \dim(\mathrm{Ker}A)$$

は $Ax = b$ に解があったとして、それがどれくらい (何次元) あるかを表わす数となる。これを $A$ の nullity と呼び、$\mathrm{null}A$ と書くことがある。

ここで $k = 0$ (解が一つしかないとき) の場合も含めるためには、$0$ ベクトルだけからなる「零部分空間」$\mathbf{0} = \{0\}$ の次元を $0$ と約束しておけば良い: $\dim\mathbf{0} = 0$.

定理 8 (次元定理) $A$ を $m$ 行 $n$ 列とするとき

$$\mathrm{rank}A = \dim(\mathrm{Im}A), \tag{79}$$

$$\mathrm{null}A = n - \mathrm{rank}A. \tag{80}$$

絵解き

証明　命題 2 で示したように、可逆行列による変換で対応する部分空間の次元は等しい。そして基本変形は可逆行列である。$A \to PAQ = R$ を (63) の変形とすれば、(66) の如く

$$Ax = y \overset{x'=Qx, y'=P^{-1}y}{\Longleftrightarrow} Rx' = y' \tag{81}$$

である。よって像について

$$\mathrm{Im}A = \{Ax | x \in \mathbf{R}^n\} = \{Py' | y' = Rx'\} = P(\mathrm{Im}R)$$

であるが、$\mathrm{Im}R$ は明かに $r = \mathrm{rank}A$ 次元である。$P$ は可逆であるから $\mathrm{Im}A$ も同じく $r$ 次元となる。

核については

$$\mathrm{Ker}A = \{x | Ax = 0\} = \{Q^{-1}x' | Rx' = 0\} = Q^{-1}(\mathrm{Ker}R)$$

が成りたつ。$Q$ は可逆ゆえ $\mathrm{dimKer}R = \mathrm{dimKer}A$ であり、定理 6 から $\mathrm{dimKer}R = n - r = n - \mathrm{rank}A$ である。これで証明がおわった。 □

証明からわかるように、後半の主張 (80) は (67) を述べなおしたものと考えることができる。

一方 (79) は、行列の階数が像空間の次元という幾何学的な意味を持つ量であることを示している。階数を「基本変形で残る 1 の個数」と定義した段階では、それが基本変形の仕方によらず決まることは明らかではなかったが、像の次元と言うことによりこれも保証される。像の次元は基本変形によらずに意味を持つからである。

この関係は逆に、像の次元を求めるために使うこともできる。つまり、行列 $A$ を勝手に与えたとき、その像の次元は $A$ を基本変形して階数を求めれば良いとわかったわけである。$A$ による像とは、$A$ の列ベクトルの張る部分空間のことであるから、これは列ベクトルの組 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ のうちから一次独立なものの最大個数を求めることについての解決も与えている。つまり、行列 $A = [a_1, \cdots, a_k]$ を基本変形して階数を求めれば良い。

実際には、$A = [a_1, \cdots, a_k]$ を行変形して

$$A = [a_1, \cdots, a_k] \xrightarrow{P:} [Pa_1, \cdots, Pa_k] = (64\text{の形}) \tag{82}$$

とすれば、$Pa_1, \cdots, Pa_k$ には $r = \mathrm{rank}A$ 個の基本ベクトル $e_1, \cdots, e_r$ が現われ、その他は $e_1, \cdots, e_r$ で書けてしまうのであった。

このとき、基本ベクトル $e_1, \cdots, e_r$ 達に変形された列の $a_i$ たちが、求める「独立な最大個数の組」である。これらの $a_i$ たちは $P^{-1}e_1, \cdots, P^{-1}e_r$ と書けるから一次独立であるし (可逆な変換で一次独立性はかわらない)、また $A$ のこの他の列ベクトルは $(64)$ の行列の $e_1, \cdots, e_r$ 以外を $P^{-1}$ で戻したものとして、$P^{-1}e_1, \cdots, P^{-1}e_r$ の和で書けてしまうからである。

例. 行変形によって

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形できる (問 30)。行変形の結果、第 1 列が $e_1$、第 2 列が $e_2$ に変形され、のこりはこれらで書けている。よってもともとの $A$ でも、第 1 列と第 2 列が独立のほかは、第 3 列も第 4 列もこれらの和で書けてしまう。従って $\mathrm{Im}A$ の基底としては、$a_1, a_2$ をとればよい。

いいかえれば、$A$ の列ベクトルから独立なものを最大個えらびたければ、$a_1, a_2$ がその答え (のひとつ) である。

もはや蛇足になるが、列の基本変形を使ってしまうとどの列がもともと独立であったか明らかではなくなるので注意しよう。

問 **38**　*1.* 次の行列の列ベクトルが張る $\mathbf{R}^3$ の部分空間は、それぞれ何次元か。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

また列ベクトルのうちで一次独立な組を、個数が最大になるように選べ。

*2.* 前問の $A$ が定める線型写像 $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ $(f(x) = Ax, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix})$ の像と核を求めよ。

また、$B$ についてはどうか。

問 **39** 次の同値を示せ。

非斉次型方程式 $Ax = b$ が解を持つ $\iff$ $b \in \mathrm{Im}A$ $\iff$ $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[A|b]$.

問 **40** 一般に

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B$$

であることを示せ。*(*ヒント*:* それぞれの階数を、$A, B, AB$ による像の次元として考える。*)*

## 8.3　複素ベクトル空間の次元

以上では数の範囲を実数にとってきたが、複素数の場合も全く同様である。$\mathbf{R}$ の文字をすべて $\mathbf{C}$ におきかえれば、複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間の次元が定義できる。ここで $W \subset \mathbf{C}^n$ が部分ベクトル空間であるとは

$$w, w' \in W,\ a \in \mathbf{C} \Longrightarrow w + w' \in W, aw \in W$$

を満すときをいう。つまり $a$ 倍するのも複素数まで拡げるのである。これを実数に限って考えることもできるが、そのときは「 $W$ を実ベクトル空間と見なす」と断わり書きをつけ、$W_{\mathbf{R}}$ などと表わす。

先と同様、$W$ が (複素) $d$ 次元であるとは、ある $w_1, \cdots, w_d$ によって $W$ の任意の元 $w$ がただ一通りに $w = c_1 w_1 + \cdots + c_d w_d$ と表わせるときをいう。ここでもちろん各 $c_j$ は複素数である。

「次元 = 一点を指定するのに必要なパラメータの数」というわけであるが、複素数は実数ふたつから成るから、パラメータを実数だけに限ればちょうど倍の数だけ必要になる。より詳しくいえば、$w_1, \cdots, w_d$ が $W$ の基底とすれば、$w_1, \sqrt{-1}w_1, \cdots, w_d, \sqrt{-1}w_d$ の $2d$ 個が $W_{\mathbf{R}}$ の基底となる。

$W_{\mathbf{R}}$ の次元 (実次元) を $\dim_{\mathbf{R}} W_{\mathbf{R}}$ と書き、もとの通り複素ベクトル空間として考えた次元 (複素次元) を $\dim_{\mathbf{C}} W$ と書けば、このことは

$$\dim_{\mathbf{R}} W_{\mathbf{R}} = 2\dim_{\mathbf{C}} W (= 2d)$$

と書ける。

## 8.4　一般のベクトル空間とその次元

いままで (タテ) ベクトルからなるベクトル空間 (数ベクトル空間) を扱ってきたが、より一般にはタシザンとスカラー倍が定義された集合ならなんでもベクトル空間と呼ぶ。数の範囲も一般の体 (四則演算の備わった集合) $\mathbf{F}$ としてその定義を述べよう。

定義 8 集合 $V$ が体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間であるとは、「加法」 $+$ と「スカラー倍」$c\cdot\ (c \in \mathbf{F})$ とよばれる二つの演算があって、次を満たすことを言う。

1. 加法について: ある特別な元 $0$ とともに

$$v + w = w + v, \quad u + (v + w) = (u + v) + w, \quad 0 + v = v + 0 = v$$

が成立ち, 任意の $v$ について $-v$ と書く元があって $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

2. スカラー倍について: $c \in \mathbf{F}$ と $v \in V$ に対して $cv \in V$ がきまり、次をみたす。

$$1v = v, \quad a(bv) = (ab)v.$$

3. 相互の関係:次の分配法則が成り立つ。

$$(a + b)v = av + bv, \quad a(v + w) = av + aw.$$

□

たとえば、1 変数多項式の全体 (係数は実数または複素数とする)

$$Pol = \{f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k | k = 0, 1, \cdots\}$$

は (それぞれ実数体上または複素数体上の) ベクトル空間である。実際 (必要なら次数の低い多項式に $0x^{k'+1}, \cdots$ を補って)

$$\begin{aligned} & a(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k) + b(c'_0 + c'_1x + c'_2x^2 + \cdots + c'_kx^k) \\ := \quad & (ac_0 + bc'_0) + (ac_1 + bc'_1)x + \cdots + (ac_k + bc'_k)x^k \end{aligned}$$

で加法とスカラー倍が定義される。

同様に、数列 $\{c_0, c_1, \cdots\}$ の全体も

$$a\{c_0, c_1, \cdots\} + b\{c'_0, c'_1, \cdots\} := \{ac_0 + bc'_0, ac_1 + bc'_1, \cdots\}$$

によりベクトル空間となる。

これら一般のベクトル空間 $V$ においても、ベクトルの一次独立性が全く同じように考えられる:定義 6 を流用すればよい。そして、次元 $\dim_{\mathbf{F}} V$ も「一次独立な元の最大個数」あるいは「任意の $V$ の元を一通りに表示するために必要な元の数」として同様に定義できる。

上の例 $V = Pol$ については、単項式 $1, x, x^2, \cdots, x^k$ は $k$ が何個でも一次独立な集合になる。しかし、 $k$ が有限である限り、すべての $Pol$ の元すなわち 1 変数多項式を表すことはできない。このようなとき、 $V$ は無限次元であるという。

$Pol$ が無限次元なのに対して、次数がたかだか $n$ の多項式の全体

$$Pol_n = \{f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n\}$$

は有限次元であり、その次元は $n + 1$ である。ひとつの基底として $1, x, x^2, \cdots, x^n$ がとれるからである。

重要なベクトル空間として、$n$ 階の線型常微分方程式 (斉次型)

$$Du := \frac{d^n}{dx^n}u(x) + c_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x) + \cdots + c_n(x)u(x) = 0 \tag{83}$$

の解全体 (解空間) $Sol(D)$ がある。ここで、$c_1(x), \ldots, c_n(x)$ は連続関数とする。$Sol(D)$ がベクトル空間になることは、いわゆる重ね合せの原理

$$u(x), v(x) \text{ が解} \quad \Longrightarrow au(x) + bv(x) \text{ も解}$$

に他ならない ($a, b$ は定数)。これは $u$ に方程式 (83) の左辺を対応させる写像 $D : u \mapsto Du$ が線型写像であることが本質といえる。このことより、$Sol(D) = \mathrm{Ker}D$ と書いてもよいだろう。

証明はここではできないが、次の事実が基本的である。

**定理 9** $Sol(D)$ は有限次元であり、その次元は $n$ である。つまり、「独立な解」$u_1(x), \cdots, u_n(x)$ がとれて、すべての解は $a_1u_1(x) + \cdots + a_nu_n(x)$ ($a_i$ は定数) と書けてしまう。

「独立な解」 $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ とは解空間の基底に他ならないが、これはまた基本解系とも呼ばれることが多い。一つの解 (解空間の「一点」) を指定するパラメータとして、たとえばある「時刻」 $x_0$ における「初期値」$u(x_0), u'(x_0), \cdots, u^{(n-1)}(x_0)$ をとることができる。また、非斉次型の方程式

$$Du = f$$

($f = f(x)$ は与えられた関数) については、一つの解 (特解) $u$ が見つかれば解全体は

$$u + \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in Sol(D)$$

で尽くされる。連立一次方程式 $Ax = b$ の解全体が一つの特解 $x$ により $x + \mathrm{Ker}A$ と書けたのと同様、解全体は

$$u + Sol(D)$$

と書ける。これは $Sol(D)$ を特解 $u$ の方向に (関数全体という無限次元空間の中で) 平行移動したものと見ることができる。

この定理については、たとえば
寺澤寛一「自然科学者のための数学概論」(岩波書店)
吉田耕作「微分方程式の解法」(岩波全書)
ハイラー、ワナー著 (蟹江訳)「解析教程」上下 (シュプリンガー・フェアラーク東京)
などを見よ。また、次の差分方程式の場合の類似問題で感じをつかむこと。

問 **41** 次の差分方程式の解の全体がベクトル空間を成すことを示し、その基底を一つ与えよ。つまり、任意の解が $\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\}$ と書けるような一組の解 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を求めよ。

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$$

問 **42** 一般に、定数係数 ($c_1, \cdots, c_n$ が $k$ によらない) の $n$ 階差分方程式 ($n$ 項漸化式)

$$a_{k+n} + c_1 a_{k+n-1} + c_2 a_{k+n-2} + \cdots + c_n a_k = 0 \tag{84}$$

について、解の全体 (解空間)

$$Sol := \{(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots, )|(84) \text{ をみたす}\}$$

