

# 耐震設計と線型代数<sup>1</sup>

長谷川浩司

## 1 地震と逆行列

阪神大震災のあと、家屋の耐震設計について一時関心が高まった。(今はどうだろう?) 丁度その頃、両親が静岡で家を建て直すことになった。静岡といえば東海地震が予想されて久しく、私は設計に首をつっこむことになった。

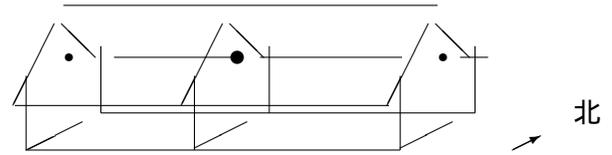
地震に対して建物がどう反応するかは、基本的には古典力学の問題である。基礎を除いても、壁や屋根などの構造に集中する総質量  $m$  は 2 階建てで 10 トンを越える。この質量に地震による(主に横向きの) 加速度  $a$  が加わって生ずる力  $F = ma$  を地震力と呼ぶそうである。 $a$  は時間  $t$  の関数なので  $F$  も  $t$  の関数であり、 $a$  の最大は震度 7 で横向きに重力加速度の 2 倍程度にもなるという [1]。この力で家がどう揺れるかをしらべることが問題となる。これは動力学だが、その前に静力学(つりあいの考察)の範囲でも十分意味がある。

地震力により、柱が曲るなど家は刻々変形するが、力が静的なら変形は力とつりあうところまで進む。例えば柱を横から押して曲げるとき、変形量は曲げる力がある量以下ならこれにほぼ比例するだろう。この比例定数はバネにおけるフックの定数にあたる。変形は力とつりあうところで止まるが、このときの変形量が各部で小さければ家は壊れないだろう。

つまり家を基礎で固定されたバネの連なりと考え、その変形を考えるのが静力学的考察である。

家は、質量の主な部分となる屋根や壁を、梁や床がつないで出来ている。つなぐ部分がバネの役割をする。(図 1)

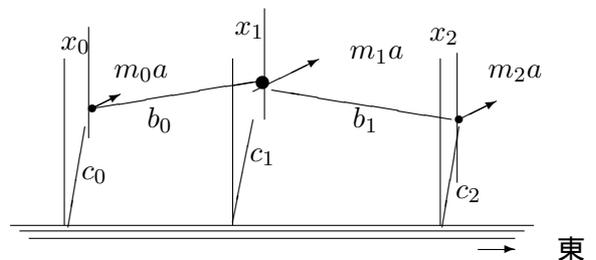
<sup>1</sup> 奇を衝った題かもしれないが、御存知の方には退屈であろう内容である。「役に立つ」のみをキーワードに学問を色分けする風向きが強い中で、そのような側面をあえて書く。「役に立たない」を強調しすぎるのも問題に思うから。学生の方はこういう話題から入って、より深いことさらに目を向けていただければと思う。とはいえ私自身地震も建築も素人であり、素人が一念発起して勉強したときの報告と考えていただきたい。



理想的には 3 次元の各座標における質量(の密度)と、となりあった各座標間をつなぐバネにあたる部材の強度を数値化する必要があるが、扱うデータはかなり膨大となる。ここでは [2] で提案されている方法に従う。簡単のため建物は一階建てとする。

この建物が南向きであるとし、地震の加速度を南北と東西の 2 成分に分解して考える。南北方向の揺れに対抗するのは南北の向きに配置された壁であり、東西方向の壁にはあまり抵抗する力はないであろう。そこで、南北方向の揺れをまず想定しつつ、南から透視する。建物は東西に見えている。南北の壁にあたるいくつかの部分  $k = 0, \dots, n$  の付近の質量をそれぞれ図 1 の黒丸のように集中させて考え、これを  $m_0, \dots, m_n$  とする。その間を梁や東西の壁がつないでいる。

静力学的考察とは、このように透視した状態で南から建物を押すことと考えればよい。押す力は各  $k$  ごとに、質量に南北方向の加速度にあたる一定値  $a$  を掛けた  $m_k a$  である。(図 2)



