恒等式の背後には... *

長谷川浩司 (東北大学理学研究科) †

目次

1　本日のネタ

数学は好きですか？好きでなきゃここにいないですよね？

今日はオイラー (1707-1783) が見つけ、あの「フェルマの大定理」と同じく時代時代にリバイバルをして、つぎつぎとあたらしい世界を見せ続けてきた、ひとつの恒等式の話をします。

さっそく、その式を紹介しましょう：

定理 1 (オイラー、1741 年に発見) [1]

$$
\begin{aligned}
& (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)\cdots \\
= \ & \cdots - q^{12} + q^5 - q^1 + 1 - q^2 + q^7 - q^{15} + \cdots . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

---

*この原稿は 1994.8.20-24 の「仙台数学セミナー」(川井数理科学財団) の予稿に手を加えたものであり, 猪狩惺・編著「数学って何だろう」日本評論社 (1997) におさめられた。

†仙台市荒巻字青葉；kojihas@math.tohoku.ac.jp

[1] 「オイラーの５角数定理」とよばれることがあります。数学セミナー別冊「数学のたのしみ」第 2 号 p.76 の山田泰彦さんの記事に、この名の由来がわかる図がでています。

この式の説明をします。まず左辺は無限個のかけ算です。正の整数

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$$

ごとに

$$1-q, 1-q^2, 1-q^3, 1-q^4, 1-q^5, 1-q^6, \cdots$$

を考えて、全部 (無限個！) 掛けあわせるのです。

右辺は左辺の無限個のカッコを外したらこうなる、という結果で、無限個の足し算です。今度は負から正まで、整数ぜんぶ

$$\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

のそれぞれに対して、

$$\cdots - q^{12}(-3\,\text{番目}), q^5(-2\,\text{番目}), -q^1(-1\,\text{番目}), 1(0\,\text{番目}), -q^2(1\,\text{番目}), q^7, -q^{15} \cdots$$

を考えて足しなさいというのですが... 符号が交互にかわるのは良いとして、

疑問。一体 4 番目は何を足すの？ 4 番目は 5 番目は -4 番目は -5 番目は??

–実はそれが問題なのであって、オイラーの定理が主張するところは、

$$\text{答。}\mathbf{n}\,\text{番目ハ、}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}\text{デアル！} \tag{2}$$

というのです。$n = -4, -3, \cdots, 2, 3, 4$ のとき、$\frac{3n^2+n}{2} = 22, 12, 5, 1, 0, 2, 7, 15, 26.$ だから (1) の右辺でもうひとつ左側を補うならそれは $+q^{22}$, 右側なら $+q^{26}$, というわけです。

2　難しいの？

どこがすごいんだかわからないぞーーー という人のために。

まあやってみませう。まずは

$$1-q = 1-q, \tag{3}$$

$$(1-q)(1-q^2) = 1-q-q^2+q^3, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(1-q)(1-q^2)(1-q^3) &= (1-q-q^2+q^3)(1-q^3) \\ &= (1-q-q^2+q^3) \\ &\quad -(q^3-q^4-q^5+q^6) \\ &= 1-q-q^2+q^4+q^5-q^6,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4) &= (1-q-q^2+q^4+q^5-q^6)(1-q^4) \\ &= (1-q-q^2+q^4+q^5-q^6) \\ &\quad -(q^4-q^5-q^6+q^8+q^9-q^{10}) \\ &= 1-q-q^2+2q^5-q^8-q^9+q^{10}.\end{aligned} \tag{6}$$

さてさて、規則性がみえますか？(まだまだ？もういっちょう？)

$$\begin{aligned}
& (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5) \\
= \; & (1-q-q^2+2q^5-q^8-q^9+q^{10})(1-q^5) \\
= \; & (1-q-q^2+2q^5-q^8-q^9+q^{10}) \\
& -(q^5-q^6-q^7+2q^{10}-q^{13}-q^{14}+q^{15}) \\
= \; & 1-q-q^2+q^5+q^6+q^7-q^8-q^9-q^{10}+q^{13}+q^{14}-q^{15}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6) \\
= \; & (1-q-q^2+q^5+q^6+q^7-q^8-q^9-q^{10}+q^{13}+q^{14}-q^{15})(1-q^6) \\
= \; & (1-q-q^2+q^5+q^6+q^7-q^8-q^9-q^{10}+q^{13}+q^{14}-q^{15}) \\
& -(q^6-q^7-q^8+q^{11}+q^{12}+q^{13}-q^{14}-q^{15}-q^{16}+q^{19}+q^{20}-q^{21}) \\
= \; & 1-q-q^2+q^5+2q^7-q^9-q^{10}-q^{11}-q^{12}+2q^{14}+q^{16}-q^{19}-q^{20}+q^{21}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

このつぎは $(1-q^7)$ を掛ける番ですが、この辺でちょっと観察をすると、

1. 次に $(1-q^7)$ を掛けると q^7 の係数は 2 からひとつ減って 1 になる。$(1-q^8), (1-q^9), (1-q^{10}), \cdots$ は q^7 の係数に影響しないから、次でようやく q^7 までの係数が確定する。(やっと 5 項 !!)。なお、いくらはじめの方しか確定した意味がなくても、最終結果を得るには長々しいこれらの式が最後の項まで必要で、ううむコノヤロウというところである。
2. 同様に、$(1-q^8)$ まで掛けて q^8 までの係数が、$(1-q^9)$ まで掛けて q^9 までの係数が、$\cdots$ と決まってゆく。
3. 式 (8) に出てくる項は 14 項。一方、単純に (ナントカひくナントカ) の形の式を 6 個掛けてカッコを外したら $2^6=64$ 項でてきておかしくない。現れている項はたいへん少ないといえる。更には、生き残った項の係数は ±1 のどっちかである。はじめに結論 (定理の式) を紹介してしまったから不思議さがうすれているかもしれないが、途中ではたしかに 2 も出てくるのにやがて消えて±1 (か、0) になる。もっと先を計算すると、2 だけでなく 3 でも 4 でも$\cdots$でてくるが、やはり「確定項」については ±1 しか現れない。おもしろいことである。
4. ちなみに、今の段階でおわりの項は q^{21} で、$21=1+2+3+4+5+6=\frac{6(6+1)}{2}$ だったのが、次には q^{28}, $28=1+2+3+4+5+6+7=\frac{7(7+1)}{2}$ になる。

さて、1. でいったように、ここまででではやっとはじめの 4 項がきまったに過ぎません。次に $(1-q^7)$ を掛けてきまる 5 項目をあわせても、

$$1=q^0, -q, -q^2, q^5, q^7 \qquad (9)$$

で、「次ガ何デアルカ？n 番目ハ?? 」という問にはまだまだ答えられません。仕方ないので、もうすこし続けてみます。途中の計算は略。(できるかぎり自分で手を動かしてみること！)

$$\begin{aligned}
& (1-q)\cdots(1-q^7) \\
= \; & 1-q-q^2+q^5+q^7+q^8-q^{10}-q^{11}-2q^{12}+2q^{16}+q^{17}+q^{18} \\
& -q^{20}-q^{21}-q^{23}+q^{26}+q^{27}-q^{28},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (1-q)\cdots(1-q^{8}) \\
=\ & 1-q-q^2+q^5+q^7+q^9-q^{11}-2\,q^{12}-q^{13}-q^{15}+q^{16}+q^{17}+2\,q^{18}+q^{19} \\
& +q^{20}-q^{21}-q^{23}-2\,q^{24}-q^{25}+q^{27}+q^{29}+q^{31}-q^{34}-q^{35}+q^{36},
\end{aligned}
$$

実は手でやるのは常人にとってはそろそろ苦痛な段階です。

$$
\begin{aligned}
& (1-q)\cdots(1-q^9) \\
=\ & 1-q-q^2+q^5+q^7+q^{10}-2\,q^{12}-q^{13}-q^{14}-q^{15}+q^{17}+q^{18}+q^{19} \\
& +2\,q^{20}+q^{21}+q^{22}-q^{23}-q^{24}-2\,q^{25}-q^{26}-q^{27}-q^{28} \\
& +q^{30}+q^{31}+q^{32}+2\,q^{33}-q^{35}-q^{38}-q^{40}+q^{44}+q^{43}-q^{45},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (1-q)\cdots(1-q^{10}) \\
=\ & 1-q-q^2+q^5+q^7 \\
& +q^{11}-q^{13}-q^{14}-2\,q^{15}-q^{12}+q^{19}+q^{18} \\
& +q^{20}+q^{21}+3\,q^{22}-q^{25}-q^{26}-2\,q^{27}-2\,q^{28}-q^{29} \\
& -q^{30}+3\,q^{33}+q^{34}+q^{35}+q^{36}+q^{37} \\
& -2\,q^{40}-q^{41}-q^{42}-q^{43}+q^{44}+q^{48} \\
& +q^{50}-q^{53}-q^{54}+q^{55},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (1-q)\cdots(1-q^{11}) \\
=\ & 1-q-q^2+q^5+q^7 \\
& -q^{14}-2\,q^{15}-q^{16}+q^{19} \\
& +q^{20}+q^{21}+2\,q^{22}+q^{23}+q^{24}+q^{26}-2\,q^{27}-2\,q^{28}-2\,q^{29} \\
& -2\,q^{30}-q^{31}-q^{32}+q^{34}+q^{35}+2\,q^{36}+2\,q^{37}+2\,q^{38}+2\,q^{39} \\
& -q^{40}-q^{42}-q^{43}-2\,q^{44}-q^{45}-q^{46}-q^{47} \\
& +q^{50}+2\,q^{51}+q^{52}-q^{59}-q^{61}+q^{64}+q^{65}-q^{66}
\end{aligned}
$$

従って、次の段階で

$$
(1-q)\cdots(1-q^{12})\times\cdots = 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}+\text{高次の項} \tag{10}
$$

と、$-q^{12}$ が確定した項として出てくることがわかります。(ふう！) しかし、これでも (9) の 5 つに続く 6 つ目がやっとわかったにすぎない !!

というわけで、

「(1) の右辺は (2) のルールで与えられる」

と見切ることのすごさがわかってくるというものです。もっともオイラーは $(1-q^{51})$ まで掛けて (！) この式を予想したのでしたが...1741 年のことといわれています。

ここで、18 世紀最大の数学者ともいわれる、そのオイラー先生の略歴を紹介しておきましょう :

レオンハルト・オイラー (1707-1783)。スイスのバーゼルに生れ、はじめ牧師になるつもりで 1720 バーゼル大学の哲学科に入ったあと 1723 数学科に入る。父パウルと同じく、多くの数学者

を出したベルヌイ家 (特にジャン－ベルヌイ1世) に学び、両家の親交は深かった。1727、女帝エカテリーナ一世の創設したサンクト・ペテルブルクへ : ベルヌイ家の人々の推薦によりアカデミー会員となる。(このことが現在世界をリードしているロシアの数学研究の発祥といえるかもしれない。) 1730- ペテルブルク大教授、1735 右目を失明。1744 フリードリヒ大王がベルリン・アカデミーをつくり、数学部長として招かれる。しかし数学を応用して作曲をしてみよなどといった大王の気紛れにつきあわされ、大変であったという。1766 エカテリーナ二世の招きで再度ペテルブルクへ。このとき彼の荷を載せた船が沈没し、相当の手敲が失われた。1771 左目に病を得、この手術に失敗し完全に盲目となる。しかし研究は続き、生涯に書いたおびただしい論文の全集はいまでも全ては出版されていない。1783 の死の当日も研究していたという。

一筆書きの可能性の問題からいわゆるオイラー数を、楕円の弧長の研究では弧長の等分の作図を、数論では平方剰余の相互法則やゼータ函数の函数等式を発見し、フェルマの大定理の 3 次、4 次の場合を証明。力学でも運動方程式を初めて陽に書いた他、最速降下線の問題の解決、流体力学の基礎などに貢献。口下手だったともいうが、その著作は思考の道筋を丁寧に述べており教育的暖かみがある。1748 の「無限小解析学入門」では等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が述べられた他、無限級数や無限乗積をたくみに使って、それらの間の様々な恒等式を発見。後世に非常に大きな影響を与え、それらの真の意味を探る研究が現在も続いている...。