はベクトル空間を成し、その次元は $n$ であることを示せ。

この他、たとえば有限体上のベクトル空間はデジタル通信における符号化の基礎の一つであり、コンパクトディスクや携帯電話、宇宙からの映像送信などさまざまに使われている。次元が $8$ の倍数次元においては、とくに優れた符号が存在する。これは、実ベクトル空間における球面のつめこみの問題 (どんな規則で球を並べると一番密度が高くなるかの可能性を極める問題. やはり $8$ の倍数次元で極めて密度の高いつめこみがあり、とくに $24$ 次元において著しい) と関係した現象であり、宇宙の次元が $10$ あるいは $26$ なのではないかという超弦理論における憶測とも関わる。

これらについては
鈴木道夫「有限単純群」(紀伊国屋書店)
水野弘文「情報数理の基礎」(培風館)
などを見よ。

# 9　行列式 (1)：3 ×　3 のとき

## 9.1　連立方程式を強引に解いてみると

行列式は、2 行 2 列のときには連立方程式の解に分母として現われた。3 行 3 列の行列式も、歴史的には 3 元の連立方程式を解くことから同様にして登場した (ライプニッツ、関孝和)。次の連立方程式

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{85}$$

を考える。$x, y, z$ が未知数である。これはすなわち

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= u \\ a_2x + b_2y + c_2z &= v \\ a_3x + b_3y + c_3z &= w \end{cases} \tag{86}$$

ということである。第 1 式の $-a_2/a_1$ 倍、$-a_3/a_1$ 倍を第 2,3 式に加え、これらの $x$ の項を消去する (「掃き出す」)。

$$\begin{cases} a_1x + & b_1y & + & c_1z & = & u \\ & (b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1)y & + & (c_2 - \frac{a_2}{a_1}c_1)z & = & v - \frac{a_2}{a_1}u \\ & (b_3 - \frac{a_3}{a_1}b_1)y & + & (c_3 - \frac{a_3}{a_1}c_1)z & = & w - \frac{a_3}{a_1}u \end{cases} \tag{87}$$

新しい第 2 式と第 3 式から $y$ を消去すれば

$$\begin{aligned} z &= \frac{\begin{vmatrix} b_2 - (a_2/a_1)b_1 & v - (a_2/a_1)u \\ b_3 - (a_3/a_1)b_1 & w - (a_3/a_1)u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 - (a_2/a_1)b_1 & c_2 - (a_2/a_1)c_1 \\ b_3 - (a_3/a_1)b_1 & c_3 - (a_3/a_1)c_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1v - a_2u \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_1w - a_3u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ a_1b_3 - a_3b_1 & a_1c_3 - a_3c_1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{a_1^2b_2w - a_1b_2a_3u - a_2b_1a_1w - a_1^2vb_3 + a_1va_3b_1 + a_2ua_1b_3}{a_1^2b_2c_3 - a_1b_2a_3c_1 - a_2b_1a_1c_3 - a_1^2c_2b_3 + a_1c_2a_3b_1 + a_2c_1a_1b_3} \\ &= \frac{a_1b_2w - b_2a_3u - a_2b_1w - a_1vb_3 + va_3b_1 + a_2ub_3}{a_1b_2c_3 - b_2a_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_1c_2b_3 + c_2a_3b_1 + a_2c_1b_3}. \end{aligned}$$

を得る。この分母のことを 3 次の行列式と呼ぶのである：

**定義 9**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2$$

を、*3* 次の行列式と呼ぶ。2 次のときと同じく、$|A|$ とも $\det A$ とも書く。

ここで覚えやすいように項を並べかえている。はじめの 3 項の添字は (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) と「ぐるぐる回した」順列であり[13]、これらのはじめ 2 文字を入れ換えたのがマイナスのついた残り 3 項になる。計 6 項は、1,2,3 の順列全てについての足し算になっている。3 次に限ってであるが、これを次のように絵で覚える方法もある (サラスの方法)。

[13] これらは,「(1,2,3) の巡回置換」とよばれる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

実線は $+$ 符号、破線は $-$ 符号をつける。

また、$a_i$ についての一次式とみてまとめることで、次のようにも書ける。

問 **43**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

この ($a_i$ についての) 展開はラプラス展開とよばれ、$a_1, a_2, a_3$ のどれかが $0$ のとき便利である。ここでは $a_i$ について展開したが、$b_i$ や $c_i$ でももちろん同様に展開できる。

問 **44** 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

方程式 $(86)$ に戻ろう。上で求めた解 $z$ の分子は $c_1, c_2, c_3$ を $u, v, w$ でおきかえただけなので、行列式の記号を用いると

$$z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u \\ a_2 & b_2 & v \\ a_3 & b_3 & w \end{vmatrix} \tag{88}$$

である。また、$u, v, w$ の項にわけて (ラプラス展開を用いて) 書けば次のようにも書ける.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} w.}{|A|} \tag{89}$$

問 **45** $x, y$ についても同様に計算し、次のようになることを確かめよ。

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} u & b_1 & c_1 \\ v & b_2 & c_2 \\ w & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} w}{|A|}, \tag{90}$$

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_1 & u & c_1 \\ a_2 & v & c_2 \\ a_3 & w & c_3 \end{vmatrix} = \frac{-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} v - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} w}{|A|}. \tag{91}$$

特に、$x, y$ についても解の分母に現われる多項式は $z$ のときと同じである。

(90), (91), (88) を、3 元連立一次方程式に対するクラメルの公式とよぶ。

連立一次方程式の解の公式ができたことは、逆行列の公式が得られたことを意味する。実際 (90), (91), (89) を並べて書けば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} w \\ - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} v - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} w \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} w \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} {}^t\Delta \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{92}$$

ただし

$${}^t\Delta := \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}. \tag{93}$$

よって、

**定理 10** *3* 次正方行列 $A = [a, b, c]$ についても

$$A \text{ が逆行列をもつ} \iff |A| \neq 0$$

が成り立つ。このとき、逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\Delta \tag{94}$$

*(93)* で与えられる。

${}^t\Delta$ の転置行列 $\Delta = {}^t({}^t\Delta)$ を、3 次正方行列 $A$ の余因子行列とよぶ。

**問 46** *(94)* は確かに逆行列を与えることを計算で確かめよ。

**問 47** *3* 次正方行列を適当に選び、その逆を掃き出し法と公式との二通りにより求めよ。

**問 48** 次を確かめよ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

## 9.2 体積との関係

$A$ が 2 行 2 列のとき、その行列式 $|A|$ は $A$ による一次変換 $x \mapsto Ax$ の面積比を表わしていた。3 行 3 列のときにはどうだろうか。

$$A = [a, b, c] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

とする。$a, b, c$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積 $V$ を、平面のときと同様に「底面積× 高さ」の方針で求めてみよう。面積のときのように、体積も「等積変形」できる。これは例えば

$$a, b, c \to a + kc, b + lc, c$$

によって体積は不変であるということである。

$$k = -\frac{a_3}{c_3}\ ,\quad l = -\frac{b_3}{c_3} \tag{95}$$

とすれば、$a + kc, b + lc$ の第 3 成分は 0 となり、この 2 つのベクトルは $x - y$ 平面内にある。こうして、$c_3$ を高さと考えることができるようになり、求める体積は

$$\begin{aligned}
V &= (a + kc, b + lc) \text{ が作る平行四辺形の面積× 高さ} \\
&= \left| \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 + lc_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 + lc_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 \right| \quad (\text{外側の縦棒は絶対値}) \\
&= |\{(a_1 + kc_1)(b_2 + lc_2) - (b_1 + lc_1)(a_2 + kc_2)\} \cdot c_3| \\
&= |\{(a_1b_2 + kc_1b_2 + a_1lc_2) - (b_1a_2 + lc_1a_2 + b_1kc_2)\} \cdot c_3| \\
&\overset{(95)}{=} |\{(a_1b_2c_3 - a_3c_1b_2c_3 - b_3a_1c_2) - (b_1a_2c_3 - b_3c_1a_2 - a_3b_1c_2)\}| \\
&= |\det[a, b, c]|\ .
\end{aligned}$$

かくして空間の場合も

**定理 11** *$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ とする。行列式の絶対値 $|\det[a, b, c]|$ は、3 つのベクトル $a, b, c$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積を表わす。*

言い換えれば、行列式 $|\det[a, b, c]|$ は、行列 $[a, b, c]$ が定める一次変換の体積比を表わす。

$A$ が回転や (ある平面に関する) 折り返しを表わすとき, これらは体積を変えないから $|\det A| = 1$ でなくてはならない. 回転の場合は, さらに向きを変えないという条件を満たしている. これは 2 次元のときと同様に $\det A = 1$ と表わされる. これに対し, 折り返しについては $\det A = -1$ である (付録参照).

**問 49** *3 次の行列式を使うと, 3 行 3 列の行列 $A$ についても固有値や固有ベクトルを考えることができる. とくに, $\lambda$ が固有ベクトルであるためには $\det(A - \lambda E) = 0$ でなくてはならない.*

空間の回転 $A$ は, 必ずある方向を不変にすることを示せ. つまり, 回転 $A$ はその方向を軸としている.

この問からも, 空間の回転を表わすために 3 つのパラメータが必要であることがわかる: 軸の方向を表わすために 2 つ, その回りの回転角を表わすために一つ.

体積という解釈によると、2 次のときのように乗法性も成り立つであろうと予想される。これを確かめるため少し準備をしよう。

## 9.3 3 次行列式の性質

1. 線型性。問 43 を見ると、行列式は文字 $a_1, a_2, a_3$ について一次式である。このことから、$a' \in \mathbf{C}^3, k \in \mathbf{C}$ について

$$|a + a', b, c| = |a, b, c|,\quad |ka, b, c| = |ka, b, c| \tag{96}$$

が成り立つ。$b, c$ についても全く同様である。

2. 交代性。一般に、入れ換えで不変なとき「対称(的)」というが、入れ換えによって不変でなくとも違いが符号のみのとき、「交代(的)」であるという。行列式は、次の交代性をもつ。

$$\begin{aligned} & |a,b,c| = |b,c,a| = |c,a,b| \\ = \quad & -|b,a,c| = -|c,b,a| = -|a,c,b| \end{aligned} \tag{97}$$

3. 規格化。(normalization)

$$|e_1,e_2,e_3| = 1 \tag{98}$$

実は、行列式はこの 3 つの性質で決まってしまうのである。

**定理 12** *3* つの *3* 成分ベクトル $a,b,c$ に対して決まる数 $D(a,b,c)$ が、線型性 *(96)*・交代性 *(97)*・規格化 *(98)* の *3* 条件を満たせば、$D$ は行列式と一致する：

$$D(a,b,c) = |a,b,c|.$$

証明線型性より、$D(a,b,c)$ は

$$D(a_1e_1+a_2e_3+a_3e_3,b,c) = a_1D(e_1,b,c)+a_2D(e_2,b,c)+a_3D(e_3,b,c) = \sum_{i=1,\cdots,n} a_iD(e_i,b,c)$$

と展開できる。$b,c$ についても同様にすれば

$$D(a,b,c) = \sum_{i,j,k=1,\cdots,3} a_ib_jc_kD(e_i,e_j,e_k).$$

つまり $D(a,b,c)$ は $D(e_i,e_j,e_k)$ $(i,j,k=1,\cdots,3)$ が全てわかれば決ってしまう。

交代性より、$D(e_i,b_j,c_k)$ は $i,j,k$ に重複があれば (たとえば $D(e_1,e_1,e_3)$ は) $0$ である。重複がなければ、$i,j,k$ を入れ換えればかならず$\pm D(e_1,e_2,e_3)$ であり、$D(e_1,e_2,e_3)$ できまってしまう。たとえば、$D(e_1,e_3,e_2) = -D(e_1,e_2,e_3)$. よって

$$\begin{aligned} D(a,b,c) \quad &= \quad \sum_{i,j,k=1,\cdots,3} a_ib_jc_kD(e_i,e_j,e_k) \\ &= \quad a_1b_2c_3D(e_1,e_2,e_3)+a_1b_3c_2D(e_1,e_3,e_2)+a_2b_1c_3D(e_2,e_1,e_3) \qquad (99) \\ &\quad\ +a_2b_3c_1D(e_2,e_3,e_1)+a_3b_1c_2D(e_3,e_1,e_2)+a_3b_2c_1D(e_3,e_2,e_1) \\ &= \quad a_1b_2c_3D(e_1,e_2,e_3)-a_1b_3c_2D(e_1,e_2,e_3)-a_2b_1c_3D(e_1,e_2,e_3) \qquad (100) \\ &\quad\ +a_2b_3c_1D(e_1,e_2,e_3)+a_3b_1c_2D(e_1,e_2,e_3)-a_3b_2c_1D(e_1,e_2,e_3). \end{aligned}$$

故に

$$D(a,b,c) = D(e_1,e_2,e_3)\{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\} = D(e_1,e_2,e_3)\cdot|a,b,c|. \tag{101}$$