次に地震力  $m_k a$  につりあいを与えるべき力であるが、まず  $k = 0$  (西端) のときを考えよう。0 番目の壁およびその北側奥にある壁が北にになると、その(上端における)変位  $x_0$  (単位は例えば cm) に比例した力  $c_0 x_0$  を発揮するが、東側の構造との連絡によっても支えられる。1 番目の壁の同様な変位を  $x_1$  とすれば、東側との間の梁や天井などの正味の変位は  $x_1 - x_0$  であるから、支える力はこれに比例し  $b_0(x_1 - x_0)$  の形である。符号を考慮して  $c_0 x_0 - b_0(x_1 - x_0) = m_0 a$  を得る。同様に  $k$  番目の壁の変位を  $x_k$  とすれば、端以外は左右に隣があ

るので、 $k = 0, \dots, n$  に対し

$$c_k x_k + b_k(x_k - x_{k-1}) - b_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = m_k a$$

を得る ( $x_{-1} = x_{n+1} = 0$  と解釈する)。  $a_k := c_k + b_k + b_{k+1}$  と書けば

$$a_k x_k - b_k x_{k-1} - b_{k+1} x_{k+1} = m_k a \quad (1)$$

である。登場した「バネ定数」をならべて

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & a_1 & -b_2 & 0 & \vdots \\ 0 & -b_2 & a_2 & -b_3 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & -b_n & a_n \end{bmatrix}$$

という行列を考えよう。変位を並べた縦ベクトルを  $\vec{x} = [x_k]_{k=1, \dots, n}$ 、また質量を対角線に並べた行列を  $M = \text{diag}(m_0, \dots, m_n)$  と書く。するとつりあいの式 (1) は

$$A\vec{x} = aM\vec{1} \quad (2)$$

と書ける。ここで  $\vec{1} = {}^t [1, \dots, 1]$  とおいた。

これから変位  $\vec{x}$  を求めるには  $A$  の逆行列を掛ければ良い。その結果  $x_i$  のなかに問題になるほど大きいものがあれば、設計を変更する。問題にするかどうかは、柱の傾き ( $\theta$  と書こう) で決める。 $x_i$  を柱の高さ  $h$  で割ったものは  $x_i$  が小さければ  $\tan \theta \simeq \theta$  と考えられるが、(震災前の) 建築基準法施行令はこの比  $\theta$  が  $\frac{1}{120}$  (ラジアン) 以下<sup>2</sup> であるべしと定めていた。一定の限界内であれば、柱などの構造が破壊されず、家は地震を生きのびると考えるわけである。 $x_i$  が問題ありとして、これを小さくするには  $a_i, b_i, b_{i-1}$  を大きくするか、 $m_i$  を小さくする。柱や梁を太くしたり、壁に筋交いを入れたり、屋根を軽くすることで実現するが、それでダメなら壁を増やす (= 間取りの検討) 等の基本的見直しをする。

ところで、肝心の  $a_i, b_i$  はどうやって算定するのだろうか? これから建てる建物の場合、これらは設計図から算定しなくてはならない。これは数学では済まない部分である<sup>3</sup>。バネ定数を決めるのだから、

<sup>2</sup> 壁が合板等の乾式工法の場合。土壁 (漆喰) の場合はひびが入ると弱くなるため、 $\frac{1}{200}$  (ラジアン) 以下にされている。実際の強い地震ではこの比の最大が  $\frac{1}{30}$  ほどにも達し得るという。

<sup>3</sup> 素材の量子力学的考察までいけばやはり数学だろうけど。

本来は柱や壁の強度を実験で試すべきである。そして実は壁や床の強度 (窓の面積、吹き抜けのあるなし、釘の本数) や、柱を基礎や梁にどう接続するかなど、建て方の詳細な仕様に大きく左右される。これらを考慮しつつそれぞれを仕様ごとに設計図から算定しなくてはならないが、本質的であるこの点については [2] を見ていただこう。<sup>4</sup>

もちろん以上の手続きは南北を東西におきかえ、東西方向の変位を少なくする考察も行なう。

数学としては単純 (連立一次方程式!) ではあっても、数学がこれだけ日常的に人命救助に役立つ? ことも少いかもかもしれない。<sup>5</sup>

## 2 地震と対角化

前節では地震力が静的なものと考えたが、正しくは地震の始まりから終わりにいたる間の振動を考えねばならない。つまり動力学である。このためには、上に出てきた行列を対角化すると良く、建物の固有の振動周期を知ることができる。