3 賢い証明

オイラーがこの恒等式を見つけてから、証明まで 10 年かかったと伝えられています。彼のもとの証明にも興味はありますが、それはたとえば文献 [Weil1],p277 を見てもらうことにして、ここではふたつの性格のちがう別証明をくらべ眺めてみることにしましょう。この章ではそのうち第一のものを紹介します。[2]

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots$$

のカッコを外したとき、q^n がいつ出て来るかを考えます。

まず q^0 は全部のかっこから 1 をえらんでかけることでしか出てこないから、その係数は 1、これはあたりまえ。

n が 1 以上とすると、$\pm q^n$ は、n を異なる自然数の和として

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad (1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n)$$

と書く書き方だけ出てきて、k の偶奇にしたがって $+q^n$ か $-q^n$ かとなります。このような組 $(n_1, \cdots, n_k)$ を n の**分割**と呼ぶことにしましょう。

さて、分割というのは足して n になることを忘れてしまえば単調増加する数列というだけのことです。勝手な数列については和の n も勝手になるとしかいいようがないでしょう。定理のような規則性 ($n = \frac{3k^2+k}{2}$,k は整数、という指数だけしか現れない) があるということは、なにか規則性のある分割についての項以外は打ち消しあってしまうことを意味します。では、そのような規則性のある分割とはどんなものであるべきか？

[2] むかし [クヴァント] にあった証明を書きなおしたのですが、先輩の Y.Y. さんに F.Franklin による証明 (1881) と教わりました。[Andrews, “Theory of partitions”, Adison-Wesley, pp9-12 参照。]

数列を足して２次式が出てくるといえば、等差数列があります。一番簡単な公差１の時、つまり $(k+1,\cdots,k+s)$ (初項が $k+1$、項数が s) の場合を考えます。と、和の公式から

$$(k+1)+\cdots+(k+s)=sk+\frac{s(s+1)}{2}.$$

ここで $s=k$ とすると、和は

$$k^2+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{3k^2+k}{2}.$$

だから $k=1,2,3,\cdots$ とすれば定理の右辺の「右半分」が出てくる！

もうすこし頑張ると、

$$k+(k+1)+\cdots+(2k-1)=\frac{3k^2-k}{2}$$

なので、この分割 $(k,k+1,\cdots,2k-1)$ から「左半分」の $-k$ 番めの項が出てきます。そこで

$(k,k+1,\cdots,2k-1),(k+1,k+2,\cdots,2k)$ 以外の分割からの寄与はうちけしあう

がいえれば証明がおわることがわかりました。[3]

上の２つの形の分割を「A 型」ということにして、残りを「B 型」ということにしましょう。A 型の分割とは、公差 1、項数 k で、初項が k または $k+1$ のものといえます。項数 k の分割 $(n_1,\cdots,n_k)$ の公差 1 の等差数列からの「ずれ」を見るために、**分割の長さ** s を、

分割 $(n_1,\cdots,n_{k-1},n_k)$ の後側に注目したとき、$(n_{k-s+1},\cdots,n_{k-1},n_k)$ (項数は s) が公差 1 の等差数列で、$(n_{k-s},\cdots,n_k)$ (項数は $s+1$) はもう等差数列でない、そのような s のこと

とします。たとえば

$$\begin{aligned}
12 &= 2+4+\underline{6}\cdots \text{長さ } s=1;\\
12 &= 1+\underline{5+6}\cdots \text{長さ } s=2;\\
33 &= 4+5+\underline{7+8+9}\cdots \text{長さ } s=3
\end{aligned}$$

等。すると分割の A 型、B 型というのは、長さを s, 項数を k, 初項を n_1 と書くとき、

- A 型　　$s=k=n_1$, または $s=k=n_1-1$。
- B 型　　それ以外。

です。B 型をさらに次のふたつにわけます。

- B1 型　　$n_1\le s$ だが、$s=k=n_1$ でないもの。
- B2 型　　$n_1>s$ だが、$s=k=n_1-1$ でない。

こう分けるとどんな良いことがあるでしょうか？B1 型の分割 $(n_1,\cdots,n_k)$ に対して、はじめの数 n_1 をとりさり、代りにうしろの n_1 個の数を 1 増やした n の分割

$$\begin{cases}(n_2,\cdots,n_{k-n_1},n_{k-n_1+1}+1,\cdots,n_k+1) & : k-n_1>1 \text{ のとき}\\ (n_2+1,\cdots,n_k+1) & : k-n_1=1 \text{ のとき}\end{cases}$$

を考えます。するともともと B1 型ゆえ $s\ge n_1$ だから、(できた分割の長さ) $=n_1<n_2\le$ (できた分割の先頭の数) です。つまり B2 型の分割になっています。

[3] ここまでの考察にしてもなかなか思いつけるものではなく、時間がかかるものです。

逆に、B2 型の n の分割 $(n_1, \cdots, n_k)$ に対して、その「長さ」を s とするとき、「先頭に s をつけて、かわりにうしろの s 個を -1 した」

$$\begin{cases} (s, n_1, \cdots, n_{k-s}, n_{k-s+1}-1, \cdots, n_k - 1) & : k-s>0 \text{ のとき} \\ (s, n_1 - 1, \cdots, n_k - 1) & : k-s=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を考えます。これは B1 型になっています (確かめること)。このふたつの対応は互いに逆になっており、また分割に使われる数の個数 (k のこと) が 1 だけ違うものどうしを対応させています。したがって、k の偶奇で符号がきまったことを思いだすと、B1 型の分割からくる項と B2 型の分割から来る項はたがいに消しあいます。そしてのこりは A 型の分割から来る項だけ。これが実はいいたいことでした。

証明終り！

4 別の見方

今の証明は実に巧妙というべきですが、なんだかパズルを一つ解いてそれでおしまいといった感もあります。しかしオイラーの恒等式はもっといろいろな世界とつながりがあって、これでおわっては勿体ないものです。そこで、次にその辺の気持がつたわるような証明を紹介しましょう。[4]

4.1 2 項定理の類似

2 項定理というのは、おなじみ (？) の

$$(1+x)^0 = 1,$$
$$(1+x)^1 = 1+x,$$
$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3,$$
$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$
$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5,$$
$$\cdots$$

という展開のことです。一般に $(1+x)^n$ はどうなるか？$(1+x)^n$ における x^k の係数は、n 個ある $(1+x)$ のうちから x をどう k 個選んで掛けあわせるかの選びかたの数だけ、つまり

$$n \text{ 個のものから } k \text{ 個を選ぶ組み合わせの数} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{11}$$

[4] ガウスの証明といって良いと思いますが、アーベルやヤコビも知っていたでしょう。彼らの思考と生態については文献 [史談] でとりわけ面白く知ることができます。またガウスについては [ダニングトン] が定評あるすぐれた伝記です。なお、この章の内容はかなりの部分が、1997 年創刊された「数学の楽しみ」(数セミ別冊、日本評論社) 第 2 号の、三町勝久さんの記事「q-特殊函数序説」と重なっています。より進んだ立場を理解するために、こちらもぜひお読みください。なお創刊号には、オイラーの研究した「ゼータ函数」とその「函数等式」についての梅田亨さんの解説「円とゼータ」もありますが、この章の話は昔梅田さんから聞いた話をもとにしています。[梅田]

です。これを 2 項係数というのでした。(高校では ${}_nC_k$ と書くことになってますが、一見ベクトルみたいに見えるこっちが実は世界標準。) すなわち

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n \tag{12}$$

です。この右辺は「和の記号」$\sum$ を使って[5]

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

と書くと簡潔ですが、記号 $\sum_{k=0}^{n}$ は $k = 0, 1, \cdots, n$ それぞれに対応する項を考えて足しなさいという意味です。

さて、これをちょっと変えて、

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\cdots(1+xq^{n-1}) = ?$$

を考えます。こんどは積の繰り返しが (ナントカ)^n と書けないので、さっきの「和の記号」を見習い、「積の記号」$\prod$ を使うことにします[6]。すると

$$\text{左辺} = \prod_{k=0}^{n-1}(1+xq^k)$$

と書けます。

$$\prod_{k=0}^{0}(1+xq^k) = 1+x,$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{1}(1+xq^k) &= (1+x)(1+qx) = 1+(1+q)x+qx^2 \\
&= 1+\frac{1-q^2}{1-q}x+qx^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{2}(1+xq^k) &= 1+(1+q+q^2)x+(q+q^2+q^3)x^2+q^3x^3 \\
&= 1+\frac{1-q^3}{1-q}x+\frac{1-q^3}{1-q}qx^2+q^{1+2}x^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=0}^{3}(1+xq^k) \\
&= 1+(1+q+q^2+q^3)x+(q+q^2+2q^3+q^4+q^5)x^2+(q^3+q^4+q^5+q^6)x^3+q^6x^4 \\
&= 1+(1+q+q^2+q^3)x+\left(1+q^2\right)\left(1+q+q^2\right)qx^2+(1+q+q^2+q^3)q^3x^3+q^6x^4 \\
&= 1+\frac{1-q^4}{1-q}x+\frac{(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q^2)(1-q)}qx^2+\frac{1-q^4}{1-q}q^{1+2}x^3+q^{1+2+3}x^4,
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

[5] この記号 $\sum$ はギリシャ文字でシグマとよぶ、アルファベットの S にあたる、S=summation(和)。

[6] $\prod$(パイ)=やはりギリシャ文字で P にあたる、P=product(積)。円周率の π はこの小文字で、periphery (円周) からきているらしい。

答を書くために記号を用意します。$(1-q^{\cdot})$ の形の比が意味ありげに現れていますが、これをまとめてかくためのものです。

記号：

$$
\begin{aligned}
[n] &:= \frac{1-q^n}{1-q}\,(= 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}),\\
[n]! &:= [n][n-1][n-2]\cdots[2][1],
\end{aligned}
$$

として、

$$
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}
$$

と定めます。$[n]$ は $q=1$ のとき n と一致し、従って $q=1$ では $[n]!$ は $n!$ に、$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は $\binom{n}{k} = {}_nC_k$ になります。カタイかっこ $[\,]$ がついたのはそうでないものの「類似品」といったところです。

これを用意しておくと、答は次のとおり：

定理 2 (2 項定理 (12) の q 類似)

$$
\begin{aligned}
&(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\cdots(1+xq^{n-1})\\
&= 1+\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}q^1x^2+\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}q^{1+2}x^3+\cdots+\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}q^{1+2+\cdots+(n-1)}x^n.
\end{aligned}
$$

あるいは、$\sum$ や $\prod$ を使えば、同じことですが

$$
\prod_{k=0}^{n-1}(1+xq^k) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k
$$

です。ここで、$1+2+\cdots+(k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ を使いました。

いきなり結果を書いてしまいましたが、まずは n が $1,2,3$ のとき、さっきの式と一致することを確かめてみて下さい。

証明の方法を 2 つ書いておきます。

$\boxed{\text{方法 1}}$ $q=1$ のとき、2 項係数$\binom{n}{k}$ が、「パスカル三角形のルール」

$$
\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{13}
$$

で決まることは知っているでしょう。これは $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$ と見て出てくるわけですが、逆に (13) を知っていれば、

$$
\begin{aligned}
& (1+x)^n(1+x)\\
= \;& (1+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n)\\
+ \;& \qquad (x+\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^{n+1})\\
= \;& 1+\binom{n+1}{1}x^1+\binom{n+1}{2}x^2+\cdots+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