最後に規格化の条件を使うと $D(e_1,e_2,e_3) = 1$. 結局、$D(a,b,c) = |a,b,c|$. (証明終) □

これより

**定理 13** *3* 次の行列式についての乗法性。

$$\det AB = \det A\cdot\det B \tag{102}$$

実際、行列の積が $AB=[Aa,Ab,Ac]$ と書けることに注意しよう。$B=[a,b,c]$ として、上の議論を

$$D(a,b,c)=|Aa,Ab,Ac|$$

について使ってみる。$D(a,b,c)$ が線型性、交代性をみたすことは明らか。規格化の条件のみが行列式とは異なり

$$D(e_1,e_2,e_3)=|Ae_1,Ae_2,Ae_3|=|A|$$

である。よって $(101)$ より、

$$D(a,b,c)=D(e_1,e_2,e_3)\cdot|a,b,c|=|A|\cdot|B|. \tag{103}$$

これは示すべき式に他ならない！ □

問 **50** 乗法性は、もちろん行列式の定義式からも確かめられるはずのことである。素手でやるのは大変であるが、やってみよ：上の証明のカシコサがわかるであろう！

# 10　行列式 (2)：一般のとき

## 10.1　定義

3 次のときの経験から、次のように定義してもそれほど唐突ではないだろう。

定義 **10** $n$ 次の正方行列 $A=[A_1,\cdots,A_n]$ に対し、その行列式 $\det A=|A|=|A_1,\cdots,A_n|$ とは次を満たすような唯一のものである。

*1.* 線型性. $|A_1,\cdots,A_n|$ は、各列ベクトル $A_k$ $(k=1,\cdots,n)$ について線型である。すなわち

$$\begin{cases} |A_1,\cdots,cA_k,\cdots,A_n| &= c|A_1,\cdots,A_k,\cdots,A_n| \\ |A_1,\cdots,A_k+A_k',\cdots,A_n| &= |A_1,\cdots,A_k,\cdots,A_n|+|A_1,\cdots,A_k',\cdots,A_n|. \end{cases} \tag{104}$$

*2.* 交代性. $|A_1,\cdots,A_n|$ において、第 $i$ 列と第 $i+1$ 列を取りかえると

$$|A_1,\cdots,A_i,A_{i+1}\cdots,A_n|=-|A_{\sigma_1},\cdots,A_{i+1},A_i\cdots,A_n|. \tag{105}$$

*3.* 規格化

$$|e_1,\cdots,e_n|=1. \tag{106}$$

□

交代性は, 次のようにも言える: $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ を $1,\cdots,n$ の順列とするとき

$$|A_{\sigma_1},\cdots,A_{\sigma_n}|=\mathrm{sgn}\sigma|A_1,\cdots,A_n|.$$

ここで $\mathrm{sgn}\sigma=\pm1$ であり、次のような図で交点が偶数であるか奇数であるかに従って、$+1$ または $-1$ となる。

$\mathrm{sgn}\sigma = +1$ のとき　　$\mathrm{sgn}\sigma = -1$ のとき

符号 $\mathrm{sgn}\sigma$ のきまり方。交代性 $(105)$ により、一度入れ換えるごとに $-1$ 倍となる。

問 **51** つぎの順列 *(*置換ともいう*)* の符号を答えよ。

ア)　$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (3, 1, 2).$　　イ)　$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = (n, n-1, \cdots, 1).$

備考。集合 $\{1, \cdots, n\}$ から集合 $\{1, \cdots, n\}$ への $1$ 対 $1$ 写像を $n$ 文字の置換という。順列 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ があると、$1$ を $\sigma_1$ に、$2$ を $\sigma_2$ に、$\cdots$、$n$ を $\sigma_n$ に写すというルールで一つの写像が定まるが、これは $1$ 対 $1$ だから置換が定まったことになる。これにより順列と置換とは同じものと思ってよい。置換 (=順列) の表し方にはいくつかの流儀があり、ここで $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ と書いたものは $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$ と書かれることが多い。参考書を見るとき注意すること。

すると、前節で $3$ 次のときにやったのと全く同様にして

定理 **14**　$n$ 次正方行列 $A$ に対し、上の線型性・交代性・正規化の $3$ 条件を満たす式は唯一つしかなく、次のようになる。

$$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\sigma A_{1,\sigma_1} \cdots A_{n,\sigma_n} \tag{107}$$

ここで和はすべての置換 *(*順列*)* $\sigma$ を動き、$\mathrm{sgn}\sigma$ はその符号である。

これからわかることを 2 つ述べよう。どちらも計算に便利な結果である。

•特に $A$ の第 $n$ 行が、右下 $A_{n,n}$ を除いてすべて $0$ とする。すると$\sigma(n) = n$ の項だけが和に入ってくる (のこりは $0$)。よって ($n$ 次の行列式を $\det_n$ と書けば)

$$\det_n(A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n) = \det_{n-1}(A_1, \cdots, A_{n-1}) A_{n,n}. \tag{108}$$

右辺では $A_1, \cdots, A_{n-1}$ は最後の成分が $0$ ゆえ、これを無視して並べれた $n-1$ 次の正方行列の行列式を考えている。見易くまとめれば、

系 **1**

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,1} & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1,1} & & a_{1,n-1} \end{vmatrix} a_{n,n}.$$

•次に、 $(107)$ で $A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)}$ を $\sigma(1)\cdots\sigma(n)$ の小さい順にならべ直すと

$$\sigma(i)=j \text{ のとき } i=\sigma^{-1}(j)$$

$(\sigma^{-1}$ は逆写像$)$ であるから

$$\det A=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{\sigma^{-1}(1),1}\cdots A_{\sigma^{-1}(n),n} \tag{109}$$

となる。$\sigma$ が全ての順列を動けば $\sigma^{-1}$ もまた全ての順列を動き、そのとき

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$$

である: 実際どちらも組みひもの絵で書けば交点数 (の偶奇) が等しい。従って $\sigma^{-1}=\tau$ と置けば

$$\det A=\sum_{\tau}\mathrm{sgn}\tau A_{\tau(1),1}\cdots A_{\tau(n),n}=\det{}^tA \tag{110}$$

つまり、

系 **2** 転置行列の行列式はもとの行列式に等しい。従って列について成りたつことはすべて行についても成りたち、$\det A$ は行についても線型性、交代性をもつ。

特に、 2 つの行が等しい行列の行列式は $0$ となる。

例. 次の行列式を求める: $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. これは $3$ 次行列式であるからサラスの方法で求めて良いのだが、上でやったことを使ってみよう。第 $2$ 行が、$-2$ を除いて $0$ であることに注目して、これを右下にもっていき $1.$ を使うことを考える。$2.$ より行についても交代的であるので、第 $2$ 行と第 $3$ 行を入れ換えると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

次に第 $2$ 列と第 $3$ 列を入れ換えると

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

そこで $1.$ が使えて、結局

$$D= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

問 **52** 次の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

問 **53** $n$ 次の行列式が、乗法性

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

を持つことは、定義の *3* 性質から定理 *13* と全く同じに導くことができる。これを確かめよ。

これを示すには、満たすべき 3 性質を列挙しておくとそのようなものはただ一つしかないことが重要な働きをする。ただ一つしかないと保証されることによって、それが自動的に他の性質 (たとえば乗法性のような) も満たすことになる。

このように数学において何かを理解する上で「もつべき性質を列挙してその概念を (再) 構成・検討する」戦略はしばしば非常に役にたつ。この戦略を「公理化」(axiomatization) と呼んでも良いであろう。性質 (105), (104), (106) は行列式のみたすべき公理を述べたものである。

## 10.2 体積と行列式

体積との関係も、「公理」(105), (104), (106) に基いて示すことができる。そのためには、体積の方も満たすべき性質 (公理) を列挙しておくと都合が良い。

$\mathbf{R}^n$ の「平行体」の体積を考える。ここで平行体とは、$\mathbf{R}^n$ において与えられた $n$ 個のベクトル $v_1, \cdots, v_n$ を辺にもつ図形

$$P(v_1, \cdots, v_n) := \{v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathbf{R}^n | 0 \leq a_i \leq 1 (i = 1, \cdots, n)\}$$

のことである。この体積 $\mathrm{vol}_n(v_1, \cdots, v_n)$ は体積という以上次の性質をみたすであろう。

平行体の体積がみたすべき性質:

**0.** 辺の順序づけによらないこと　すべての置換 $\sigma$ に対して

$$\mathrm{vol}_n P(v_1, \cdots, v_n) = \mathrm{vol}_n P(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}).$$

**1.** 等積変形　すべての $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ に対して

$$\mathrm{vol}_n P(v_1 + a_1 v_n, \cdots, v_{n-1} + a_{n-1} v_n, v_n) = \mathrm{vol}_n P(v_1, \cdots, v_n).$$

**2.** 底面積× 高さの式　$v_1, \cdots, v_{n-1}$ の第 $n$ 成分が $0$ のとき、$h := |(v_n, e)|$ (内積) とすれば

$$\mathrm{vol}_n P(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n) = \mathrm{vol}_{n-1} P(v_1, \cdots, v_{n-1}) \cdot h.$$

**3.** 正規化の条件　$(a) \in \mathbf{R}^1$ に対して

$$\mathrm{vol}_1((a)) = |a|.$$

□

問 **54**　$n = 2$ のとき、

1. 「 等積変形 」の式、および「 底面積× 高さ 」の式を図解説明せよ。
2. $v_1 = {}^t(a, b), v_2 = {}^t(c, d)$ とする。次の計算において、変形の各段階で $0$~ $3$ のうちどの性質を用いているか述べよ。

$$\mathrm{vol}_2 \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \mathrm{vol}_2 \begin{bmatrix} a - \frac{bc}{d} & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = |a - \frac{bc}{d}||d| = |ad - bc|.$$

問 **55**　$n = 3$ のとき、

1. 「 等積変形 」の式、および「 底面積× 高さ 」の式を図解説明せよ。
2. $\mathrm{vol}_3 P(v_1, v_2, v_3) = |\det(v_1, v_2, v_3)|$ を示せ。
   *[Hint:* まず $v_1, v_2$ の第 $3$ 成分が $0$ となるように変形する。*]*

平行体の体積は、条件 $0)$-$3)$ により (つまり等積変形して「 底面積× 高さ 」にもちこむことで) 次々と小さな $n$ の場合から決ると考えられる。(条件 $0$) は、もとの $v_n$ の第 $n$ 成分が $0$ のとき、これを第 $n$ 成分が $0$ でない他のベクトルととりかえるための条件である。) そこで $(v_1, \cdots, v_n)$ に対して定義される関数がこれと全く同じ性質をもてば、それは自動的に体積と一致してしまうはずである。よって、$n$ 次行列式 $\det_n$ の絶対値が体積 $\mathrm{vol}_n$ を表すこと

$$\mathrm{vol}_n P(v_1, \cdots, v_n) = |\det_n(v_1, \cdots, v_n)|$$

を示すには、右辺がやはり性質 $0)$-$3)$ をみたすことさえ言えば良い！そして、

- $0)$ については、交代性 (負号が出る) の式で絶対値をとれば負号は出ず、明らか。
- $1)$ については、$v_1$ について示せば十分であるが ($\because$ $0$)、線型性によって

  $$\det_n(v_1 + a_1 v_n, v_2, \cdots, v_n) = \det_n(v_1, v_2, \cdots, v_n) + a_1 \det_n(v_n, v_2, \cdots, v_n)$$

  である。ところが交代性により、ふたつの列が一致する行列の行列式は $0$. つまり第 $2$ 項は $0$ であるので、条件 $1)$ が成り立つ。
- $2)$ については、行列式の公式から出る $(108)$ において絶対値をとったのが示すべき式に他ならない。
- 最後に $3)$ は、$1$ 行 $1$ 列 $[a]$ の行列式は何か? ということだが、$n = 1$ では交代性の条件は無意味であり、線型性より $[a] = [1]$ に対しての値できまり、そしてそれは規格化によって $1$ である。つまり $\det_1[a] = a$ であり、この絶対値は $|a|$ そのもの。

かくして、全ての条件が成立することがわかった。よって行列式の絶対値をとったものは、列ベクトルが作る平行体の体積に等しい！ (証明終)

以上により、行列式と体積との関係がはっきりしたとと思う。すなわち行列 $A$ の行列式 $\det A$ の絶対値は $A$ による体積変化を表す。いわば行列式は「向きつきの体積」である。

この見方によって、たとえば

$$n \text{ 次実正方行列 } [v_1, \cdots, v_n] \text{ が可逆} \Longleftrightarrow \det(v_1, \cdots, v_n) \neq 0$$

は、さらに

$$\Longleftrightarrow v_1, \cdots, v_n \text{ がつくる平行体がつぶれない} \Longleftrightarrow v_1, \cdots, v_n \text{ が独立な方向を向いている}$$

と読みかえられる。また多重積分の変数変換において行列式 (いわゆる「ヤコビ行列式」) が出てくることも、各点において変数変換の 1 次近似として生ずる行列が「体積要素」をどのように変えるかから現れるのだという自然な理解ができる。