外力  $f(t)$  のあるバネの運動方程式は、バネ定数を  $k$  として  $f(t) - kx(t) = mx''(t)$  ( $' = d/dt$ ) である。これに対応して、家の運動方程式は (引き続き南北方向について)

$$\vec{F}(t) - A\vec{x}(t) = M\vec{x}''(t) \quad (3)$$

となる。 $\vec{F}(t) = a(t)M\vec{1}$  であったが、地震の加速度  $a(t)$  が時間  $t$  の関数で、揺れを表わしている。これから来る地震の  $a(t)$  は知る術がないが、推定はできる。地盤の固さによって、その土地における  $a(t)$  の時間変動は特徴をもち、地盤が固いほど短い周期の揺れ (= 加速度の変動) になる。この周期を  $T$  (秒) とすれば、加速度として仮想的に正弦波 (最も基本的な周期関数!)  $a(t) = \sin \frac{2\pi t}{T}$  を考えるべきだろう。運動方程式 (3) は ( $\vec{F}$  を移項して)

$$-A\vec{x}(t) = M(\vec{x}''(t) - \sin \frac{2\pi t}{T} \vec{1}) \quad (4)$$

<sup>4</sup> このように現実とのインターフェースに答えることが困難である場合、理論が「役に立たない」と思われるのであろう。

<sup>5</sup> ところで、静岡では毎週末に NHK ニュースで「今週の地震」というコーナーがあり、一週間の震央分布をきれいな CG で見せてくれる。伊豆で地震があったりするとその震源が地下で 3 次元的に移動していく様子もわかる。一方静岡市の中心街の代表的本屋を回った限りでは、地震関係のおちついた書籍、特に上のようなことが書かれたもの、はあまり数が多くなかった。ちょっと心配である。

となる。

$B := M^{-1}A$  とおき、可逆行列  $P$  により、行列  $PBP^{-1} = D$  を対角行列にできたとしよう。

$$PBP^{-1} = PM^{-1}AP^{-1} = \begin{bmatrix} d_0 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n \end{bmatrix}$$

このような  $P$  をみつけることを行列  $B$  の対角化といい、 $D$  の成分  $d_i$  を  $B$  の固有値という— ことは御存知とする。  $E$  を単位行列とすれば、固有値は  $\det(B - dE) = 0$  の解として定まる。すると、家の南北方向の運動方程式は

$$-P^{-1}DP\vec{x} = \vec{x}'' - \sin \frac{2\pi t}{T} \vec{1}$$

と変形できる。  $\vec{y}(t) := P\vec{x}(t)$  とすれば、 $D$  は対角なので成分ごとに

$$-d_k y_k(t) = y_k''(t) - p_k \sin \frac{2\pi t}{T}$$

( ${}^t[p_0, \dots, p_n] = P\vec{1}$ ) が成り立つ。これを解くことは解析の演習問題だが、いわゆる定数変化法 [3] で

$$y_k(t) = C_1(t) \sin \sqrt{d_k} t + C_2(t) \cos \sqrt{d_k} t$$

の形で解ける。  $y_k(0) = y_k'(0) = 0$  (初期変位 0、初速 0) の解を答だけ書けば、

$$y_k(t) = \frac{\sqrt{d_k} \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi t}{T} \sin \sqrt{d_k} t}{\sqrt{d_k} (d_k - (\frac{2\pi t}{T})^2)}$$

である。これで問題は数学的には終りであるが、建物の問題はこれからである。  $\sqrt{d_k}$  が  $2\pi/T$  に近いとする。上の解の分母に 0 が現われるが、計算すると

$$\lim_{\sqrt{d_k} \rightarrow 2\pi/T} y_k(t) = \frac{T^2}{8\pi^2} \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{T}{4\pi} t \cos \frac{2\pi t}{T}$$

となり、これも  $y_k(0) = y_k'(0) = 1$  を満たす。このとき第 2 項に  $t$  があるため、時間  $t$  が増加するとともに  $y_k(t)$  は、従って  $\vec{x}(t)$  も、限りなく増大していく。これが共鳴とよばれる現象で、このとき家は増大する変位  $x_k$  に耐えられず柱などの構造がある時点で壊れると考えられる。神戸における「震災の帯」において、この効果が無視できなかったのではないかという指摘がある [1]。家の固有値  $d_k$  はこ