と帰納法がきいて、パスカル・ルールと 2 項定理は同値です。

これをそっくりまねすれば定理が証明できます。(13) にあたる漸化式は

$$
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{14}
$$

です。まずこれを確かめておき、あとは上と同様に計算、証明終り。

$\boxed{\text{方法 2}}$：差分作用素による方法 (微分を知っている人向け)。

普通の 2 項定理の証明を微分をつかってやる方法があるので、まずその説明をします。$(1+x)^n$ は n 次の多項式だから、

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

とおけます。$c_0, c_1, \cdots, c_n$ を決めるのに、

- まず $x=0$ としてみる。すると $1 = c_0$ が出る。
- 次に両辺を一回微分して、$x=0$ とする。微分すると

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1},$$

  これで $x=0$ とすれば、$n = 1 \cdot c_1$ がわかる。
- もう一回微分すると、

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) c_k x^{k-2},$$

  これで $x=0$ とすれば、$n(n-1) = 2(2-1)c_2$、故に

$$c_2 = \frac{n(n-1)}{2(2-1)} = \binom{n}{2}.$$

- これを n 回繰り返せば、つぎつぎと c_k がきまる。

これをまねしようというのです。

しかし、微分は $(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)$ と相性が良くありません。実際やってみればわかりますが、さっきは $(1+x)(1+x)\cdots(1+x)$ と全部同じだったので、微分してもまた同じ形 (積の因子がひとつへるだけ) でしたが、今回はそうはいきません。そこでいろいろいじってみて、次のような解決に (苦闘の後に) 到達します。

多項式 $f(x)$ に対して、

$$(Df)(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \tag{15}$$

とおきます。これは微分の時に考える

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

に似ていますが、x をタシザンでずらすのでなく、q 倍だけのカケザンでずらすところがちがいます。

そこを強調して、この Df のことを、「f の q 差分」とよび、また D そのものは「q 差分作用素」といいます。f に対して f の q 差分を対応させる「作用」の「モト」という気持です。

この演算に関して、

$$\begin{aligned} D(x^k) &= \frac{(qx)^k - x^k}{qx - x} = \frac{q^k - 1}{q - 1} x^{k-1} \\ &= [k] \cdot x^{k-1} \end{aligned} \tag{16}$$

です。

$$f(x)f(qx)\cdots f(q^{n-1}x) \qquad \text{のことを} \qquad f(x)^{[n]}$$

と書くことにすれば、(16) からつぎの公式が出ます。

$$\begin{aligned} D(x^{[k]}) &= D(q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k) = q^{\frac{k(k-1)}{2}}[k]x^{k-1} = [k]q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}x^{k-1}\cdot q^{\frac{k(k-1)}{2}-\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \\ &= [k]\,q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}x^{k-1}\cdot q^{k-1} = [k](qx)^{[k-1]}. \end{aligned}$$

これより

$$D((1+x)^{[n]}) = [n](1+qx)^{[n-1]} \tag{17}$$

もでます。ここで出てきた $(1+x)^{[n]}$ は、具体的に書けば $(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)$ で、考えている定理の式の左辺そのものです。

これを使うと次のように計算が進みます。さっきと同じように

$$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)(=(1+x)^{[n]}) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{[k]}$$

とおいておきます。x^k の代わりに $x^{[k]}$ を使っているので、示すべきことは $c_k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ です。

- まず両辺で $x=0$ とする。$1=c_0$ が出る。
- 両辺を「q 差分」する。左辺で (17)、右辺で (16) を使えば

  $$[n](1+qx)^{[n-1]} = \sum_{k=1}^{n} c_k[k](qx)^{[k-1]},$$

  $x=0$ とすれば $[n]=c_1[1]$、よって $c_1 = \frac{[n]}{[1]} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$.
- もういっちょう：また両辺を「q 差分」して

  $$[n][n-1](1+x)^{[n-2]} = \sum_{k=2}^{n} c_k[k][k-1](q^2x)^{[k-2]},$$

  $x=0$ とすれば $[n][n-1]=c_2[2][1]$、$c_2 = \frac{[n][n-1]}{[2][1]} = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$.
- 以下同様！

4.2 無限への移行：ヤコビの 3 重積, そしてオイラーの式

さて、いいかげん疲れているかもしれないけれど、いよいよオイラーの式をだせるところに来ました。ここまででわかったことは

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\cdots(1+xq^{n-1})$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} q^1x^2 + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} q^{1+2}x^3 + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{1+2+\cdots+(n-1)}x^n.$$

あるいは、

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+xq^k) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k$$

でした (定理 2)。

ここで $n = 2N$ とし、x を $q^{[illegible]} x$ におきかえると、次の式になります (たしかめよ)。

$$\prod_{k=1}^{N}(1+q^{\frac{2k-1}{2}}x)(1+q^{\frac{2k-1}{2}}x^{-1}) = \sum_{k=-N}^{N}\begin{bmatrix}2N\\N+k\end{bmatrix}q^{\frac{k^2}{2}}x^k.$$

ここで、右辺にあらわれた $\begin{bmatrix}2N\\N+k\end{bmatrix}$ について、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}2N\\N+k\end{bmatrix} &= \frac{(1-q^{N-|k|+1})\cdots(1-q^{2N})}{(1-q)\cdots(1-q^{N+|k|})}\\ &= \frac{(1-q^{N-|k|+1})\cdots(1-q^{2N})}{(1-q)\cdots(1-q^{N})\cdot(1-q^{N+1})\cdots(1-q^{N+|k|})}\end{aligned}$$

なので、この式は

$$\prod_{k=1}^{N}(1-q^k)(1+q^{\frac{2k-1}{2}}x)(1+q^{\frac{2k-1}{2}}x^{-1}) = \sum_{k=-N}^{N}\frac{(1-q^{N-|k|+1})\cdots(1-q^{2N})}{(1-q^{N+1})\cdots(1-q^{N+|k|})}q^{\frac{k^2}{2}}x^k.$$

とも書けます。この $N\to\infty$ の極限を考えます。このとき両辺が発散しないために $|q|<1$ という条件で考えることになり、すると

$$\frac{(1-q^{N-|k|+1})\cdots(1-q^{2N})}{(1-q^{N+1})\cdots(1-q^{N+|k|})} \to 1\ (N\to 0)$$

です。従って、

定理 3 (ヤコビ、1824)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1+q^{\frac{2k-1}{2}}x)(1+q^{\frac{2k-1}{2}}x^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{\frac{k^2}{2}}x^k. \tag{18}$$

これは、**ヤコビの 3 重積公式**とよばれる有名なものです。いろいろな見方がありますが、例えば右辺を因数分解する式と見ることができます。そして、ここからオイラーの式を出すのは簡単：q を q^3 で取り換えて

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{3k})(1+q^{3(k-\frac{1}{2})}x)(1+q^{3(k-\frac{1}{2})}x^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{3\frac{k^2}{2}}x^k$$

と書いておき、$x=-q^{\frac{1}{2}}$ とおけばよい！ 実際、こうおくと左辺は

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{3k})(1-q^{3k-1})(1-q^{3k-2})$$

となり、これはすべての自然数にわたる積を 3 つにわけて書いただけですから

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)$$

と同じ。右辺も書きなおせば、

定理 1 ふたたび

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{3k^2+k}{2}}$$

というわけです。

4.3 副産物—仲間の恒等式

この節の証明はずいぶん長いものでした。いったい、なにが取り柄であるか？という問があってしかるべきです。

最大の収穫は、オイラーの式がどのあたりに位置するものであるか について一つの見方が得られたところにあります。つまり、2 項定理はみんな知っているとして、それを「変形」して極限をとって出来る世界、そのあたりにいる式であるとわかったわけです:

2 項定理	$\xrightarrow{q\text{を入れ 2 変数化}}$	定理 2	$\xrightarrow{N\to\infty}$	定理 3 (ヤコビ)	$\xrightarrow{x\text{を忘れる}}$	定理 1 (オイラー)
x の式		(x,q) の式		(x,q) の式		q の式

いままで知っているものとどういう関係があって、どれくらい当たり前かどれくらい難しいかということがわかって、初めてできる納得というものがあります。その意味でこの章での証明には、初めの「賢い考えかた」には無い良さがあるわけです。こうした「関係に光をあてる」ということも、一般に証明のひとつの役割といえます。

そして、このように背後のしくみがあきらかになると、副産物として「お仲間」がたくさん見つかります。例を挙げると、

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{n^2+n}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \tag{19}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})} \tag{20}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})} \tag{21}$$

これらはながめるだけでもなかなか趣がありますが、意味を考えようとするとちょっと「？」となるかもしれません。つまり、今迄 q の多項式の無限個の積 (無限 (乗) 積) が別の多項式の無限個の和 (無限級数) になるという式をみてきましたが、こんどは両辺あるいは片方に多項式の分数 (有理式という) があります。これらが等しいとはどういうことか？すこし説明しておきましょう。まず、ふたつの多項式が等しいというのは、変数にどんな「数」を代入しても値が等しいことと言えます。これと同じにいまの場合も、**両辺が意味をもつかぎり** q にどんな「数」を代入しても値が等しい、というのがこれらの式の意味です。そうなのですが、さっきにしても q にたとえば $0.1, 0.3010, 0.6709482878, \ldots$ などを代入して調べたわけではありません。そうではなく、係数がたがいに等しいことを観察したり証明したわけです[7]。そこで今の場合もそのような見方をしたいとすれば、たとえば次のようにすればよいわけです。

- 両辺に $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ を掛ける。するとたとえば (19) では

  $$\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n^2+n}{2}}(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

  という式となり、いままでと同じ解釈ができる。

[7] これは「何をこだわっているの？」と思われそうですが、「数」と書いたとき我々がふつうに使う、目でみた現実から抽象された実数やそれを組みあわせた複素数以外にも「数」とよべる体系があるからこういうことを反省したくなるのです。係数がたがいに等しいというほうが、実数値をいろいろ代入してふたつの式が近い、等しいという以上の情報をもっているのです。

• x が小さいときに成りたつ式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

を使って、両辺にあらわれる $\frac{1}{1-q^n}$ を和のかたちに直す。これによってもいままでと同じに解釈ができるようになる。やはり (19) でやってみると、

$$(\text{左辺}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}+k_1+2k_2+\cdots+nk_n} \right\} \tag{22}$$

となる。

どちらのやりかたでもよいから、ぜひ (19-21) の初めのいくつかの項を計算してみて、これらの式を味わってみてください。

さて、このうちはじめの式は、定理 2 の式で (さっきやったように $n = 2N$ などと<u>せずに</u>) $n \to \infty$ とすることで出るので、いままでのアイデアの範囲のものと言えます。これに対し、あとの二つはもうひと頑張りが必要な、難しい式です。実はこれらは**ロジャーズ・ラマヌジャンの恒等式**といわれるものの一部で、ちょうど 100 年くらい前 (1884) に発見されたものです [Andrews]。

5　そして現在...