問 **56** $e_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = {}^t(0, \cdots, 0, 1)$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとし、$A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ とする。$|\det A|$ が $e_1, \cdots, e_n$ の像 $Ae_1, \cdots, Ae_n$ の張る平行体の体積であることに注目して、与えられた $v \in \mathbf{R}^n$ に対し $u$ を求める方程式

$$Au = v$$

について、

*1.* $\det A \neq 0$ のとき、全ての $v$ に対して解 $u$ が一意に存在することを図解説明せよ。

*2.* $\det A = 0$ のとき、 $v$ によって解 $u$ があったりなかったりすること、および存在しても一意と限らぬことを説明せよ。

問 **57** $\mathrm{vol}_n P(v_1, \cdots, v_n) = \sqrt{\det[(v_i, v_j)]_{i,j=1}^n}$ を示せ。[14]

また、$\mathrm{vol}_n$ が直交行列 $T$ $(T^tT = E)$ で不変なこと: $\mathrm{vol}_n P(v_1, \cdots, v_n) = \mathrm{vol}_n P(Tv_1, \cdots, Tv_n)$ を示せ。

## 10.3 ラプラス展開と逆行列 (クラメルの公式)

すでに計算に使っている次の式から出発しよう。(系 1)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,1} & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1,1} & & a_{1,n-1} \end{vmatrix} a_{n,n}$$

これと、行および列に関する交代性 (系 2) とを組みあわせれば、第 $n$ 列以外でも

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,j-1} & a_{1,j} & a_{n,j+1} & & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{111}$$

[14] $v = (v_1, \cdots, v_n)$ と書けば、右辺のルートの中味の行列 (式) は ${}^t v \cdot v$ $(\det\ {}^t v \cdot v)$ と書ける。これは $v_i$ 達の間の内積表というべきもので、グラム行列 (式) という名前がついている。

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} (-1)^{n-i} \tag{112}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} \end{vmatrix} (-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \tag{113}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \tag{114}$$

そこで、ここに出てきた「もとの $A$ の第 $i$ 行、第 $j$ 列をとりさり、符号をつけた式」を

$$\Delta_{i,j} := (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{115}$$

とおき、$A$ の $(i,j)$ -余因子とよぶ。

もともと第 $i$ 行に $0$ が多くなくても、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{i,n} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{1,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Delta_{i,j} a_{i,j} \end{aligned} \tag{116}$$

である。これを第 $i$ 行に関するラプラス展開という。

問 58 ラプラス展開を用い、次の行列式を求めよ。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$$

さて、(114) では $i$ は固定され、 $j$ についての和である。$\Delta_{i,j}$ と $a_{i',j}(i' \neq i)$ とでやるとどうなるだろう? やってみると、

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{i,j} a_{i',j} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i',j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{1,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i',j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{1,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i',1} & \cdots & a_{i',j-1} & a_{i',j} & a_{i',j+1} & \cdots & a_{i',n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{1,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

これは同じ行を含むので、交代性より $0$ である。よって

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{i,j} a_{i',j} = \delta_{i,i'} |A|. \tag{117}$$

これは、余因子を並べた行列がほとんど逆行列だという式である!すなわち、

**定理 15** (逆行列の公式) $|A| \neq 0$ のとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\Delta.$$

逆行列を求めるのは連立方程式を解くことと同じであるから、これより

**系 3** (クラメルの公式) 正方行列 $A = [a_1, \cdots, a_n]$ を係数とする連立一次方程式 $Ax = y$ の解は、$|A| \neq 0$ のとき次で与えられる。

$$y_1 = \frac{|x, a_2, \cdots, a_n|}{|A|}, \cdots, y_n = \frac{|a_1, \cdots, a_{n-1}, x|}{|A|}$$

もわかる。

**問 59** クラメルの公式をたしかめよ。

**問 60** クラメルの公式を用いて次の方程式を解け。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

逆行列の公式 (クラメルの公式) は、通常は計算量が多く用いないが、行列の対称性が美しい場合に有用な他、理論上重要である。また、近年活発に研究されている「ソリトン」とよばれる非線型方程式の厳密解を記述するためにも重要な役割を演じている. 参考文献:

広田良吾「直接法によるソリトンの数理」(岩波書店)

戸田盛和「非線型波動」(岩波書店)　　など.

**問 61**　*1.* 次の行列式の公式を示し、これを用いて *3* 次代数方程式の解の公式を導け。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^{-1}c)(a+\omega^{-1}b+\omega c) \tag{118}$$

ただし、$\omega = \frac{-1+3\sqrt{-1}}{2}$ は *1* の *3* 乗根を表わす。

*2.* 同様に次の公式を示し、またこれを用いて *4* 次方程式の解を *3* 次方程式に帰着させよ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d) \tag{119}$$

これらはクラメルの研究の動機となった公式であるが, 残念ながら $5$ 次以上ではうまいものが見つからない. 実際どのようにしても根号で解を表わす公式はありえない事が, 後にアーベルやガロアによって示された: 例えば山下純一「ガロアへのレクイエム」(現代数学社) 等参照.

## 10.4　練習問題

1. 次の行列の行列式を計算し、逆行列があればそれも求めよ。

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 行列 $A$ が可逆のとき、行 (あるいは列) のみの基本変形を用いることで、単位行列まで変形できることを示せ。

3(a) 行列 $A$ の余因子行列の定義を述べよ。

(b) 行列 $A$ の余因子行列を $\Delta$ と書くと

$$\det\Delta = (\det A)^{n-1}$$

であることを示せ。ただし、$n$ は $A$ のサイズとする。

4. $A$ を $n$ 次正方行列とする. $n=2$ のときと同じく, ある数 $\lambda$ に対して $Av=\lambda v$ をみたす $v\neq 0$ のことを $A$ の固有ベクトルといい, このとき $\lambda$ を $A$ の固有値と呼ぶ. 固有値は, $\det(A-\lambda E)=0$ を満たすことを示せ. また, これは$\lambda$ の $n$ 次方程式であることを示せ.

5. 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求め、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような $P$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 行列の指数関数 ($\mathrm{e}^A$ とも $\exp A$ とも書く) とは、正方行列 $A$ に対し、

$$\exp A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \cdots$$

できまる同じサイズの正方行列である。

(a)

$$\frac{d}{dt}\left(\exp tA\right) = A(\exp tA)$$

を示せ. したがって $v(t) := \exp tAv$ は, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t)$$

の解を与えている. この解は $\exp 0A = E$ より, 初期条件 $v(0)=v$ を満たしている.

(b) 次の行列 $A$ に対し、必要なら対角化を施すことにより $\exp(tA)$ ($t$ は実数) を計算せよ。

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) ベクトル値関数 $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解を、右辺の行列を対角化しその指数関数を計算することにより求めよ。

# 11　固有値と対角化

前節までで, 一般のサイズの正方行列の行列式について学んだ. 一方 2 行 2 列の行列に対しては, 対角化とその応用について学んでいる. そこで肝心なことは, 固有値を求める固有方程式であり, それは $A-\lambda E$ が逆行列をもたないことを表わしていた.

「練習問題」にて扱ったように, 行列式を用いると一般サイズの場合にも固有値のみたす方程式は同じ形にかける. 固有ベクトルや対角化についても, 原理的には同様に計算できることになるが, すでに 2 行 2 列のときにも, 常に対角化できるとは限らないのであった. ここでは, それが可能である重要な場合について対角化できることの証明を与えることを目標としよう.

主に対象とする行列は「正規行列」とよばれるもので, 量子力学などでも重要なユニタリ行列, エルミート行列を含む種族である.

## 11.1　内積とユニタリ行列

以下この章では、一般に複素正方行列をあつかう。複素行列 $A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ に対し、その転置行列は前と同じ ${}^tA:=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ & \cdots & \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ である。更に $\overline{x+iy}=x-iy$ を複素共役として、$A^*:=\begin{bmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{m,1}} \\ & \cdots & \\ \overline{a_{1,n}} & \cdots & \overline{a_{m,n}} \end{bmatrix}$ を $A$ のエルミート (Hermite) 共役という。

また複素 $n$ 成分縦ベクトル $x,y$ について $(x,y):=x^*y, ||x||^2=(x,x)$ とおく。

問 **62**　*1.* $(AB)^*=B^*A^*, \quad (x,Ay)=(A^*x,y)$

*2.* $||v+w||^2+||v-w||^2=2(||v||^2+||w||^2)$

定義 **11** 成分が複素数または実数の正方行列について、

- $H=H^*$ のとき、行列 $H$ をエルミート行列と呼ばれる。成分が実数からなる行列のときは、これは $H={}^tH$ と同値であり、実対称行列と呼ばれる。
- $UU^*=1$ のとき、行列 $U$ をユニタリ行列と呼ばれる。*(*このとき $U^*U=1$ だから、$U^*=U^{-1}$ である。*)* やはり成分が実数のときには、これは $U{}^tU=1$ と同値で、このとき $U$ は実直交行列と呼ばれる。この条件 $U^*U=1$ は

$$U^*U=1 \Leftrightarrow \forall v, U^*Uv=v \Leftrightarrow \forall v,v', v'^*U^*Uv=v'^*v \Leftrightarrow \forall v,v', (v',v)=(Uv',Uv)$$

と書きなおせて、最後の式は「$U$ が内積を変えない」と読める。*(*問 : これを確かめよ。*)* つまり内積を変えない線型写像を表すのがユニタリ行列といえる。

目標　エルミート行列及びユニタリ行列は、ユニタリ行列によって常に対角化可能である。[15] これを示すのがこの章の主な目標である。[16] エルミート行列とユニタリ行列をまとめて扱うために、これらを含む性質として

定義 **12** $AA^*=A^*A$ のとき、複素行列 $A$ を正規行列という

ことにする。すると結論 (定理 16) は「正規行列は必ず対角化される」とまとめられる。

[15] 同じことだが、Jordan 標準形が上三角成分がない対角型である。

[16] 実対称行列や直交行列の対角化の問題も、これがわかるとわかる。

## 11.2 同時三角化

**補題 1** *1)* $AB = BA \Rightarrow$ ある複素可逆行列 $P$ があって、$P^{-1}AP$,$P^{-1}BP$ は同時に三角行列にできる。

*2) 1)* において、$P$ はユニタリ行列にとれる。

証明 $(1)A, B$ のサイズ $n$ についての帰納法で示す。$n = 1$ ならやることがない。$n - 1$ まで OK とする。

まず、どんな行列 $A$ も (実行列であっても、複素ベクトルの範囲で考えれば) 必ずひとつは $0$ でない固有ベクトルを持つことに注意しよう。[17] このことは、固有方程式 $|A - \lambda| = 0$ が複素数の範囲で必ず根を持つことから従う。

そこで $v_\lambda$ を $A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトルとする：$Av_\lambda = \lambda v_\lambda$. このとき $AB = BA$ より、

$$A(Bv_\lambda) = BAv_\lambda = B\lambda v_\lambda = \lambda(Bv_\lambda) \tag{120}$$

すなわち、$v_\lambda$ が固有ベクトル $\Rightarrow Bv_\lambda$ も同じ固有値の固有ベクトル。今固有値 $\lambda$ の固有ベクトルが一次元しかなければ[18] 、必然的に $Bv_\lambda // v_\lambda$ すなわち $Bv_\lambda = \mu v_\lambda$ となる。

この $v_\lambda$ に $n - 1$ 個のベクトルをおぎなって基底 $v_1 = v_\lambda, v_2, \cdots, v_n$ を作れば、$A, B$ のこの基底への作用は次のようになる。

$$A[v_1, v_2, \cdots, v_n] = [v_1, v_2, \cdots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' \end{bmatrix}, \tag{121}$$

$$B[v_1, v_2, \cdots, v_n] = [v_1, v_2, \cdots, v_n] \begin{bmatrix} \mu & * \\ 0 & B' \end{bmatrix}. \tag{122}$$

ここで $A', B'$ は $n - 1$ 次の正方行列で、$AB = BA$ より $A'B' = B'A'$ である (確かめよ)。すると帰納法の仮定から、ある $P'$ によって $P'^{-1}A'P' = A_1, P'^{-1}B'P' = B_1$ を同時に上三角にできる。そこで $P := [v_1, \cdots, v_n] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix}$ とすれば、$(121), (122)$ とあわせて、

$$AP = AP \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & P'^{-1}A'P' \end{bmatrix} = AP \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

$$BP = BP \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & P'^{-1}B'P' \end{bmatrix} = BP \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & B_1 \end{bmatrix},$$

となる。$A_1, B_1$ は上三角行列だったから、これで $A, B$ が共に同じ行列 $P$ で三角化された。

以上で $A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトルが一次元しかないときの証明が出来たが、反省してみると $v_\lambda$ が $A$ と $B$ の「同時固有ベクトル」($A$ の固有ベクトルであると同時に $B$ の固有ベクトルでもある) であることが本質的で、これだけで式 $(121), (122)$ 以下の議論は成り立っている。