さて、ここまでは 250 年前〜100 年前の話でした。ここでいっきに最近の話題に触れて、いちおうのおわりとします。それはつぎの 2 つの事実の組みあわせによる物語です。

1.「保型性」あるいは「函数等式」. オイラーの式を用いると、次がいえる : $q = e^{-2\pi t} (t > 0)$ のとき、オイラーの無限積をちょっと補正して

$$\eta(t) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

とおく[8] (**デデキントのエータ函数**)。すると

$$\eta(\frac{1}{t}) = \sqrt{t}\,\eta(t) \tag{23}$$

が成り立つ :「$1/t$ での値が t での値できまる」。さらに、変数 x の入ったヤコビの式 (18) についても、$q = e^{-2\pi t}, x = e^{2\pi u}$ のときに

$$\theta(t, u) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)(1 + q^{\frac{2k-1}{2}} x)(1 + q^{\frac{2k-1}{2}} x^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2/2} x^k$$

と書くことにすれば (**ヤコビのテータ函数**)、

$$\theta(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}) = \sqrt{t} e^{-\pi u^2/t} \theta(t, u) \tag{24}$$

が成り立つ。

2. ロジャーズ・ラマヌジャンの恒等式のかきかえ. (20,21) の左辺をかきなおして、それぞれをつぎの形にできる。

$$\sum_{a_1=0; a_2, a_3, \cdots} q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}, \tag{25}$$

[8] この 24 がまた自然が配した伏線というべきもので、なかなか深いのです。

$$\sum_{a_1=1;a_2,a_3,\cdots} q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}. \tag{26}$$

ここでどちらの式においても、和 $\sum$ は各項が 0 または 1 の無限列 $a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$ であって、次の条件を満たすものについてたしあげる：

- ある番号 m から先はすべて 0：$a=(a_1,\cdots,a_m,0,0,0,\cdots)$. (これにより、$q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots}$ の指数のタシザンは有限。)
- 隣あう a_i, a_{i+1} は同時には 1 になれない：$a_i+a_{i+1}\le 1$.
- 更に、(25) においては $a_1=0$ の、(26) においては $a_1=1$ のものだけについて足す。

このふたつの事実の証明は、ここではできません。ただ、はじめの「保型性」を出すためには、無限積を無限和に書き直すオイラーの式 (あるいはヤコビの式) が本質的に必要であるとだけ言っておきます。

これらを次のように組合せます。

まず、(25) を次のように解釈します：x 軸上の点 $1,2,3,\cdots$ に「原子」がのっていて、ひとつひとつは「上向き」か「下向き」の状態をとるとします。鉄などの原子は実は小さな磁石の性質をもつことが知られていますから、これは鉄原子が一次元状にならんだようすを思いうかべているわけです。すると全体の様子は (上、上、上、$\cdots$) とか (上、下、上、上、$\cdots$) と表わせます。さて、「上」を 1, 「下」を 0 と対応させると、式 (25) の和は、

「隣同士が同時には上を向かないような相互作用がある原子について、十分遠くの原子は下を向いているとします。そのような状態ひとつひとつは、温度 q のときは $q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots}$ だけの確率でおきることがわかっています。このとき、1 番目の原子が下向きである確率はいくつでしょうか。」

図は、半直線上の格子点 $x=1,2,3,\cdots$ にならんだ原子の状態の例。
原子 n が「上向き」「下向き」であることを、それぞれ $a_n=1$, $a_n=0$ で表わすことにする。ある番号から右では、すべて $a_n=0$ 「下向き」である状態のみを考える。これは、“無限に多くの原子の向きを反転させることは有限のエネルギーではできない”(したがって、考えない) ことを意味する。

のこたえである、と読めます：つまり

$$(1\text{ 番目の原子が下向きである確率 } P_0) = \frac{(25)}{(25)+(26)}、$$

同様に、

$$(1\text{ 番目の原子が上向きである確率 } P_1) = \frac{(26)}{(25)+(26)}$$

とも読めます[9] 。

さて、鉄は普通の温度では磁石になりますが、これは「原子のほとんど全部が下向き磁力を発していれば全体としても下向きの磁力線を発する」ためとされています。では「普通」の温度でなくなればどうか？実験によれば、温度を上げていくとある温度(キュリー温度といい、鉄では 770°C)において突然磁石でなくなるそうです。これは氷がとけて水になるのと数学としては似た性質の現象で、**相転移**といわれます。ではこの温度(「**相転移点**」という)にちかづけていくとき、磁石の強さはどんなグラフを描くか？いま考えている一次元模型では、$q=0$ のとき $q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots}$ は全ての a_n が 0 のときに限り 1、他は 0 ですから、確率 1 で「全て 0」つまり「全て下向き」に凍りついてしまいます。この意味で $q=0$ が「絶対零度」にあたり、このとき下向き磁力は最大です。q が 0 に近い正の数のときは、a_n の中に 1 が増えるほど、その状態がおこる重み $q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots}$ は 0 に近づき、したがっておきにくくなります。絶対零度のときの「全て下」状態からちょっとだけ違う状態がフツウというわけです。しかし $q=1$ になると全ての状態は同じ重みで起り得るようになり、これがこの模型での「相転移点」にあたると考えられます。そこで (25), (26) の左辺の和 $\sum_{a_1,a_2,\cdots} q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots}$ において、温度 q を 1 に近付けたらどうなるか？というのが問いですが、$1+1+1+\cdots$ となってこれが発散することは間違いないけれど、たとえばこの形の和の比である P_0, P_1 のふるまいなどは全然わかりそうにありません。

ところが、ここで右辺にうつると、(23) のような「保型性」が (25), (26) に対しても成立することがわかります。すると t を $\frac{1}{t}$ にすることで、「臨界温度」$q=e^{-2\pi t}=1$ (つまり、$t=0$) の問題は「絶対零度」$q=0$ ($t=\infty$) の場合に帰着できる！オイラーが 250 年前に発見した恒等式の世界が、なんと結晶や磁石の温度などに対するふるまいを記述する「統計物理」において重要な役目をはたすのです！

具体的には、$q=e^{-2\pi t}$ として、

$$\begin{aligned} F_0(t) &:= (25\text{ 式}) \times q^{-1/60}, \\ F_1(t) &:= (26\text{ 式}) \times q^{11/60} \end{aligned}$$

とするとき、ヤコビの 3 重積公式によって

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q^{10(k-\frac{1}{10})^2} - q^{10(k+\frac{9}{10})^2}\right)}{\eta(t)}, \\ F_1(t) &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q^{10(k-\frac{3}{10})^2} - q^{10(k+\frac{7}{10})^2}\right)}{\eta(t)} \end{aligned}$$

[9] ここで $q^{a_2+2a_3+3a_4+\cdots}$ というのは、遠くのものほど重みをつけている式で、人工的にみえるかもしれません。しかし実はもともと 2 次元格子に「原子」をのせた自然なモデルがあって、それを「極座標表示」のような考えによって半直線上のモデルに直すと、このようなものが自然にあらわれるのです。

が成り立ち、これに T の「保型性」(23)(24) を適用すると

$$
\begin{aligned}
F_0(\frac{1}{t}) &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\sin(\frac{2\pi}{5})F_0(t)+\sin(\frac{\pi}{5})F_1(t)\right\}, \\
F_1(\frac{1}{t}) &= \frac{2}{\sqrt{5}}\left\{\sin(\frac{\pi}{5})F_0(t)-\sin(\frac{2\pi}{5})F_1(t)\right\} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

となります。これが F_0, F_1 の「保型性」の式です。そしてこれを使うと、P_0, P_1 の臨界温度 $t \to 0$ $(q \to 1)$ での様子が、低温極限 $(q \to 0)$ で $F_1/F_0 \to 0$ であることとあわせて

$$
\begin{aligned}
P_0(t) &= \frac{F_0(t)}{F_0(t)+e^{\frac{2\pi t}{5}}F_1(t)} = \left(1+e^{\frac{2\pi t}{5}}\frac{F_1}{F_0}(t)\right)^{-1} \\
&\overset{(27)}{=} \left(1+e^{\frac{2\pi t}{5}}\frac{\sin(\frac{\pi}{5})F_0(1/t)-\sin(\frac{2\pi}{5})F_1(1/t)}{\sin(\frac{2\pi}{5})F_0(1/t)+\sin(\frac{\pi}{5})F_1(1/t)}\right)^{-1} \\
&\xrightarrow{t\to 0} \left(1+1\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{\sin(\frac{2\pi}{5})}\right)^{-1} \\
&= \frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180\ldots
\end{aligned}
$$

とわかってしまいます。P_1 についても同様！(あるいは、$P_1 = 1 - P_0$ より。)

このことについてのより詳しい解説は、[国場] を見てください。

以上はオーストラリアのバクスターという物理学者や、京都大学の神保道夫・三輪哲二先生らのチームによる研究によってここ 10 年あまりの間にわかってきたことであり、現在なお活発に研究されている、より一般な「可解量子場理論」の最も簡単な例と考えられています [神保]。

6　付録

A　背伸びのためのエエカゲンなガイド

数学は今どんなふうであり、何をまだやることがあるのか？大体どの分野においても (そして日常生活でも) そうだが、わけのわからない情報の霧のなかに大事なことが霞んでしまう思いをすることが多い。そこでここでは多少の偏見や見方の狭いかもしれないのを承知で、今日の話題について、今の数学全体からの展望を短いながらしてみようと思う。こういうことは言うは易く行うは難しの典型のようなことで、頑張ったつもりでも大抵は人の言ったことを伝言ゲームのように伝えるか、逆に自分の狭い了見を圧しつけることしかできない[10]。それでもなにがしか「良きもの」を伝え、それが次の世代の自立を助けられればと人はこういう活動をするのであろう。その意味で何もしないよりはましだと思ってエエカゲンなことも書くことにするので、以下を読んで興味をもったら、ぜひ自分で腰をすえて、いろいろな本を読んだりしてほしいと思う。

ところで何を書けばガイドになるだろう？大木の枝ぶりが育った場所を物語り、ひとりの人格がその人においておこった歴史できまってゆくごとく、数学という大木も時代時代に問題や発見をいかに集成してゆくかという努力によって現在の姿がある。そこでここでは、高校の数学=微積分=17 世紀 と思うことにして、そのころから現在までを、なんと 7 ページ余りに圧縮して見てみよう (もちろん書けないことの方が多いが、気にしない!!)。

[10] しかしそもそも人間はその物理的制約から個人の経験 (脳内の情報) すべてを他者に伝えることなどできないのだ！

「いわずと知れた」ことではあるが、いまある数学は主としてヨーロッパでルネサンス (15 世紀 ; グーテンベルクの印刷術もこのころ) の後に発達したものである。主としてと書いたが、これ以前にも紀元前にユークリッドの幾何学があったり、中世のインド〜イスラム圏には簡単な代数学があったりしたのだが、やはり体系化という意欲 (あるいは強迫観念かもしれないが) はキリスト教世界の人々に特有のものだったかもしれない。[11] ともかく「中世の暗黒時代」の後十字軍などがもたらしたイスラムの数学がヨーロッパで開花することとなった。たとえば 16 世紀の名前として、3 次方程式・4 次方程式のタルタリア、カルダノ、フェラリらがあげられる[12]。またコペルニクスも 15〜16 世紀にかけての人であった。

さて 16〜17 世紀のガリレイ、ケプラー、デカルトらを承ける形でニュートンが力学を「作り」、同時にライプニッツが微積分法をととのえたのが 17 世紀末期 (300 年前) であった。オイラーはその次の世代にあたる。ちなみにフェルマはニュートンより一世代前、デカルトと同じころの人であった。フェルマの数論と、ニュートンとライプニッツの微積分のあとをうけて、オイラーはいろいろなことをやった。その典型が今日の恒等式で、数論とも解析とも (そして物理とも !: 5 章) つながりがある、豊かな式である。

オイラーのあと、19 世紀前半はガウス、アーベル、ヤコビ、ガロア、リーマンというキラ星たちの世紀であった。この時代こそが現在の数学の大きな源流である。この時代には整備された記号や微積分の体系の普及によって、沢山の解ける微分方程式/代数方程式さがしと、解けないのはどうしてか？という理論化がはじまった。勝手な方程式は「具体的に書きくだせる」解をもたない、解けるのは「きれいな」ものだけである。その「きれいさ」をどう数学として表現できるか？それにはじめて成功したのがガロアといえるだろう (いわゆる「ガロア理論」)。ヤコビが「保型性」(23) に気づいたのも同じころであった。

オイラーのころは学者の数も少なく、どの分野もぜんぜん未開拓の大地のようなものだったから、偉い人は物理とか数学とか限ることなく、自分の興味と能力の限り研究をした。しかしその後、19 世紀後半から今世紀にかけて、上のような解析と数論は、物理学と純粋数学というふたつの大きな枝へと分れていった。それぞれの分野でのいろいろな発見とその整理に忙しくなったというべきだろう。まず物理では電磁気学 (マックスウエル) や統計力学 (ボルツマン) が成立したりする一方、原子がうたがいのない実在となり、更にその内部構造まで論ずる量子力学ができた、また相対性理論ができた。これらはニュートンらによる「質点の力学」的世界観からさらに一歩ふみこんで、その「質点」の中身や「入れ物」である時空を精密に記述するもので、これにより、ギリシャ以来の「万物は理解可能であるはずだ... あってほしい...」というスローガンが 2000 年以上 (!) を経てかなりの精度で実現され、現在の社会を物心両面で (心ならずもほろぼしている面も多いかもしれないが、ともかく) 支えている。