そこで $A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトルが沢山 $(m(> 1)$ 次元) あったときも、その中から $B$ の固有ベクトルでもあるものがとれることを示せば良い。そのために、

$$V_\lambda := \{A \text{ の固有値 } \lambda \text{ の固有ベクトル } \}$$

[17] これはまた、「どんな線型写像 $A : V \to V$ も必ずひとつは固有ベクトルを持つ」とも言い換えられる。これはあとで用いる。

[18] この仮定が満たされないときは後で考える。

と書けば、今これは $\mathbf{C}^n$ の $m(>1)$ 次元の部分ベクトル空間になっている。そして計算 $(120)$ によって、$V_\lambda$ は $B$ で自分自身にうつること：$BV_\lambda \subset V_\lambda$ がわかる。言い換えれば： $B$ をこの $m$ 次元空間 $V_\lambda$ に制限してできる線型写像

$$B_\lambda : V_\lambda \ni v \mapsto Bv \in V_\lambda$$

を考えると、同じ空間から同じ空間への線型写像になっている！先の脚注により、この $B_\lambda$ は必ず一つ固有ベクトル $v_1$ を持つ。すると $v_1$ は $B$ の固有ベクトルだから $Bv_1 = \mu v_1$、一方 $v_1$ は $V_\lambda$ からとったのだから $Av_1 = \lambda v_1$ でもある。すなわち、$v_1$ は求める同時固有ベクトルである。 $1)$ の証明終

$2)$ $1)$ の $P$ を $P = [w_1, \cdots, w_n]$ と書く。$w_1, \cdots, w_n$ から正規直交化して得られる基底を $u_1(:= w_1/||w_1||), u_2, \cdots, u_n$ とすれば、$u_1$ は $w_1$ のみで、$u_2$ は $w_1, w_2$ のみで、$\cdots$、$u_k$ は $w_1, \cdots, w_k$ のみで書かれている。この言い換え：上三角行列 $T$ があって、

$$[u_1, \cdots, u_n] = [w_1, \cdots, w_n] \cdot T$$

となる[19] 。$U := [u_1, \cdots, u_n]$ とすれば、正規直交性 $(u_i, u_j) = \delta_{i,j}$ [20] より $U$ はユニタリ行列である。するとこの $U$ によって $A, B$ が共に三角化されるのであるが、それは以下のようにして言える。

まず

$$P^{-1}AP = \tilde{A}, \;\; P^{-1}BP = \tilde{B}$$

は共に上三角であった。これに $P = UT$ を用いると

$$(UT)^{-1}A(UT) = \tilde{A}, \;\; (UT)^{-1}B(UT) = \tilde{B},$$

故に

$$U^{-1}AU = T\tilde{A}T^{-1}, \;\; U^{-1}BU = T\tilde{B}T^{-1}.$$

これらの右辺は、三角行列の積であるから三角行列となる (確かめよ)。よって $A, B$ ともユニタリ行列 $U$ によって上三角化された。 $2)$ の証明終

注意 「ほとんどの行列は対角化可能である」(固有方程式が重根を持たなければ正しい！) を認めれば、上の補題は

「可換ならば同時対角化可能である」

と読める。これは量子力学的物理現象を解析する際の指針としてしばしば有効である。同じエネルギー準位にあるふたつ (以上) の状態を、他の物理量で「分離」して考える、などがそうであり、一般にふたつの「物理量」(行列のようなもの) が同時に観測できる (可換性) ときにはこれら物理量の同時対角化を与える基底 (系の「純粋な状態」などという) を考えることが基本的である。

[19] これは、「任意の可逆行列 (左辺) が、ユニタリ行列と上三角行列の積 $UT$ に分解できる」と読める。(岩沢分解とよばれる。)

[20] $\delta_{i,j} = 1$ ($i = j$ のとき)、$=0$ (それ以外)。$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタと呼ばれる。

## 11.3　正規行列の対角化

目標の定理であるが、補題で大変な部分は済んだので証明は簡単である。

**定理 16** *1)* 正規行列 $A$ は、あるユニタリ行列 $U$ により必ず対角化できる。すなわち、$U^{-1}AU$ を対角行列にできる。

*2)* エルミート行列の固有値はすべて実数である。

*3)* ユニタリ行列の固有値はすべて絶対値 *1* の複素数である。

証明 1) 補題を $B = A^*$ と考えて適用すると、$A$ も $A^*$ も同時に上三角にするユニタリ行列 $U$ がある：

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} * & * & & \cdots & * \\ 0 & * & & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{bmatrix} = (\text{イ}),\quad U^{-1}A^*U = \begin{bmatrix} * & 0 & & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & & * & * \end{bmatrix} = (\text{ロ}).$$

ここで $U^* = U^{-1}$ に注意すると $(U^{-1}AU)^* = U^{-1}A^*U$、すなわち $(\text{イ})^* = (\text{ロ})$ である。そして $(\text{イ})$ は上三角故 $(\text{イ})^*$ は下三角、それが上三角行列 $(\text{ロ})$ に等しい。よって $(\text{イ})$ も $(\text{ロ})$ も、対角成分以外は $0$ にならざるを得ない。すなわち $U^{-1}AU$ は対角行列である。

証明 2) $A$ をエルミート行列とし、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

をユニタリ行列による $A$ の対角化とする。$A^* = A$ より、

$$(U^{-1}AU)^* = U^*A^*U^{-1*} = U^{-1}AU,$$

これを成分で見れば、

$$\overline{\lambda}_1 = \lambda_1, \cdots, \overline{\lambda}_n = \lambda_n$$

であるから、固有値 $\lambda_i$ はすべて実数である。

証明 3) $A$ をユニタリ行列とし、

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = A'$$

をユニタリ行列による $A$ の対角化とする。$A^*A = 1$ より、$A'^*A' = 1$。すなわち$\overline{\lambda}_1\lambda_1 = 1, \cdots, \overline{\lambda}_n\lambda_n = 1$ であり、固有値 $\lambda_i$ はすべて絶対値 $1$ の複素数である。　　証明終

定理 2),3) の逆として、次のことは簡単に確かめられる。

問 **63** 実数 *(*または絶対値 *1* の複素数*)* からなる対角行列 $\Lambda$ からユニタリ行列 $U$ を用いて作った行列 $U^*\Lambda U$ は、エルミート行列 *(*または、ユニタリ行列*)* となる。[21]

また定理の 2) から特に、$A$ が正値エルミートであることとその固有値がすべて正の実数であることの同値性がわかる：

$$\begin{aligned} & A \text{ が正値エルミート} \Leftrightarrow A^* = A \text{ かつ } v \neq 0 \text{ なら } v^*Av > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & A = U^*\Lambda U \ (U \text{ はユニタリ、} \Lambda \text{ は実対角行列}), w \neq 0 \text{ なら } w^*\Lambda w > 0 \end{aligned}$$

であるが、最後の条件は$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ と書けば、$\lambda_i > 0$ と同値。

# 12 Jordan 標準形

一般の (複素) 正方行列は、正規行列と異なり対角化できるとは限らない。ここでは証明は略すが、以下の事実が知られている。

定理 **17** $A$ は $n$ 次正方行列で、その固有方程式

$$|A - \lambda E| = 0$$

が $k$ 個の異る根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を持ち、それぞれ重複度 $d_1, \cdots, d_k$ であるとする。このとき、$A$ は適当な複素可逆行列 $P$ で以下の形に標準化される。

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} K_{d_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & K_{d_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{123}$$

ここで $K_d(\lambda)$ は

$$K_d(\lambda) = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{m_l}(\lambda) \end{bmatrix} \ (m_1 + \cdots + m_l = d), \ J_d(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{bmatrix}, \tag{124}$$

の形である。この標準形は、含まれる $J_d(\lambda)$ *(*ジョルダン細胞という*)* の並べ方の違いを除いて一通りに定まる。

この定理で特に 2 行 2 列のときが、以前にジョルダン標準形と呼んだものである。これもやはりジョルダン標準形と呼ばれる。$A$ が対角化可能のときは、含まれるジョルダン細胞 $J_d(\lambda)$ がすべて 1 行 1 列 $(d = 1)$ という、ジョルダン標準形の特別な場合と考えられる。

[21] よって、エルミート行列とかユニタリ行列とは、「こんなようなものだ」と思っていて良い！

# 13　実正規行列の標準形

実正規行列 ($A^tA = {}^tAA$ なる実行列 $A$) については、複素数の範囲までいけば定理 16 によってユニタリ行列 $U$ で対角化される。しかし、$U$ を実の範囲に限って考えたら (実直交行列に限ったら) どうなるか？この答えは次のようになる。

まず $A$ を (複素) ユニタリ行列 $U$ で対角化することを考える。

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ を $A$ の固有値とする。固有方程式は実係数だから、$\lambda$ が解ならその複素共役 $\overline{\lambda}$ も解である。それらを重複があれば重複度だけくりかえすこととして、

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}, \lambda_{2k+1}, \cdots, \lambda_n$$

のように並べる。(前の $2k$ 個は互いに複素共役な解のペアの $k$ 組 $= 2k$ 個、後の $n - 2k$ 個は実の解。)

対角化を与える行列 $U$ は、固有ベクトルからなる正規直交基をならべたものである。その正規直交基が次の形にとれる。

$$u_1, \overline{u_1}, \cdots, u_k, \overline{u_k}, u_{2k+1}, \cdots, u_n$$

ただし $\overline{u}$ はベクトル $u$ の各成分の複素共役をとってできるベクトルであり、また、$u_{2k+1}, \cdots, u_n$ は実ベクトルにとれる。[22] この基底の「前半」 $u_1, \overline{u_1}, \cdots, u_k, \overline{u_k}$ から、ベクトル

$$x_j := \sqrt{2}\mathrm{Re}u_j = \frac{u_j + \overline{u_j}}{\sqrt{2}},\ \ y_j := \sqrt{2}\mathrm{Im}u_j = \frac{u_j - \overline{u_j}}{i\sqrt{2}},$$

をつくる ($j = 1, \cdots, k$)。行列で書けば、

$$[x_j, y_j] = [u_j, \overline{u_j}]P, \quad P := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/i\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

という基底変換である。すると、$|u_j| = 1$ であること、および $(u_j, \overline{u_j}) = 0$ (異なる固有値の固有ベクトルは直交する!) を用いて、

$$(x_j, x_j) = \frac{1}{2}\{(u_j, u_j) + (\overline{u_j}, \overline{u_j}) + (\overline{u_j}, u_j) + (u_j, \overline{u_j})\} = \frac{1}{2}\{1 + 1 + 2\mathrm{Re}(u_j, \overline{u_j})\} = 1$$

がわかる。同様にして $y_j$ どうしや $x_j$ と $y_j$ との間の内積も計算できて、

$$(x_i, x_j) = \delta_{i,j}, (y_i, y_j) = \delta_{i,j}, (x_i, y_j) = 0.$$

がわかる。そして $A[u_j, \overline{u_j}] = [u_j, \overline{u_j}] \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_j} \end{bmatrix}$ より、

$$\begin{aligned} A[x_j, y_j] &= A[u_j, \overline{u_j}]P = [u_j, \overline{u_j}] \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_j} \end{bmatrix} P = [x_j, y_j]P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_j} \end{bmatrix} P \\ &= [x_j, y_j] \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}, \quad \text{ただし } \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \ (\alpha_j, \beta_j \text{ は実数}) \end{aligned}$$

となる。よって $U$ のかわりに、(基底の前半を $x_j, y_j$ でおきかえて)

$$T := [x_1, y_1, \cdots, x_k, y_k; u_{2k+1}, \cdots, u_n]$$

を使えば、

[22] 実際、$\lambda$ が実でなければ、$v_\lambda$ を固有値 $\lambda$ の固有ベクトルとするとき $\overline{A} = A$ より $A\overline{v_\lambda} = \overline{Av_\lambda} = \overline{\lambda v_\lambda} = \overline{\lambda}\overline{v_\lambda}$, よって $\overline{v_\lambda}$ は固有値 $\overline{\lambda}$ の固有ベクトルとなる。そこでまず $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ に対応して互いに正規直交な固有ベクトルをとって $u_1, \cdots, u_k$ とし、$\overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_k}$ に対してはその複素共役ベクトルをとる。(異る固有値の固有ベクトルは互いに直交するから、重複度をもつ固有値 $\lambda_i$ に対して重複度だけの個数の正規直交な固有ベクトルを選べば、あとは自動的に一次独立となる。) 残った実固有値に対しては、固有ベクトルは $(A - \lambda)v = 0$ の解として実にとれる。

**定理 18**

$$AT = T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} & & 0 & \cdots & 0 & \\ & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & & \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} & & 0 & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_{2k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \tag{125}$$

となる。$x_j, y_j, (j = 1, \cdots, k), u_{2k+1}, \cdots, u_n$ は正規直交基であるから、$T$ は直交行列である。

結局、実正規行列 $A$ に対して直交行列 $T$ があって、$T^{-1}AT$ は $(125)$ の右辺に表われた形となることがわかった。これを実正規行列の標準形という。