一方数学の内部の発展はといえば、すべてを論理的に厳密にする努力が行われて、たとえば今日でてきた無限和や無限積は素人でもあつかえるようになった。[13] オイラーのころは達人は発散

[11] どのようにしてギリシャの数学がすたれ、また千年以上を経て西洋で思い出されたかについては、[π の歴史] や [山下] で読むことができる。

[12] この 3 人がとりわけ有名だが、はじめて 3 次方程式の根号による解の公式を与えたのはスキピオ・デル・フェルロ (1465-1526) であったという。しかし彼は答を秘伝として伝えなかったといい、ウワサを聞いてタルタリアが独力で再発見したのだそうだ [VDW]。

[13] 注意。今日の話のなかでは、数学的に厳密でない箇所がいくつかある。たとえば、そもそもの定理 1 の中の両辺それぞれからして、どういう意味で収束しているか？ということも普通はキチンと述べないといけない。しかし実際に手で計算してみれば、各 q^n の係数が次々ときまってゆくのは疑いないであろう。そのような発想で今日の話はきちんと厳密にできるので安心して良いし、何より面白いところを早く見ようというのがこの文章の主旨である。ちゃんと勉強したい人は、まず [解析概論] を読むことをすすめる。

級数もたくみにあやつって、たとえば $1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}$ とかいう式もオイラーは「示した」。これは一見あやしげであるが、実は保型性 (24) の仲間の式であり素数の分布と関係のある重要なものであることが凡人にもわかるようになった。また今世紀に入ってからは、厳密化とはすこし違う、「内在化」[14] とでもいうべき考え方が大事だということが認識された。これは少し説明が難しいが、相対論の考え方と似たところがある。相対論では「物理法則は座標系によらない」(誰にとっても物理法則は同じ) というのが基本原理のひとつであるが、数学でいえばたとえば一つの曲面を考えるときに座標をどうとっても同じカタチを記述しているはずであるから、座標をつかわずにいろいろな議論ができればうれしいなあと思う。これを追究した結果、座標どころか「入れ物の空間」もなしで幾何学ができることがわかってきた。これはたとえば、地球上の全ての地域を網羅した地図帳が一冊あれば、宇宙の外から地球をながめなくても地球は球であると結論できるという内容である。こうしてひとつの図形は「ある空間のなかの部分の図形」として色々な性質を持つのでなく、「その図形そのもの」でできる議論においてすでにきまっている重要な本質があるノダという考えに導かれ、「家制度の崩壊」のようで面白い。家 (標準的な入れ物) がなくなって大事になるのは個人の自立と個人間の関係である。これは数学においてもそうであり、個人の自立が「内在化」だといってしまえば、関係性を重要と見て記述する「関手性」(説明略) という、「内在化」と両輪の位置にある考えかたもある。

内在ということについてもう少しいうと、19 世紀に非ユークリッド幾何というのが見つかって、宇宙はべつにまっすぐではないかもしれないと人々は思い、実際相対論も実証されて宇宙を曲った空間と見る見方こそ今日ではむしろ正統である。では、どのような曲った空間 (=宇宙の候補！) がありうるか (または、面白いか)、ということになるが、その各空間は宇宙なのだから、「外側の入れ物から見てどこがまがっている」という言いかたはナンセンスである、自分の住んでいる宇宙から出るわけにはいかないから、この宇宙の中でわかることだけでこの宇宙の特質を理解しなくてはならない。—この考えかたを、別にそれが「宇宙」のモデル (=図形) であろうと何だろうと、あらゆるところで実践しようというのが「内在化」といえるだろう。この精神に沿って「それ自身面白い大切な空間」の発見・分類が進められ、森重文先生が 1990 年にフィールズ賞をとったのもおおざっぱにいってこの流れであった。

ところで、「それ自身面白い大切な基礎的空間」としてこの上なく大切でないはずがなかったものが、数の空間=自然数であった。これは言葉の上だけのことではなくて、とはいっても専門でないのでちゃんとした説明ができないのだが、たとえば「フェルマの大定理」(これはフェルマが彼の蔵書の余白に書きのこした有名な予想である)

$$n \text{ が 3 以上の自然数のとき、} x^n + y^n = z^n \text{に自然数解はない}$$

などについても、解 (x, y, z) があったとして、解全体がなす「曲線」やその「穴の数」とかを議論できるのだそうだ。目で見るかぎり解全体は点が離ればなれにならんだものでしかないのだから、「穴の数」が議論できるというのはひとつの奥儀であり、これを用いることで解はあっても有限個というところまでは現在証明ができている (Faltings の定理 (1983)[15])。かくて古典的な数論を究極の幾何学としてとらえなおす試みが進んでおり、今世紀後半の重要な発展と考えられる[16]

[14] 内在化というのはここでとりあえず作ったことばで、もともとは英語で intrinsic (内在的な) という形容詞である。「内在的に議論を進めることが追究された」というくらいの意味で内在化と呼ぶことにしたが、ではなにが内在であるかは以下の文章で類推してほしい。

[15] その後フェルマの大定理は Wiles と Teylor によって正しいことが証明された。

[16] たとえば加藤和也先生という「地球を代表する」といわれる数論学者の文章で鑑賞することができる。数学セミナー (1994、3 月〜9 月号) を見られたい、フェルマの大定理の最近について解説しておられる。

。この「数論的幾何学」はすでにぐにゃぐにゃ曲げてみるという視覚の世界から離れ、イデアの世界の幾何というような趣をもっているようにも見える。しかし人間が「これは幾何である。」と考える特性をもった理論を追究してできあがりつつある結果であり、これくらい知りうることが精密に体系づけられる世界も他に無いかもしれないと思われることから、時空と物質の究極の理論と期待される超弦理論においても最終的には電子の質量、$\cdots$ など基本的物理定数は数論によって決められるのではないかという邪推がある。現在の標準的な素粒子論では、いくつかの実験によってきめるべきパラメータがあって ([ウィッテン] の「時空とは何か」によれば、17 個だそうである。) 、その意味ではパラメータがちがう他の宇宙というのもあったかもしれない、という理論といえる。ところがこれらのパラメータが、理論が満すべき要請からすべて決まっているのではないか、そしてそれを決めるのは数論ではないか、というのである。かくして「素数が先か、宇宙が先か」という哲学にいたる。これもまたギリシャの人々が「万物は数である」といったといわれることのリバイバルとも考えられるが、当時のが「こうにちがいない」という議論であったのに対して今度は証明に支えられた堅固で巨大な体系としての、壮大なリバイバルである。(できればこれが計画途上であるうちは現在の文明が滅びませんようにと思う。) これが正しく自然と合致する理論を与えるとすれば、いつかコンピュータの上で宇宙の誕生のシミュレーションもできるようになるかもしれない。もっともこの宇宙の中でこの宇宙をシミュレートするには計算量に関する限界が深刻な問題となるが、気分としては DOS-V machine の上で Mac をエミュレートする感覚である。コンピュータの中での「数十億年」[17] ののちに生命とよぶべきパターンがそこにあらわれたら[18] 倫理的な問題も生じそうでもあるし、そのような計算機があればひょっとすると我々自身も計算機の中に自我をうつして不死の生命を得るかもしれない (—-もっともそれは無限ループに陥いったバグのあるプログラムとどこがちがうかという人もいる。) まあヨタバナシはこの辺にしておこう。それにしても各点で物理法則が刻々と実行される計算機と見たとき、この我々の宇宙の計算機としての性能は驚異的で、何とよくできているかと畏敬の念を抱かずにおれない[19] [20] 。

だいぶ話がどっちらかってきたから多少乱暴にまとめると、力学と微積分からはじまった流れは、それでおもしろがって新発見に遊んだ 19 世紀前半までを経て、今世紀までには (厳密化といい、内在化といい) 内部への沈潜へむかった。そこで沈潜によって得られた境地が、逆に物理に真に「役に立つ」(我々の自然観を変革する) のではないかなどと期待されている、そんなあらすじを述べた。5 章で触れたオイラーの積と「統計物理」との関係といい、数論と超弦の関係といい、これらは「無限自由度の解析学」[21] としてあるべき一般論への途上であると考えることができ、我々の自然観を更に深めると期待されている。これまで見てきた歴史からして、完全に整理され次の沈潜を迎えるまでにはずいぶんかかるのではないか？と思われる...。

[17] それにしても、時間とは何だろうか。

[18] コンピュータの中に知性が宿ったとして、その知性が空間を我々が認識するように認識するか？という興味ある問いがある。たとえば我々は空間を 3 次元 (あるいは時間を入れて 4) と思ってあたりまえにながめているけれど、これは我々の感覚器官をはなれても意味があることだろうか？実は驚くことにそうであるらしく、3 次元や 4 次元を境にして難しさや質がかわる問題がいろいろ知られている。

[19] これは自然=機械論の再来かといわれればそうであるが、以前の機械論の時代精神が自然に対し自己を主張したのに対し、産業革命以来数世紀を経た今となっては、自然環境を永久機関であるかのようにみなして行ってきた「実験」から限界を認め、共存の道を探すべきだろう。

[20] こういうことを考えると、いつも [ギーター] の中で神がその姿を現わす場面を思い出す。ギーターの神は唯一にして全てである存在 (英訳では manifold) であるといい、人格神でないそうなので、物理法則のようなものか？

[21] 統計物理では「無限個の原子」を、素粒子論では粒子の生成・消滅にともない「生じうる無限個の粒子」を考えなくてはならない。その意味でどちらも「無限自由度」である。

最後に、現実の話をしよう。この文章を読んで多少自分でも数学をカジってみようかと思った人、どーもおめでとうございます。しかし高校では受験という圧力もあり、仲々自分の好きなことばかりはしていられないだろう。それでも、たとえばこの文章の延長として、[史談] はかならずや面白く読めるはずである。(ただしすべてを理解するのは大変かもしれない。) [解析概論] や [竹内] なども、力がある人は頑張ってみるとよい。このうち特に後者は、なかなか今の大学のカリキュラムでは時間がなくてあつかえず、しかしまちがいなく大事な内容をふくんだ分野の、良い入門書である。これらの本には色々と今回のようなノリで遊べるところがあるから、時にそのように遊び、ふたたび本に戻って証明を読んだりしながら進んでいけばそれが理想である。更に理想を言えば、はじめから一つのことにとじこもってしまうのも良くないので、物理でも生物も—そしてもちろん音楽や文学も— 教科書と参考書以外になんでもかじるとよいと思う。文献のところにいくつか僕の趣味であげておく。高いけど読みたいなあという本は、学校の図書館にたのんで買ってもらうと良い。このうち特におすすめは「ファインマン物理学」[F] である。これはまったくおもしろい本で、超一流の人にしてはじめて書ける物理概論である。学問の性格の違いもあるが、これに匹敵する現代数学概論といったものは日本語以外でもあまりないであろう[22]。こういう本に取り組むのはもちろん大学に入ってからでもかまわない。また最近の話題については、「数セミ」や、少し高級だが「数理科学」などにオハナシがでるであろう。そしてできれば先生でつきあってくれる人を見つけるとすばらしい。— 良い本、良い仲間がいれば、特に実験設備がなくても首をつっこんだだけものがわかるのが数学である。