実対称行列の標準形

$A = {}^tA$ を満たす、実数の行列 $A$ を実対称行列という。これは、ふたつの実ベクトルに対して

$$(v, w)_A := {}^tvAw$$

$((v, w)_A = (w, v)_A$ であることに注意$)$ と定めることで、ほとんど内積の性質を満たす演算 $(,)$ を定める。(内積の公理のうち、正値性だけが保証されない。$)$ $(v, w)_A$、あるいは $(v, v)_A$ を, $A$ が定める 2 次形式と呼ぶ。例：

$$[x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

実対称行列 $A$ の標準形について考えてみると、これはほとんどエルミート行列の固有値を調べたのと同じ考え方でわかる。

まず定理 $18$ を用い、

$$T^{-1}AT = D(D \text{ は式 } (125) \text{ の中の形})$$

とする。この両辺の転置 ${}^t$ をとると、$T$ が直交行列であること $(T^{-1} = {}^tT)$ に注意して

$$T^{-1t}AT = {}^tD$$

を得る。ところが $A = {}^tA$ であるから、$(125)$ において $\beta_j$ はすべて $0$ でなくてはならない。結局、

**定理 19** 実対称行列は、直交行列によって対角化される。

とわかった。

このとき $x = T^{-1}v,\ x = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$ と座標変換 (変数変換) することにより、

$$\begin{aligned} (v, v)_A &= {}^tvAv = {}^t(Tx)A(Tx) = {}^tx(T^{-1}AT)x = {}^txDx \\ &= d_1x_1^2 + \cdots + d_nx_n^2 (D \text{ の対角成分を } d_1, \cdots, d_n \text{ とした}) \end{aligned}$$

である。これを 2 次形式 $(,)_A$ の標準形という。$d_j$ がすべて $\neq 0$ のとき、この 2 次形式は非退化であるという。更に、$d_j \neq 0$ の $j$ について $X_j := x_j\sqrt{|d_j|}$ という座標変換 (「スケーリング」) をし、必要なら添字の順番を入れかえれば、

$$(v,v)_A = X_1^2 + \cdots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \cdots X_m^2$$

$(d_m = \cdots = d_n = 0)$ の形にできることになる。この $+, -$ の数をそれぞれ数えた数の組 $(p, m-p)$ を $(,)_A$ の符号数という。符号数はどんな可逆実行列 $T$ により (実の変数変換により) 標準形を作っても同じで、$A$ できまっていることがわかる (問: 考えてみよ)。相対性理論では符号数 $(3,1)$ のものが活躍する。

以上では変数変換を連続に行うことを許した。(例えば $X_j := \frac{x_j}{\sqrt{|d_j|}}$ において、$d_j$ は任意の実数で良い。) これを整数の範囲に限ると、複素数から実数に制限したときよりも更に奥が深い世界が現われる。興味深いのは次元の個性が強く現われてくることで、8 の倍数次元の場合に特に異常な 2 次形式があることが知られている。その 2 次形式で測った (長さ)$^2$が整数であるような「格子点」の全体を考え (たとえば通常の内積においては整数が座標であるような点の全体)、その格子点を中心とする球の配置を考えよう。これは高次元での球の詰め込みを考えたことになる。8 の倍数次元の実ベクトル空間においては、こうして得られる「格子点」あるいは「詰め込み」で異常に密度が高いものがあり、デジタル通信の精度を高めることにも応用される。このような格子の存在は、対称性が異常に高い特別な次元があるということを意味し、整数論から超弦理論、数学から物理にいたるいろいろな現象と関わっていると考えられ活発に研究されている。(文献：鈴木道夫「有限単純群」(紀伊国屋書店))

# 14 問題

複素行列 $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ に対し、${}^tA := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ & \cdots & \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ を $A$ の転置行列と呼んだ。同様に$\overline{x+iy} = x - iy$ を複素共役として、$A^* := \begin{bmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{m,1}} \\ & \cdots & \\ \overline{a_{1,n}} & \cdots & \overline{a_{m,n}} \end{bmatrix}$ を $A$ のエルミート (Hermite) 共役というのであった。また複素 $n$ 成分縦ベクトル $x, y$ について $(x,y) := x^*y, ||x||^2 = (x,x)$ とおく。

1. • $(AB)^* = B^*A^*, \quad (x, Ay) = (A^*x, y)$
   • $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2)$
2. 複素正方行列 $U$ がユニタリである、すなわち $U^*U = 1$(単位行列) $\Longleftrightarrow$ $U$ の各列の縦ベクトルが互いに正規直交である $\Longleftrightarrow$ $(Uv, Uw) = (v, w)$ (任意の $v, w$ について)。
3. $V = \mathbf{C}^4$ に標準内積を考えたとき、次の部分空間 $W$ の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

$$W := \left\{ {}^t[a,b,c,d] \,\middle|\, a+b+c+d = 0, a-b+c-d = 0 \right\}$$

   また任意の元 $v = {}^t[a,b,c,d]$ の、$W$ および $W^\perp$ への直交射影 $w = P_W v$, $w^\perp = P_{W^\perp} v$ を求めよ。
4. 実 $n$ 次正方行列の全体 $M_{n,n}(\mathbf{R})$ に、次の内積を考える。

$$(A,B) := \mathrm{Tr}\,{}^tAB = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} \quad (A = [a_{i,j}], B = [b_{i,j}] \in M_{n,n}(\mathbf{R}))$$

この内積がたしかに内積の公理を満たすことを確かめよ。また、一般に $A = \frac{A+{}^tA}{2} + \frac{A-{}^tA}{2}$ であることに注意し、対称行列全体、交代行列全体のなす部分空間

$$Sym := \{A \in M_{n,n}(\mathbf{R}) | {}^tA = A\}, Alt := \{A \in M_{n,n}(\mathbf{R}) | {}^tA = -A\}$$

が、互いに互いの直交補空間であることを示せ。

5. $\mathbf{R}^3$ の内積 $(x, y) := {}^txy$ に関して、次のベクトルの列に正規直交化を行え：

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. 1 変数多項式 $f(x), g(x)$ の内積を

$$(f, g) := \int_0^\infty \overline{f(x)} g(x) e^{-x} dx$$

で定めるとき、単項式の列 $\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ からシュミットの正規直交化によって得られる多項式 $f_0, f_1, f_2, \cdots$ ($f_k$ は $k$ 次式) を (あきるまで) 求めよ。この $f_k$ はラゲール多項式と呼ばれる。

7. 1 変数多項式 $f(x), g(x)$ の内積を

$$(f, g) := \int_{-\infty}^\infty \overline{f(x)} g(x) e^{-x^2/2} dx$$

で定めるとき、単項式の列 $\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ からシュミットの正規直交化によって得られる多項式 $f_0, f_1, f_2, \cdots$ ($f_k$ は $k$ 次式) を (あきるまで) 求めよ。この $f_k$ はエルミート多項式と呼ばれる。

8. 次の行列の固有値・固有ベクトルを求め、ユニタリ行列による対角化を行え。

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

また、最後の行列に対し、その指数関数 $e^{tA}$ を計算せよ。

9. 次の 2 次形式を標準形にせよ：$x^2 + y^2 + z^2 - xy + 4yz - zx$ ($x, y, z$ は実数)。また、単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上での最大値と最小値を求めよ。

10. $H^* = H$ とし、$v_\lambda, v_\mu$ でそれぞれ固有値が $\lambda, \mu$ の固有ベクトルを表す。
    - $\lambda \neq \mu$ ならば、$(v_\lambda, v_\mu) = 0$ (固有値が違えば直交する) を示せ。
    - $U(t) := e^{itH}$ は実数 $t$ についてユニタリ (unitary) であることを示せ。

11.
    - $U$ がユニタリ行列、$A$ が実対角行列のとき、$U^*AU$ はエルミート行列であることを示せ。
    - $U$ がユニタリ行列、$A$ は対角行列でその対角成分は絶対値 1 の複素数とする。このとき $U^*AU$ はユニタリ行列であることを示せ。

12. $H^* = -H$ のとき、$H$ を歪エルミート的 (skew Hermitian) という。このような $H$ の固有値はどんな数か。また、${}^tA = -A$ を満たす実行列 $A$ を実交代行列あるいは実反対称行列という。このような $A$ の固有値はどんな数か。

13. ユニタリ行列の積はまたユニタリであり、ユニタリ行列の逆行列もまたユニタリである。直交行列についても同様である。[23]

[23] このことを、$n$ 次ユニタリ行列の全体 $U(n)$ (直交行列の全体 $O(n)$) が群をなす、と言い表わす。$U(n)$、$O(n)$ を、それぞれ $n$ 次のユニタリ群および直交群と呼ぶ。

14. $[A,B] = AB - BA$ とおき、行列 $A$ と $B$ とのリー括弧 (Lie ブラケット) 積という[24] 。$[A,B] = c1$ (スカラー行列) のとき、$e^{tA}Be^{-tA} = B + tc \cdot 1, e^{tA}e^{sB}e^{-tA}e^{-sB} = e^{stc}$ であることを示せ。
15. (定数係数線型常微分方程式の解) 次の微分方程式の一般解を求めよ。($f = f(t), ' = \frac{d}{dt}$)

$$f''' - 3f' + 2f = 0$$

16. 次の差分方程式の一般解を求めよ：

$$a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0.$$

17. 上の 2 つの問題と、Jordan 標準形との関係を考えよ。 (以上)

[24] これは $e^{tA}$ と $e^{tB}$ の非可換性を $A$ と $B$ の非可換性と関連づける量であり、実際 $e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB}$ を $t$ についてテイラー展開したときの $t^2$ の係数に現れる。「指数」($e^{tA}$ にたいする $A$) においては問題が線型になり非可換性を制御しやすい。これは「リー群とリー環」の考え方の基本となる。

# 15　期末試験

## 15.1　問題 (1997 年度前期)

1. 次の行列式を計算せよ。

$$\text{ア)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{イ)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\text{ア)}\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{イ)}\ \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 行列式について述べよ。(例えば、友達に説明するつもりで説明せよ。)

4. 空間の 4 点 $\mathrm{O}=(0,0,0), \mathrm{A}=(-1,-1,4), \mathrm{B}=(2,2,0), \mathrm{C}=(-1,3,1)$ を考える。
   (a) ベクトルの組 $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ は右手系か左手系か、答えよ。
   (b) 三角錐 OABC の体積を求めよ。

5(a) 対称行列 $A = {}^t A$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在すれば、やはり対称であること：

$$A^{-1} = {}^t (A^{-1})$$

を示せ。
   (b) 上三角行列の逆行列が存在すれば、やはり上三角行列であることを示せ。

## 15.2　略解

1. ア)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-4) + 2 \cdot (-10) = 0.$$

これはまた (第 2 列) × 2 − (第 3 列) ÷ 2 = (第 1 列) であること ($\therefore$ 3 つの ベクトルがひとつの平面上にのっている) からも確認できる。
イ)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 4.$$

2. ともに掃き出し法による : 裏面を見よ。ただし、イ) については次のような別法がある。与えられた行列を $A$ とし、$E$ で単位行列を表わすとき、$C := E - A$ (つまり $A = E - C$ ) とおく。つまり単位行列とのずれに注目する。すると $E$ が $C$ と可換 $(CE = EC)$ であることから、ふつうの文字式の計算と同じに計算してよくて、$(E-C)(E+C+C^2+\cdots+C^{n-1}) = (E^n - C^n)$. 故に $A = E - C$ の逆があれば

$$(E - C)^{-1}(E^n - C^n) = E + C + C^2 + \cdots + C^{n-1}.$$

ここで $E^n = E$, また $C^n = (-\lambda)^n E$ であるから、左辺は $(1 - (-\lambda)^n) \cdot A^{-1}$. よって

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - (-\lambda)^n}(E + C + C^2 + \cdots + C^{n-1}).$$

である。$C, C^2, \cdots, C^{n-1}$ は対角線から順にひとつづつはずれたところの成分だけゼロでなく、簡単に計算できる:

$$C = -\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^2 = +\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \cdots.$$

結局、

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - (-\lambda)^n}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} \\ (-\lambda)^{n-1} & 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} & 1 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

これを覚えておくと、同じように (単位行列 + 簡単な行列) という場合の逆行列を求めるのに役に立つことがあると思う。

3. ポイントとしては、
   - 1) 正方行列に対して、線型性・交代性・単位行列に対し 1 、の 3 条件を満たす唯一のものとして定義される。あるいはすべての順列に対しての (符号の変わる、「 交代的な 」) 和として定義してもよい。
   - 2) $n$ 次実行列に対しては、その列ベクトルを各辺とする「 $n$ 次元平行体 」の体積をあらわす。行列式の正負は、そのベクトルの組が定める「 向き 」という意味をもつ。行列式が 0 となることはその行列が逆行列をもたないことと同値であるが、これはその行列が定める線型写像が単位立方体を体積 0 の図形に写像するからであると説明できる。
   - 3) ラプラス展開と交代性などを用いて計算する、

   などがあげられる。

4. 絵を書いてみて、あるいは行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 32 > 0$ より、右手系。

($e_1, e_2, e_3$ をそれぞれ右手の親/人差/中指の方向として「 右手系 」とよぶ。上の行列は、この基準の右手系から問題のベクトルの組への変換を表す行列と考えられ、行列式の符号はその変換が向きを保つかどうかを表わすことが、後半の論法の根拠である。ここで「 向き 」

を直観的に用いているが、論理的に堂々めぐりにしないためには、どこかで「向き」とは何であるか定義しなくてはならない。上に述べたことが成り立つようにするには、これを定義にしてしまうのが一番てっとり早い (ずるい！)。すなわち 3 次元実ベクトル 3 個の組が二つあったときにそれらが同じ向きであることを、それらが作る行列の行列式が同符号であることと定義するのである。するとこのとき、ふたつの行列は逆行列をもつ行列全体のなす「座標系全体の空間」の中で、連続曲線で結べることが示され、定義が妥当であるとわかる。これは図形でいえば、はじめのベクトルの組が作る平行体から、その体積を潰さぬまま連続的に第 2 の組の作る平行体へと変形できるということであり、われわれが直観的に「向きが同じかどうか」を判定するときアタマの中で行っている操作が可能なことを意味しているからである。)

三角錐 OABC の体積は、上の行列式が表す平行体の体積の $1/6$ であるから (なぜか?)、$16/3$ である。

5. (a) ${}^t(XY) = {}^tY\,{}^tX$ を思い出すと、$A \cdot A^{-1} = 1$ を転置 $({}^t)$ して ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = 1$。${}^tA = A$ であるから

$$ {}^t(A^{-1})A = 1. $$

これは ${}^t(A^{-1})$ がまた $A$ の逆行列であることを示すが、逆行列はあればただ一つであるから結局 ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$.

別証明として、逆行列のクラメルの公式 (逆行列=余因子行列の転置/行列式) において、$A$ の転置の余因子行列 $\Delta({}^tA)$ がもとの余因子行列の転置 ${}^t\Delta(A)$ であることを示すと、これからもすぐ出る。

(b) 略証：逆行列の下三角成分は、クラメルの公式によれば、余因子行列の上三角成分の行列式の逆数倍である。これがゼロになることは、その余因子行列式が対角線にゼロをもつ上三角行列になっていることから簡単に確認できる。

別証：いちばん下の行から掃き出し法をはじめて逆行列を求める。上三角行列の場合、常に「より下の行を何倍かして上の行に加える」ことで単位行列まで変形できる。このとき求める逆行列は、同じ変形を単位行列にほどこして得られるが、その下三角成分はより下の成分がはじめから (単位行列について) 0 なので、足されることがなく 0 のままである。これが題意を示す。

また、行列のサイズに関する帰納法により証明することも容易である。

2 ア) はじめにもとの行列の左下を 0 にし、次に対角線を 1 にそろえ、そして右上を 0 にする、という方針で行の基本変形を行う。

$$ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -2 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -2 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -2 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 & 2/3 & 5/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 1/4 & 1/2 & 5/8 & 3/4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 0 & 1/6 & 1/3 & 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/2 & 5/8 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 0 & 1/6 & 1/3 & 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 3/5 & 1/2 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 1 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 1/2 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right].$$

この右側の行列が、求める逆行列である。(問 5 により対称なはずであるが、たしかにそうなっている。)

2 イ) ア) と同じにやっても良いが、こんどは右上をまず消して、あとで左下を消してみる。

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\lambda^2 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$
\longrightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
+\lambda^3 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 \\
-\lambda^2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\
+\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \cdots \longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-(-\lambda)^{n-1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 & (-\lambda)^{n-2} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\lambda^2 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \\
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1-(-\lambda)^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} \\
-(-\lambda)^{n-1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 \cdots & (-\lambda)^{n-2} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\lambda^2 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\cdots (*)
$$

$$
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1-(-\lambda)^n} & \frac{-\lambda}{1-(-\lambda)^n} & \frac{(-\lambda)^2}{1-(-\lambda)^n} & \cdots & \frac{(-\lambda)^{n-1}}{1-(-\lambda)^n} \\
-(-\lambda)^{n-1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 \cdots & (-\lambda)^{n-2} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\lambda^2 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1-(-\lambda)^n} & \frac{-\lambda}{1-(-\lambda)^n} & \frac{(-\lambda)^2}{1-(-\lambda)^n} & \cdots & \frac{(-\lambda)^{n-1}}{1-(-\lambda)^n} \\
0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \frac{(-\lambda)^{n-1}}{1-(-\lambda)^n} & \frac{1}{1-(-\lambda)^n} & \frac{-\lambda}{1-(-\lambda)^n} & \cdots & \frac{(-\lambda)^{n-2}}{1-(-\lambda)^n} \\
-(-\lambda)^{n-2} & 0 \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 \cdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\lambda & & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\
 & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \cdots \longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 &
\end{array}\right.
\left|\begin{array}{ccccc}
1 & -\lambda & \lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} \\
(-\lambda)^{n-1} & 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\
\lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} & 1 & -\lambda \\
-\lambda & \lambda^2 & \cdots & (-\lambda)^{n-1} & 1
\end{array}\right.
\left.\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}\right]
\frac{1}{1-(-\lambda)^n}
\Bigg].
$$

この右側の行列が求めるもの。この計算より、元の行列の左下隅の $\lambda$ を取った上三角行列の逆行列は $(*)$ の右側であることもわかる。

# A　向きと行列式

## A.1　向きとは何か？

3 次元ユークリッド空間において右手系・左手系という言葉を以前使ったが、ここでは一般の次元のベクトル空間 $V$ における「向き」という概念について考えてみよう。そもそもそのような概念がありえるかどうかが問題なので、「向き」とはどんなものであるべきかを反省するところからはじめなくてはならない。

右手系と左手系が違うというときには、右手の親指, 人差指, 中指という順番でできる $V = \mathbf{R}^3$ の基底と左手のそれらでできる基底とが違うということを経験的に知っていて、それを向きが違うと表しているわけである。ここで基底の順番 (親、人差、中) は本質的で、左手系で順番を逆にした (左中、左人差、左親) という組は右手系となる (たしかめよ)。

さて、右手系と左手系との違いを述べれば、

「右手系と左手系は裏返すことなしに重ね合わせることができない」

といえよう。このような違いは 3 次元のときだけで無く、1 次元のとき (直線に矢印を右向きにつけるか左向きにつけるか)、2 次元のとき (平面の 2 つの一次独立なベクトルを、1 つめのベクトルから見て 2 つめを時計回りにとるか反時計回りにとるか) においても同じである。

この違いを確かめるとき、頭の中では平行移動によりふたつの基底の原点を一致させたのち、一方から他方へ連続的に (回したり伸縮させて) 変形できるかどうかを考えている。そしてこの連続的変形においては、一次独立性を保ったままの変形を考えている。(たとえば 2 次元のとき、ふたつのベクトルが 1 直線上にそろってしまうような状態は途中に許さない。) そこで次の定義が作業仮説として得られる。

**定義 13** (向きという概念の満すべき性質) ベクトル空間 $V$ における向きとは、$V$ の順序のついた一次独立な $n$ 個のベクトル (基底) について定まるべき概念であり、次の性質を持つべきである：ふたつの順序のついた基底 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ と $w = (w_1, \cdots, w_n)$ とは基底であることを保ったまま連続的に変形できるとき同じ向きであり、 そうでなければ違う向きである。 □

このような性質を持つ概念が 4 次元以上でもありうるか我々はまだ知らないのだから、これは定義というよりむしろ「向きの満たすべき公理」というべきものである。

さて、ベクトルを成分表示し列ベクトルと考え、$n$ 個あるベクトルを左から順番にならべて行列をつくれば

$$\{ \text{順序のついた } n \text{ 個の一次独立なベクトルの組} \} = \{ n \text{ 次実正方行列} \} =: \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

と思うことができる。従って上の定義を満す概念があるかどうかという問題は、$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の 2 点 $v, w$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の中の連続曲線で結ぶ問題に帰着する:結べるときが同じ向きであるとすれば良い。これについて次が成り立つことを示すのがここでの目標である。

**定理 20**

$$\begin{aligned} &\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ の 2 点 } v, w \text{ を } \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ の中の連続曲線で結ぶことができる} \\ &\Longleftrightarrow \det(v) \text{ と } \det(w) \text{ が同符号。} \end{aligned}$$

□

したがって実ベクトル空間については[25] 次元 $n$ がいくつであっても、向きという概念が符号の分だけ、つまり正と負のふたつに対応してあることになる。これは $n = 1, 2, 3$ のときの経験とも一致する。そこであらためて

**定義 14** $v = (v_1, \cdots, v_n)$ と $w = (w_1, \cdots, w_n)$ とが同じ向き:$\Longleftrightarrow \det v \det w > 0$ □

と定義する。

注意。ここで「$\det v > 0$ のとき $v$ の向きは正」としたくなるが、そうしないのには理由がある。それについて述べよう。

はじめにあるのは $v_1, \cdots, v_n \in V$ という $n$ 個のベクトルの組である。「これをならべてできる行列の行列式」とさっき軽々と書いたけれども、ここで反省が必要なのである。行列を考えるためには、まずベクトルを成分表示しなくてはならない。それは $V$ の基底を一つ決めてはじめてできる。$V$ の基底を一つとり、$(u_1, \cdots, u_n)$ としよう。これを用いて $v_1, \cdots, v_n$ を成分表示して

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} u_j x_{ji}$$

としよう。このときできる $[x_{ji}]$ の行列式が正だったらはじめの $v$ の向きが正、と定義したとする。しかしこれには意味がない。たとえば $V$ の基底を $(u_1, \cdots, u_{n-1}, -u_n)$ にとりかえると行列 $[x_{ji}]$ は $n$ 行目が $-1$ 倍にかわり、したがって行列式 $\det[x_{ji}]$ (これをさっきから $\det v$ と書いていたのであった!) は符号がかわってしまう。つまり $v$ を成分表示してえられる行列の行列式は表示に用いた基底 $u_1, \cdots, u_n$ によってしまい、その正負もまたそうである。これが先の「$\det v > 0$ のとき $v$ の向きは正」という言い方に意味がない[26] といった理由である。もし正負を述べたければ基底 $u$ をひとつ選んだことを明記して「基底 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ に関して行列表示したとき $\det v > 0$ であれば $v$ の向きが正」というべきである。そしてこう書くと、これによって定義された正負は「$v$ の $u$ に関する向き」と呼ぶべきものでしかないことがわかる。[27]

そこで定義 14 に戻る。そこに $\det v$ などと書いたのは上の $\det[x_{ji}]$ などのことであり、ひとつ基底 $u$ をとってきまる。したがって、定義 14 は正確には

基底 $u$ を任意に一つとった上で「$v$ の $u$ に関する向き」と「$w$ の $u$ に関する向き」が同じとき $v$ と $w$ とは同じ向きだと定義する。

と書くべきであったし、

はじめにとった基底 $u$ を変えても $\det$ の正負は $v$ についても $w$ についても同時に変わり、したがって同じか違うかは基底 $u$ によらない。

ということを述べておくべきであった。 □(注意終り)

注意。 ついでに述べておけば、この空間に 3 つの矢印 $e_1, e_2, e_3$ をどう配置するかということにも全く必然はない。右手系だろうと左手系だろうと数学的には全く等価なものであるが、ただ習慣によって「$e_1$ を手前向きに書いたとして、$e_2$ は右向き、$e_3$ は上向き」という「右手系」を使うことが多いというだけの話である。

[25] 複素のときについては後述する。

[26] このような状態を ill-defined という。それに対して定義が問題なくうまくいっていることを well-defined という。

[27] ふつう $\mathbf{R}^n$ というとその元はすでに数が並んだものと考え基底はあまり意識にのぼらない、それでここで書いたこともわかりづらいかもしれない。しかし $\mathbf{R}^n$ の場合にも、よく考えてみれば上の $u$ にあたる基底を暗黙のうちに一つ決めて考えている。つまりこのベクトル空間が「$\mathbf{R}$ という 1 次元ベクトル空間を $n$ 個直和してできるもの」という定義によって、もとの $\mathbf{R}$ の基底 $(1)$ (=一成分のベクトルでその成分が 1 であるもの) からきまる基底 $(1, 0, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$ を標準的に持っているので、それによって成分表示しているのである。

物理学によれば、われわれの宇宙において「向き」を定義する方法があることが知られている。(すくなくとも局所的には；この向きを宇宙船に乗せてはるか遠くをぐるっと回ったらもとは逆の向きになってしまうかもしれない—これはこの宇宙の向きづけ可能性という問題。)「弱い相互作用」(たとえばベータ崩解)における「対称性の破れ」を用いるというのであるが、詳しくは Martin Gardner 著「自然界における左と右」(和訳：紀伊国屋書店、新版 1992 年)、特にその 22 節、をみよ。 □