式 (20,21) に名前がついているラマヌジャンという人の場合、インドでほとんど独学で数学をはじめた人であった。現在のようにどこでも教育のシステムが整ってくると逆に彼のような才能は育ちにくいようである。彼のノートは写真製版で出版されていて (たとえば [ラ])、筆跡も込めて見ることができるが、ある先生が評していわく「ヲタクの人」という。人は意図してヲタクになれるか？というとそうもいかないであろうが、しかしヲタクとまでいかなくても、自分がうけた強烈な印象を大事にして、「これはなんだろう。」と思いつづけることはできると思う。そしてそれが大事なのである。いろいろな学者などの記録と比べ (例えば [アダマール]、[クレッチマー])、また自分の乏しい経験に照らしても、何かが泉の様にアイデアを生むというよりは、人の話を聞いたり自分の中でいろいろなことをつきあわせているなかで「何かありそうだ」あるいは「何かがおかしい。」という感覚がまずあって、それを言葉にしていく過程で新たなものが生まれるという方が適当ではないかと思うからである[23]。

というわけで、背伸びのためのガイドと称して書きだしたこの付録であるが、背伸びではなく、あしもとのいしころでもなんでも、自分を「あれ？」と思わせるところに従ってそれとつきあうのが良いようだよ、という逆向きをすすめて終りにするのであった。何が役にたつかなんて役にたつときまでなかなかわからないのだから、自分がいくら時間を投資してもあとで悔いに苦しむことのない、自分の興味と関心に忠実な、地に足のついた楽しみかたができればそれで良い、それが良いのだ。

そうした生活のなかからこそ、今日の恒等式のような強い命脈をもったなにかが、数学とはか

[22] その後、岩波講座「現代数学への入門」(全 20 分冊) が出版された。良書が多くおすすめである。似た路線の物理学講座として、戸田盛和先生の「物理学 30 講シリーズ」(全 10 冊、朝倉書店) もおすすめである。

[23] そして言葉になってゆく過程というのは、長いこともあれば短いこともある。人からは (あるいは自分でも) はっきりと見えなくても、その問題の論理というものに従い試行錯誤をいろいろとくりかえす期間である。ここでは時間がなによりも大事である。邪魔されないために、ひとり夜に起きて考えたりもするし、夢の中にまで問題が現れたりもする。人によってはほとんど登校拒否とかわらない感じにもなる。尚こういうことがなかなか認められず、大学においてすら状況が悪化しつつあるのは大きな問題である。

さらず長さものが生まれてくるであろう。

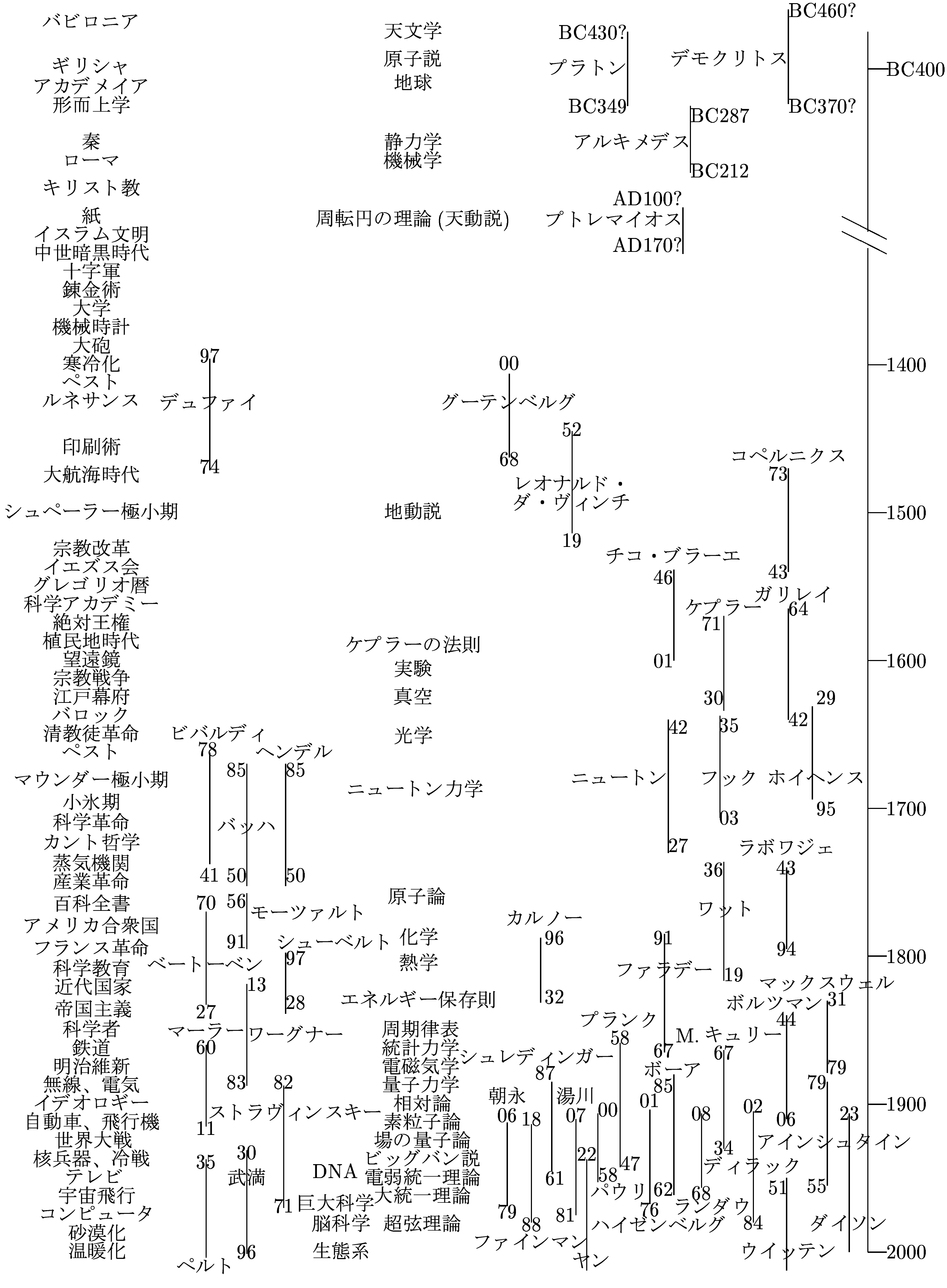
Bon voyage!

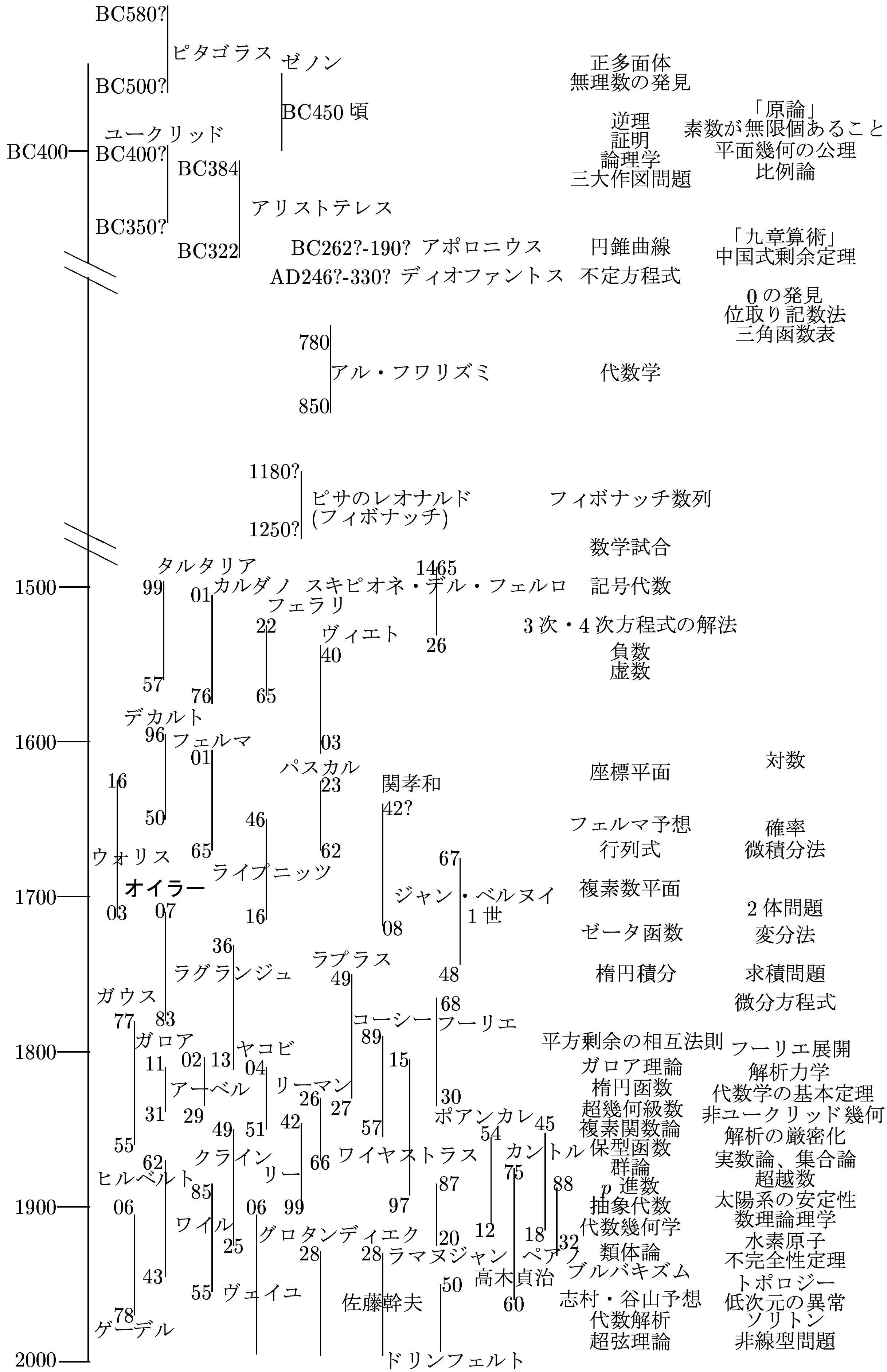
B　数式処理ソフト Maple による $\Pi_{n=1}^{30}(1-q^n)$ の計算

> f:= $(1-q)\,(1-q^2)\,(1-q^3)\,(1-q^4)\,(1-q^5)\,(1-q^6)\,(1-q^7)\,(1-q^8)\,(1-q^9)$
$(1-q^{10})\,(1-q^{11})\,(1-q^{12})\,(1-q^{13})\,(1-q^{14})\,(1-q^{15})\,(1-q^{16})\,(1-q^{17})\,(1-q^{18})$
$(1-q^{19})\,(1-q^{20})\,(1-q^{21})\,(1-q^{22})\,(1-q^{23})\,(1-q^{24})\,(1-q^{25})\,(1-q^{26})\,(1-q^{27})$
$(1-q^{28})\,(1-q^{29})\,(1-q^{30})$;

>expand(f);