## A.2 定理の証明

Step 0 定理の「$\Longrightarrow$」向き、つまり

$$v \text{ から } w \text{ に連続変形できるならば } \det(v) \text{ と } \det(w) \text{ は同符号}$$

は易しい。実際、$c(t)$ を $v$ と $w$ とを結ぶ $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の連続曲線とする：$c : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), c(0) = v, c(1) = w$。このとき $\det c(t)$ は、$\det v \in \mathbf{R}$ と $detu \in \mathbf{R}$ とを結ぶ $\mathbf{R}$ の連続曲線 (=連続関数) になるであろう。ここで $\mathbf{R}$ と書いたけれども、

問 **64** 示せ： $$\det(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) = \mathbf{R} - \{0\}.$$

であるから、実際には $\det v$ から $\det w$ へ至る $[0,1]$ から $\mathbf{R} - \{0\}$ への連続関数となる。ところが $\det v$ と $\det w$ とが異符号であれば $0 \in \mathbf{R}$ を乗りこえなくては他方へいけないのだから、このことは $\det v$ と $\det w$ とが同符号であることを意味する。□

問 **65** 上の最後の文のところをきちんと証明せよ。

したがって問題は、$\det$ の符号が同じなら連続曲線でつながるか ということになった。

Step 1 ここまで「連続曲線」の意味をはっきりさせないままやってきたが、ここで定義をきちんと述べておこう。

定義 **15** $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ における連続曲線とは、次の 2 つをみたすものをいう。

*1.* 写像 $c : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ が、$\forall t \in [0,1]$ について $c(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ をみたし、
*2.* $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ を $n^2$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n^2}$ と「すなおに」みなす[28] 、すると

$$c : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^{n^2}$$

とみることになるが、これが *($\epsilon - \delta$ 式の意味で)* 連続である。 □

問 **66** *1.* $x = [x_{ij}] \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ に対して、$\sum_{i,j=1}^{n} x_{i,j}^2 = \mathrm{tr}^t x \cdot x$ を示せ。つまり行列成分を座標と思って $x$ を $\mathbf{R}^{n^2}$ の元と考えたとき、

$$(x \text{ の大きさ})^2 = \mathrm{tr}^t x \cdot x.$$

*2.* 上の定義 *15* の条件 *2* を、$\epsilon - \delta$ 論法で用いたような論理式で表現せよ。

[28] ここで「すなおにユークリッド空間とみなす」というのは、もちろん行列の成分を $n^2$ 個の座標と思うのである。

問 **67** *1.* $c : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ を連続曲線、$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ とする。このとき $g \cdot c(t)$ はまた $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の連続曲線であることを示せ。

*2.* $v, w \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}^n)$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の連続曲線で結べるかどうかは、*1(*単位行列*)* と $v^{-1}w$ とが $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の連続曲線で結べるかどうかと同値であることを示せ。 □

Step 2 問 67 の 2. によって、$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の一般の元 $x(= v^{-1}w)$ が単位行列と連続曲線で結べるかどうかを解けばよいことになった。

そのための準備:

定義 **16** *(*上三角行列の群*)*

$$N := \left\{ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1n} \\ 0 & 1 & n_{23} & \cdots & n_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n_{2n} \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \middle| \, n_{12}, \cdots, n_{n-1,n} \in \mathbf{R} \right\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

とおく。 □

問 **68** 上の $N$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の部分群であることを示せ。

問 **69** *(*シュミットの直交化=$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の岩沢分解*)*

与えられた基底から正規直交基底をつくる「シュミットの直交化法」を読みかえることで次を示せ：任意の $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ に対して、

直交行列 $k \in \mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ 、

対角行列 $a = diag(a_1, \cdots, a_n)$ で $a_1, \cdots, a_n > 0$ であるもの、

上三角行列 $n \in N$

の組み $(k, a, n)$ がただひとつあって、

$$x = kan$$

とかける。この分解 $x = kan$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の場合の岩沢分解とよぶべきものである[29] 。

*[Hint:* 直交化法というのは、$x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^n$ が与えられたとき、

- $x_1$ を正規化し、これを $y_1$ とおく。
- $x_2$ に $x_1$ の何倍かを足して、$x_1$ と直交させる。それを長さでわって $y_2$ とおく。
- $x_3$ に $x_1, x_2$ の *1* 次結合を足して、$y_1, y_2$ と直交させる。それを長さでわって $y_3$ とおく。

... という手続きをくりかえして、直交基 $y_1, \cdots, y_n$ を得るものであった。*]* □

重要な注意。

$$A := \{a = diag(a_1, \cdots, a_n) | a_1, \cdots, a_n > 0\} \tag{126}$$

とおけば、問 69 で示したことは

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{O}_n \times A \times N \tag{127}$$

[29] 本来の岩沢分解は一般の「リー群」の場合の定理である。おおざっぱにいうと、各点のまわり (開近傍) が一定次元 $N$ のユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ と「同相」(連続な一対一写像で、その逆写像も連続なものがあることをいう) な空間のことを (実) 多様体といい、曲線や曲面の $N$ 次元版である。リー群というのは大体、群であって多様体でもあるもののこと、つまり「曲面」的な連続的構造をもった「連続的な群」のことである。たとえばここに出てくる $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \mathrm{O}_n, A, N$ などはみな (実) リー群である。

とも書ける。しかし、これは集合としての直積ではあっても、群としての直積を表すものではない。

実際群 $G$ が 2 個の部分群 $G_1, G_2$ の直積であるとは、

1. $G_1, G_2$ がたがいに可換であって、
2. $G = G_1 \times G_2$、つまりすべての元 $g \in G$ がひととおりに $g = g_1 g_2 (g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$ と書ける

のふたつが成り立つことをいい、「2 個」が「3 個」になってもまったく同様であるが、分解 (127) の場合条件 2 は成り立っていても、条件 1 が成り立たない。 □

問 **70** 上の注意にのべたことを示せ。

Step 3 岩沢分解をつかえば、問題の元 $x(= vw^{-1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ を $x = kan$ とあらわしておき、$k, a, n$ がそれぞれ $\mathrm{O}_n, A$(式 126), $N$ の中で単位行列と結べるかどうかを考えればよいことになる。そこで問題は以下の 3 つに分解された：

$\mathrm{O}_n$ が弧状連結[30] であるかどうか、$A$ はどうか、$N$ はどうか。

問 **71** *(群 $A$ の弧状連結性)* 式 *(126)* で定義される $A$ について、

*1.* $A$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の部分群であることを示せ。

*2.* $A$ の任意の元 $n$ と 単位行列 1 とは、$N$ の中の連続曲線でかならず結べることを示せ。

問 **72** *(上三角行列の群 $N$ の弧状連結性)*

$N$ の任意の元 $n$ と 単位行列 1 とは、$N$ の中の連続曲線でかならず結べることを示せ。

従ってあとは直交群 $\mathrm{O}_n$ の部分だけの問題となるが、これについては前に説明した「オイラー角」の方法で片づく。

問 **73** *(2 次、3 次の直交群が弧状連結でないこと)*

*1.* *2* 次の直交群が弧状連結でないことを、ふたつ以上の方法で示せ。

*2.* *3* 次の直交群が弧状連結でないことを示せ。*[Hint:* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{O}_3$ とする。$x_3$ に注目すると、これを ${}^t(0,0,1)$ と一致させる「回転」がある。 そしてこの回転ののち第 *1* 列、第 *2* 列は ${}^t(0,0,1)$ と直交するので、*2* 次の場合に帰着する。*]*

問 **74** *(直交群が弧状連結でないこと)* 直交群 $\mathrm{O}_n$ の元 $x$ について次を示せ：

*1.* $\det x > 0$ であれば、$x$ と 単位行列とを結ぶ連続曲線が存在する。

*2.* $\det x < 0$ であれば、$x$ と $diag(1, \cdots, 1, -1)$ を結ぶ連続曲線が存在する。

*[Hint:*前問*.]*

以上をまとめると次のようになり、定理の証明がおわる。

問 **75** 実一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の任意元 $x$ について、

*1.* $\det x > 0$ であれば、$x$ と 単位行列とを結ぶ連続曲線が存在する。

*2.* $\det x < 0$ であれば、$x$ と $diag(1, \cdots, 1, -1)$ を結ぶ連続曲線が存在する。

これを示せ。

□

[30] 「2 点がかならず連続曲線で結べる」ということを位相空間論のことばでこう表わすのであった。

## A.3　複素ベクトル空間の向き

### A.3.1

ここまでは実ベクトル空間の向きを考えてきたが、複素ベクトル空間についてはどうだろうか。

複素 2 次元の空間すら実 4 次元でわれわれには見えないから、これは直観では予測が困難な問題である。唯一見える 1 次元のとき=複素数平面のときも、実 2 次元の平面と考えて生ずる向きのほかに「複素的向き」というべきものがありうるかどうか考えてみるのは有益であろう。

はじめの、「向きがみたすべき性質」(定義 13) は複素の時でも課すべきであると考える。するとさっきと同じく、問題は $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の中で 2 元がいつ結べるか、あるいは単位行列と他の元がいつ結べるか という問題に帰着する。定理 20 に対応する事実は、今度は次のようになる。

**定理 21** *(複素一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の連結性)* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の *2* 元は、常に $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の連続曲線で結ぶことができる。 □

この定理を認めると、「複素的向き」という概念は存在しない、あるいはもし定義しても「どのふたつの基底もその「複素的向き」はたがいに同じである」ということになってしまい何の役にも立たない、ということになる！

**問 76** *(定理 21 を説明するための準備)*

*1.* 実 *2* 次元ベクトル空間 $V := \mathbf{R}^2 = \{{}^t(a,b) | a,b \in \mathbf{R}\}$ と、その部分空間 $W := \{{}^t(a,0) | a \in \mathbf{R}\}$ を考える。$V$ から $W$ を除いた集合 $V - W$ から任意に *2* 点をとるとき、それらが連続曲線で結べるかどうか考え、証明せよ。

*2.* 複素 *2* 次元ベクトル空間 $V := \mathbf{C}^2 = \{{}^t(a,b) | a,b \in \mathbf{C}\}$ と、その部分空間 $W := \{{}^t(a,0) | a \in \mathbf{C}\}$ を考える。$V$ から $W$ を除いた集合 $V - W$ から任意に *2* 点をとるとき、それらが連続曲線で結べるかどうか考え、証明せよ。

*[Hint: $V = \mathbf{C}^1$, $W = \{0\} \subset V$ のときはどうか？絵を書いて考えよ。]*

**問 77** *1.* 集合 $D := \{x \in \mathrm{Mat}_n | \det x = 0\}$ は、何次元の空間であると考えられるか。

*[Hint:* 次元=「自由度の数」。複素の *1* 自由度は実の *2* 自由度にあたると考えられる。*]*

*2.* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}) - D$ に注目して、問 *76* を参考に定理 *21* を証明せよ。

### A.3.2

さて、「複素的向き」というのがないことはわかった。しかし、複素数平面を実 2 次元ベクトル空間と思って向きを考えられるように、複素 $n$ 次元ベクトル空間を実 $2n$ 次元ベクトル空間と思ってその向きを考えることはできる。そのことについて以下の問 78、79 で説明しよう。

**問 78** $V$ を複素 $n$ 次元ベクトル空間とし、そのひとつの基底を $(v_1, \cdots, v_n)$ とする。

*1.*$V$ を実ベクトル空間と見るとはどういうことか、定義を述べよ。

*2.*$V$ を実ベクトル空間とみたものを $V_{\mathbf{R}}$ と書こう。$V_{\mathbf{R}}$ において、$2n$ 個のベクトル

$$(v_1, \cdots, v_n, \sqrt{-1}v_1, \cdots, \sqrt{-1}v_n)$$

を考えると、この $2n$ 個は $\mathbf{R}$ 上一次独立であることを示せ。

これより、$V_{\mathbf{R}}$ が実 $2n$ 次元ベクトル空間であることがわかる。

問 **79** *1.* $V = \mathbf{C}^n$ とし、$v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ をその一つの基底とする。$\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) + \sqrt{-1}\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ と見て、$v = x + \sqrt{-1}y, x, y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ と書く。前問のようにして、実ベクトル空間 $V_{\mathbf{R}}$ の基底 $(v, \sqrt{-1}v) = (v_1, \cdots, v_n, \sqrt{-1}v_1, \cdots, \sqrt{-1}v_n)$ をつくれば、

$$(v_1, \cdots, v_n, \sqrt{-1}v_1, \cdots, \sqrt{-1}v_n) = (e_1, \cdots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \cdots, \sqrt{-1}e_n) \cdot \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

$$(z := \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbf{R}))$$

とかける。このとき $z \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ であり、さらに $\det z > 0$ であることを示せ。

*2.* $V$ を複素 $n$ 次元ベクトル空間とし、$v = (v_1, \cdots, v_n)$ と $w = (w_1, \cdots, w_n)$ をそのふた組の基底とする。これらから前問 *2.* のようにして $V_{\mathbf{R}}$ の基底をふた組つくると、それらは同じ向きを定める。これを示せ。

このようにして、複素ベクトル空間 $V$ に対してはそれを実ベクトル空間とみた $V_{\mathbf{R}}$ に標準的に向きが導入できる。 □