$f = 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}+q^{31}-q^{33}-q^{34}-2\,q^{35}+q^{38}+q^{39}+q^{41}+q^{42}-q^{46}-q^{47}-$
$q^{48}-q^{49}-q^{50}-q^{52}+2\,q^{57}+q^{58}+q^{59}+q^{60}+q^{61}+2\,q^{62}+q^{63}+q^{64}-q^{66}-q^{67}-q^{68}-q^{70}+q^{73}+q^{75}-q^{77}-$
$q^{78}-q^{79}-2\,q^{80}-2\,q^{81}-2\,q^{82}-2\,q^{83}-2\,q^{84}-2\,q^{85}-2\,q^{86}-2\,q^{87}+q^{90}+q^{91}+3\,q^{92}+3\,q^{93}+3\,q^{94}+3\,q^{95}+$
$4\,q^{96}+2\,q^{97}+3\,q^{98}+2\,q^{99}+4\,q^{100}+q^{101}+2\,q^{102}+q^{103}+2\,q^{104}+q^{105}+2\,q^{106}+q^{107}-q^{109}-q^{110}-3\,q^{111}-$
$3\,q^{112}-4\,q^{113}-5\,q^{114}-5\,q^{115}-6\,q^{116}-8\,q^{117}-7\,q^{118}-6\,q^{119}-7\,q^{120}-5\,q^{121}-5\,q^{122}-3\,q^{123}-q^{124}-$
$q^{126}+3\,q^{127}+3\,q^{128}+4\,q^{129}+5\,q^{130}+8\,q^{131}+7\,q^{132}+9\,q^{133}+8\,q^{134}+10\,q^{135}+9\,q^{136}+11\,q^{137}+9\,q^{138}+$
$10\,q^{139}+8\,q^{140}+8\,q^{141}+5\,q^{142}+5\,q^{143}+2\,q^{144}+2\,q^{145}-2\,q^{146}-3\,q^{147}-8\,q^{148}-9\,q^{149}-11\,q^{150}-13\,q^{151}-$
$15\,q^{152}-15\,q^{153}-16\,q^{154}-14\,q^{155}-15\,q^{156}-16\,q^{157}-14\,q^{158}-13\,q^{159}-11\,q^{160}-10\,q^{161}-5\,q^{162}-$
$5\,q^{163}+2\,q^{165}+6\,q^{166}+7\,q^{167}+13\,q^{168}+13\,q^{169}+18\,q^{170}+18\,q^{171}+21\,q^{172}+20\,q^{173}+24\,q^{174}+21\,q^{175}+$
$22\,q^{176}+21\,q^{177}+21\,q^{178}+15\,q^{179}+15\,q^{180}+9\,q^{181}+7\,q^{182}+q^{183}-2\,q^{184}-7\,q^{185}-7\,q^{186}-15\,q^{187}-$
$17\,q^{188}-20\,q^{189}-23\,q^{190}-26\,q^{191}-27\,q^{192}-28\,q^{193}-29\,q^{194}-28\,q^{195}-27\,q^{196}-24\,q^{197}-22\,q^{198}-$
$18\,q^{199}-16\,q^{200}-9\,q^{201}-6\,q^{202}+3\,q^{204}+10\,q^{205}+13\,q^{206}+19\,q^{207}+21\,q^{208}+28\,q^{209}+28\,q^{210}+33\,q^{211}+$
$31\,q^{212}+34\,q^{213}+31\,q^{214}+32\,q^{215}+27\,q^{216}+30\,q^{217}+21\,q^{218}+19\,q^{219}+13\,q^{220}+11\,q^{221}+3\,q^{222}-$
$7\,q^{224}-13\,q^{225}-18\,q^{226}-21\,q^{227}-27\,q^{228}-28\,q^{229}-32\,q^{230}-34\,q^{231}-34\,q^{232}-34\,q^{233}-34\,q^{234}-$
$32\,q^{235}-28\,q^{236}-27\,q^{237}-21\,q^{238}-18\,q^{239}-13\,q^{240}-7\,q^{241}+3\,q^{243}+11\,q^{244}+13\,q^{245}+19\,q^{246}+$
$21\,q^{247}+30\,q^{248}+27\,q^{249}+32\,q^{250}+31\,q^{251}+34\,q^{252}+31\,q^{253}+33\,q^{254}+28\,q^{255}+28\,q^{256}+21\,q^{257}+$
$19\,q^{258}+13\,q^{259}+10\,q^{260}+3\,q^{261}-6\,q^{263}-9\,q^{264}-16\,q^{265}-18\,q^{266}-22\,q^{267}-24\,q^{268}-27\,q^{269}-28\,q^{270}-$
$29\,q^{271}-28\,q^{272}-27\,q^{273}-26\,q^{274}-23\,q^{275}-20\,q^{276}-17\,q^{277}-15\,q^{278}-7\,q^{279}-7\,q^{280}-2\,q^{281}+q^{282}+$
$7\,q^{283}+9\,q^{284}+15\,q^{285}+15\,q^{286}+21\,q^{287}+21\,q^{288}+22\,q^{289}+21\,q^{290}+24\,q^{291}+20\,q^{292}+21\,q^{293}+18\,q^{294}+$
$18\,q^{295}+13\,q^{296}+13\,q^{297}+7\,q^{298}+6\,q^{299}+2\,q^{300}-5\,q^{302}-5\,q^{303}-10\,q^{304}-11\,q^{305}-13\,q^{306}-14\,q^{307}-$
$16\,q^{308}-15\,q^{309}-14\,q^{310}-16\,q^{311}-15\,q^{312}-15\,q^{313}-13\,q^{314}-11\,q^{315}-9\,q^{316}-8\,q^{317}-3\,q^{318}-2\,q^{319}+$
$2\,q^{320}+2\,q^{321}+5\,q^{322}+5\,q^{323}+8\,q^{324}+8\,q^{325}+10\,q^{326}+9\,q^{327}+11\,q^{328}+9\,q^{329}+10\,q^{330}+8\,q^{331}+9\,q^{332}+$
$7\,q^{333}+8\,q^{334}+5\,q^{335}+4\,q^{336}+3\,q^{337}+3\,q^{338}-q^{339}-q^{341}-3\,q^{342}-5\,q^{343}-5\,q^{344}-7\,q^{345}-6\,q^{346}-$
$7\,q^{347}-8\,q^{348}-6\,q^{349}-5\,q^{350}-5\,q^{351}-4\,q^{352}-3\,q^{353}-3\,q^{354}-q^{355}-q^{356}+q^{358}+2\,q^{359}+q^{360}+2\,q^{361}+$
$q^{362}+2\,q^{363}+q^{364}+4\,q^{365}+2\,q^{366}+3\,q^{367}+2\,q^{368}+4\,q^{369}+3\,q^{370}+3\,q^{371}+3\,q^{372}+3\,q^{373}+q^{374}+q^{375}-$
$2\,q^{378}-2\,q^{379}-2\,q^{380}-2\,q^{381}-2\,q^{382}-2\,q^{383}-2\,q^{384}-2\,q^{385}-q^{386}-q^{387}-q^{388}+q^{390}+q^{392}-q^{395}-q^{397}-$
$q^{398}-q^{399}+q^{401}+q^{402}+2\,q^{403}+q^{404}+q^{405}+q^{406}+q^{407}+2\,q^{408}-q^{413}-q^{415}-q^{416}-q^{417}-q^{418}-q^{419}+$
$q^{423}+q^{424}+q^{426}+q^{427}-2\,q^{430}-q^{431}-q^{432}+q^{434}+q^{439}+q^{443}-q^{450}-q^{453}+q^{458}+q^{460}-q^{463}-q^{464}+q^{465}$


バビロニア
ギリシャ
アカデメイア
形而上学
秦
ローマ
キリスト教
紙
イスラム文明
中世暗黒時代
十字軍
錬金術
大学
機械時計
大砲
寒冷化
ペスト
ルネサンス
印刷術
大航海時代
シュペーラー極小期
宗教改革
イエズス会
グレゴリオ暦
科学アカデミー
絶対王権
植民地時代
望遠鏡
宗教戦争
江戸幕府
バロック
清教徒革命
ペスト
マウンダー極小期
小氷期
科学革命
カント哲学
蒸気機関
産業革命
百科全書
アメリカ合衆国
フランス革命
科学教育
近代国家
帝国主義
科学者
鉄道
明治維新
無線、電気
イデオロギー
自動車、飛行機
世界大戦
核兵器、冷戦
テレビ
宇宙飛行
コンピュータ
砂漠化
温暖化
97 デュファイ 74
ビバルディ 78 41
ヘンデル 85 50
バッハ 85 50
モーツァルト 56 91
ベートーベン 70 27
シューベルト 97 28
ワーグナー 13 83
マーラー 60 11
ストラヴィンスキー 82 71
ペルト 35
武満 30 96
天文学
原子説
地球
静力学
機械学
周転円の理論 (天動説)
地動説
ケプラーの法則
実験
真空
光学
ニュートン力学
原子論
化学
熱学
エネルギー保存則
周期律表
統計力学
電磁気学
量子力学
相対論
素粒子論
場の量子論
ビッグバン説
電弱統一理論
大統一理論
DNA
巨大科学
脳科学
超弦理論
生態系
プラトン BC430? BC349
デモクリトス BC460? BC370?
アルキメデス BC287 BC212
プトレマイオス AD100? AD170?
グーテンベルグ 00 68
レオナルド・ダ・ヴィンチ 52 19
コペルニクス 73 43
チコ・ブラーエ 46 01
ガリレイ 64 42
ケプラー 71 30
ホイヘンス 29 95
ニュートン 42 27
フック 35 03
ラボワジェ 43 94
ワット 36 19
カルノー 96 32
ファラデー 91 67
マックスウェル 31 79
ボルツマン 44 06
M. キュリー 67 34
プランク 58 47
シュレディンガー 87 61
ボーア 85 62
朝永 06 79
湯川 07 81
ファインマン 18 88
ヤン 22
パウリ 00 58
ハイゼンベルグ 01 76
ランダウ 08 68
ディラック 02 84
アインシュタイン 79 55
ウイッテン 51
ダイソン 23
BC400
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000


BC580?
ピタゴラス
BC500?
ゼノン
BC450 頃
正多面体
無理数の発見
ユークリッド
BC400
BC400?
BC350?
BC384
アリストテレス
BC322
逆理
証明
論理学
三大作図問題
「原論」
素数が無限個あること
平面幾何の公理
比例論
BC262?-190? アポロニウス
AD246?-330? ディオファントス
円錐曲線
不定方程式
「九章算術」
中国式剰余定理
0 の発見
位取り記数法
三角函数表
780
アル・フワリズミ
850
代数学
1180?
ピサのレオナルド
(フィボナッチ)
1250?
フィボナッチ数列
数学試合
1500
タルタリア
99
57
カルダノ
01
76
フェラリ
22
65
スキピオネ・デル・フェルロ
1465
26
ヴィエト
40
03
記号代数
3 次・4 次方程式の解法
負数
虚数
1600
デカルト
96
50
フェルマ
01
65
パスカル
23
62
関孝和
42?
08
ウォリス
16
03
ライプニッツ
46
16
ジャン・ベルヌイ1世
67
48
座標平面
対数
フェルマ予想
行列式
確率
微積分法
1700
オイラー
07
83
複素数平面
ゼータ函数
楕円積分
2 体問題
変分法
求積問題
微分方程式
ラグランジュ
36
13
ラプラス
49
27
ガウス
77
55
フーリエ
68
30
コーシー
89
57
1800
ガロア
11
31
アーベル
02
29
ヤコビ
04
51
リーマン
26
66
ワイヤストラス
15
97
平方剰余の相互法則
ガロア理論
楕円函数
超幾何級数
複素関数論
保型函数
群論
p 進数
抽象代数
代数幾何学
類体論
ブルバキズム
志村・谷山予想
代数解析
超弦理論
フーリエ展開
解析力学
代数学の基本定理
非ユークリッド幾何
解析の厳密化
実数論、集合論
超越数
太陽系の安定性
数理論理学
水素原子
不完全性定理
トポロジー
低次元の異常
ソリトン
非線型問題
ポアンカレ
54
12
カントル
45
18
クライン
49
25
リー
42
99
ヒルベルト
62
43
ペアノ
88
32
1900
ワイル
85
55
ゲーデル
06
78
グロタンディエク
28
ヴェイユ
06
ラマヌジャン
87
20
高木貞治
75
60
佐藤幹夫
28
ドリンフェルト
50
2000

参考文献

[史談] 高木貞治、「近世数学史談」、岩波文庫。

まずはこの本、オイラーの一世代あとのガロアたちの時代の躍動を伝えてくれる。こういう本が日本語でよめるのは幸せである。最近ロシア語から訳された

[G] ギンディキン、「ガウスの切り開いた道」「ガリレオの 17 世紀」シュプリンガー東京

および、今は手に入りにくいかもしれないが

[山下] 山下純一「ガロアへのレクイエム」現代数学社

もこれに類して面白い。

次の 2 冊は、いづれもこの話の続きをキチンと学びたい人むけである。

[解析概論] 高木貞治「解析概論」、岩波書店

[竹内] 竹内端三、「楕円函数論」、岩波全書

この稿を書くため直接参考とした文献を挙げる。まず §3 について。

[クヴァント] 「クヴァント・数学エッセイ抄」(旧ソ連の雑誌「クヴァント」の記事の和訳)、Basic 数学別冊、現代数学社 (1987) の中の、D. フィクス「オイラーの函数のベキ乗について」(馬場良和監訳)、pp74-81. ここでは今日の式 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ の 2 乗、3 乗、...、k 乗...、について、いつ (どの k について) 今日のようなきれいな公式があるかについても述べている。ヤコビの 3 重積公式から、$k=3$ は「きれい」になることがわかる。しかし選ばれた k についてしか結果はきれいにならず、その選ばれ方というのが他の数学と結びついてまた面白いのである。このことは、物理学者ダイソンも考えたことがあったが、彼の数学者としてのアタマと物理学者としてのアタマとが十分対話しなかったために、彼自身は重要な発見を逃がしたという教訓的逸話がある。これについてもフィクスは触れているが、ダイソンの原論文もあげておこう。

[ダイソン] F. Dyson, “Missed opportunities”, Bulltin of the American Mathematical Society 78-5 (1972), 635-652.

なおダイソンは量子電磁力学 (QED) の建設で朝永、ファインマン、シュウィンガーと共に有名な人であるが、同時に「ダイソン球」や惑星間航行についても考え、アメリカの核政策にも深く関わった人である。以下の本が訳されていて、大変興味深い。

[ダイソン自伝] フリーマン・ダイソン「宇宙をかき乱すべきか」鎮目恭夫訳、ダイヤモンド社。同「多様化社会」、鎮目恭夫訳、みすず書房 (1990)。

一方オイラーの定理の、彼自身による証明については

[Weil1] アンドレ・ヴェイユ「数論—歴史からのアプローチ」、足立・三宅訳、日本評論社 (1987、原著 1983)

にのっている。ヴェイユは今世紀の代表的数学者のひとりで代数幾何の構築にあたった大数学者であり、自伝が翻訳されている：

[Weil2] アンドレ・ヴェイユ自伝—ある数学者の修業時代、稲葉延子訳、シュプリンガー・フェアラーク東京 (1994)

つぎに §4 についてだが、大学院生のときに聞いた梅田亨さんのお話を参考にした：

[梅田] 梅田亨「特殊函数についての特殊な視点 - q-analog を軸として-」、ユニタリ表現論セミナー報告集 VI, pp51-67. (1986 年 11 月)

この文献はいわゆる研究会の報告集とよばれるもので、いわば業界の内部資料。それゆえ残念ながら本屋さんでは手に入らないが、主な大学の数学科の図書にはあると思う。

本稿では示せなかったロジャーズ・ラマヌジャン恒等式の証明は次にのっている。

[Andrews] George Andrews, "q-series:their development and application and in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra", アメリカ数学会 (1986)　あるいは同じ著者の "Number Theory", Dover (1971)。

ラマヌジャンの研究ノートは、付録で述べたとおりそれ自身今も興味深い研究対象である。

[ラ] Srinivasa Ramanujan's lost notebook and other unpublished papers, Nerosa (New Delhi) - Springer, 1988

彼の人生については、次の本が訳されている。

[ラ伝] ロバート・カニーゲル著 (田中靖夫訳)「無限の天才」工作社 1994.

§5 の内容と関係した、最近の話題についての本をあげる。かならずしも全て入門者むけではないが、各自のレベルにあわせて読むと良いと思う。

[国場] 江沢洋編「数理物理への誘い」1994 遊星社、のなかから、 国場敦夫「可解格子模型」。

[河野] 河野俊丈、「組みひもの数理」、遊星社 (1993).

[神保] 神保道夫「量子群とヤン・バクスター方程式」、シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990)

[久賀] 久賀道郎、「ドクトル・クーガーの数学講座」(1、2)、日本評論社

[佐藤] 佐藤幹夫 (述)、梅田亨 (記)「佐藤幹夫講義録、1984-1985 一学期」、数理解析レクチャーノート 5、京都大学数理解析研究所 (1989)。

この講義録は数学を志す人は、ぜひ一度見てみてください。佐藤先生は世界に深く影響を与えた大数学者であるが、次の本でその研究の道のりが紹介されている。

[講座] 木村達雄「佐藤幹夫の数学」. 岩波講座「現代数学の基礎」第 34 巻「現代数学の拡がり 2」, 第 1 章

また佐藤先生の弟子の上野喜三雄さんによる、当時の数学修業の雰囲気をつたえてくれる本もある。

[上野] 上野喜三雄、「ソリトンがひらく新しい数学」、岩波科学ライブラリー 4(1993)

同シリーズ 35、深谷賢治著「数学者の視点」も現在の数学者のナマの声・実感を伝える本といえよう。

次に付録関係。物理学とその周辺について、以下は高校生でも面白く読めるだろう。

[F] ファインマン、レイトン、サンズ、「ファインマン物理学 (I-V)」、戸田盛和他訳、岩波書店：特に、その 1 巻目。

[F2] ファインマン「物理法則はいかにして発見されたか」、江沢洋訳、ダイヤモンド社 (1983)、

[ガードナー] マーチン・ガードナー「自然界における左と右」(新版), 坪井・藤井・小島訳、紀伊国屋書店 (1992).

[ウィッテン] ウィッテン「時空とは何か」、「パリティ」1997 年 1 月号 pp22-30 の記事。彼は超弦理論とそれに関連する数学の研究で 1990 年にフィールズ賞を受賞した、プリンストン高等研究所の物理学者であり、現代のオイラーあるいはガウスとよべるかもしれない。

[ミグダル] ミグダル「理系のための独創的発想法」東京図書、

[パリティ] パリティ別冊 No.10 「カオス-複雑さに内在する規則性」丸善 (1994), のなかの、レオ・カダノフ「物理学の大伽藍・大聖堂・そして...」、アンダーソン「複雑さって物理なの？」など。

さて、最近のコンピュータの性能は昔とはくらべものにならない。宣伝するわけではないが、"Maple" のような数式処理ソフトでさえノートパソコンで使え、オイラーの展開した $(1-q)\cdots(1-q^{51})$ さえも、今や一瞬である。

[Maple] ヒール、ハンセン、ラガード著、笠嶋友美訳「はじめての Maple」シュプリンガー・フェアラーク東京。

付録Bではスペースの関係もあり、$(1-q)\cdots(1-q^{30})$ までを計算させてみた。もっとも、そこから何を読みとるかこそが重要であり、そのためには再び手計算が大事になったりする。人はいつまでも手を動かすこと、紙と鉛筆をおろそかにしてはならないだろう。

付録Cの年表を作るのに参考にした本をあげる。まず、数学史に興味がある人のために:

[小堀] 小堀憲「大数学者」新潮選書

[数学史] デュドネ編「数学史 I-III」、上野他訳、岩波書店

[VDW] ファン・デア・ヴェルデン「代数学の歴史」現代数学社、「数学の黎明」みすず書房。

[N] ノイゲバウアー「古代の精密科学」みすず書房

[π] ベックマン「π の歴史」 蒼樹書房

[ボイヤー] ボイヤー「数学の歴史」(全 5 冊)、加賀・浦野訳、朝倉書店

[武隈] 武隈良一「数学史」、培風館

[ダニングトン] ダニングトン「ガウスの生涯」銀林他訳、東京図書

技術史などについては、有名な SF 作家でもあったアシモフの本を見た。

[アシモフ] アイザック・アシモフ「科学と発見の年表」小山・輪湖訳、丸善 (1992).

最近気候変動や環境問題について関心が集まっている。略年表とはいっても文明と科学は切っても切れない縁でやはり気になるので、たとえば次のような本を参考にした。

[米] 米国科学アカデミー編、富永健訳「一つの地球一つの未来」東京化学同人 (1992)

[桜井] 桜井邦朋「太陽黒点が語る文明史-小氷河期と近代の成立」中公新書 845。これは太陽黒点の極小期と気候の関連を解説している本。

[高朝] 高橋浩一郎・朝倉正「気候変動は歴史を変える」、丸善 (1994)

[安田] 安田喜憲「気候が文明を変える」、岩波科学ライブラリー 7 (1993)

[山形大] 山形大学地球環境研究会編「ヒトが招いた地球の危機」講談社ブルーバックス

[W] エルンスト・ワイツゼッカー「地球環境政策」、宮本憲一他訳、有斐閣 (1994)

[白書] レスター・ブラウン編著「ワールドウオッチ地球白書」ダイヤモンド社

話が前後するが、付録Aであげた数学的能力や創造性についての本。これらの力は何か読んだからといって身につくわけではなく、まずは勉強しなくてはいけないのはもちろんだが、たとえば次のような本がある。

[アダマール] ジャック・アダマール「数学における発明の心理」、伏見康治訳、みすず書房。

[クレッチマー] クレッチマー、「天才の心理学」、岩波文庫。

[岡 潔] 岡 潔「春宵十話」

また一般に、われわれのアタマの中身についての本として (最近はこの手の本は沢山あるが) 次のような本がある。

[ミンスキー] マーヴィン・ミンスキー「心の社会」、安西裕訳、産業図書。

[澤口] 澤口俊之「知性の脳構造と進化」、海鳴社 (1989)

[群司] 群司隆男、「自然言語」、1994 日本評論社、

[ピンカー] スティーブン・ピンカー「言語を生み出す本能」(上・下)、椋田直子訳、NHKブックス 740-741、日本放送出版協会、1995

[セーガン] カール・セーガン「はるかな記憶」(上・下) 新潮社

[立花隆] 立花隆「サル学の現在」、平凡社 (1991)

[立花隆 2] 立花隆「知のソフトウェア」、講談社現代新書

ところで、べつに数学者になるつもりでこれを読んでる人ばかりではないだろう。そこで話の広がりついでに、僕の趣味で全然本稿とは関係ない本 (本だけではない) だが以下を挙げておこう。余計なお世話かもしれないが、これを書いた人間がたとえばどういう本を読むと面白く思うかがわかることで、「急がば回れ」式にこの文章を読む際の参考となれば幸いに思う。

[丸元] 丸元淑生「いま家庭料理をとりもどすには」、中公文庫 ; 同「丸元淑生のシンプル料理 1,2」、講談社

[ギーター] 「バガバット・ギーター」、岩波文庫。題名は「神の歌」の意、インドの聖典マハーバーラタの一部。前述のヴェイユをはじめとしてファンが多い。

[D] ポール・デイヴィス「神と新しい物理学」、岩波同時代ライブラリー。

[ハイヤム] オマル・ハイヤム「ルバイヤート」岩波文庫。この人は年表には載せなかったが、アル・フワリズミよりあとの、11-12 世紀イスラムの数学者・天文学者。その彼による詩作である。

[ゲーテ] ゲーテ「ファウスト」、岩波文庫

[中] 中勘助 「銀の匙」「犬」「提婆達多」等、岩波文庫

[朔太郎] 「萩原朔太郎詩集」、三好達治編、岩波文庫

[谷川] 谷川俊太郎詩集 (佐野洋子絵)「女に」、マガジンハウス、1600.

[漱石] 夏目漱石「我輩は猫である」「漱石文明論集」他、岩波文庫等

[Budda] 「ブッダ最後の旅」(大パリニバータ)、中村元訳、岩波文庫 650

[大江] 大江健三郎「洪水はわが魂におよび」「人生の親戚」「懐しい年への手紙」など。

[CD1] Roger Waters, “Ammused to death”, 米 Columbia CK47127, 1992 Sony Music Entertainments.

[CD2] Arvo Pört, “Tabula Rasa”(1984), ECM new series, Plydor KK J28J 20253.

最後に、

[映画] フィリップ・ドブロカ監督の映画「愛 - 革命に生きて」(1988、仏)。

数学も激動期にあった革命期のフランスを実にすばらしく描いている。

映画のおわりのクレジットのように長くなったこの文献表も、これにておしまい。