のようなことがないように周期  $T$  と共鳴をおこさないようずらさなくてはならない。

なお最近の木造住宅の場合、その周期は 0.5 秒前後といわれ、一方の地盤の (卓越) 周期  $T$  は 0.2 ~ 2 秒弱で、地盤がやわらかいほど大きい。 [4]。近くで大規模な建設が行なわれていれば、地盤の固さは (たとえばボーリングによる柱状図や、一定の杭を一定深さ打ち込むのに必要な打撃の回数<sup>6</sup> などとして) 調べられているので、そのデータからある程度見当はつくようだ<sup>7</sup>。また  $a(t)$  として、過去の大地震のデータをその土地にあわせて変形したものをを用いることも (どちらかといえば地盤そのものの揺れを対象としてかもしれないが) 考えられている。

### 3 検討課題

本来本稿は線形代数の入門のためのもので、かつ筆者は建築について素人である。それ故気は引けるが、問題とされていることを記しておきたい。

- 南北と東西から見れば十分か

本稿の扱いでは、微分幾何でいえば曲率テンソルを縮約したものだけ考察しているようなもので、もっともな問題である。ただし 2 階、3 階建てのとき、および家の回転運動 (重心と慣性モーメントのずれからくる、いわゆる偏心) の扱いは [2] に述べられている。

- 基礎と土台との連結の仕方

木造住宅において、柱の下部を互いに結ぶ横方向の材木は土台と呼ばれる。また、土台が乗る場所は基礎と呼ばれ、最近では鉄筋コンクリートで壁のように地面から立ちあげる場合が多い。この基礎と土台を (土台が腐らないようゴム板をはさんだりした上で) アンカーボルトで固定するのが近年は普通であるが (建築基準法施行令 42 条)、これが適切かというのが問いである。過去の大地震では、お寺の鐘突き堂が土台から数メートル飛びあがって着地し、助かった例があるという。このような現象が横揺れでもありえるらしいが、1 の静力学および 2 の正弦波振動は基本的に定常的な揺れへの対策であり完全

<sup>6</sup> いわゆる  $N$  値

<sup>7</sup> 私の場合は建設省の国道事務所に問合せで柱状図の fax をもらったが、本来は地方自治体が一元的に集約すべきデータであろう。精密を期せば、その土地に地震計を置き、日常 (ダンパー由来の振動などによって) どのような周期の揺れがおきるかを調べることもできるという。

無欠というわけではない[4]。かといってアンカーボルトが最終的には揺れる建物を地面に引き留めるので、これを単になくすることもできない。いわゆる免震構造はこの問題を解決するための考え方だが、瞬間的な衝撃に対してどう構造を設計すべきかは難しい問題のようである。

また地震が長くなれば次第に各部の結合が緩んで(壊れて)ゆくが、その過程でどのように家の特性が変化するかも設計時に考えるべきといわれている。家屋の揺れの周期は結合の緩みとともに延びるが( $B \rightarrow 0$ では固有値も小さくなる!)、それが地盤の周期  $T$  と一致した時点で、共鳴で一気に倒壊する可能性があるためである[5]<sup>8</sup>。

なお、運動方程式では加速度に注目したので陰に隠れたが、実際に破壊に影響をもつのは揺れによって生ずる速度(できまる運動エネルギー)といわれ、これは阪神大震災級で(震源から10数キロ離れてさえ)最大1m/秒以上になるという。

検討課題はあるにしても、私は本稿で紹介したような方法で全ての住宅の耐震性が検討されるべきと思う。こうした検討が全ての建築についてなされれば、やがては日本で地震による圧死者は二度と無くなるはずであるし、それをほとんど高校数学の範囲で誰もができるのは良いことだ(自分の命の問題!)。本稿に万一勘違いがあればこの点に免じご寛容を乞いつつ、御指摘をお願いしたい。

## 4 対角化の実際

折角なので数学についてももう少し。対角化は実際には固有方程式を解かねばならず、 $n$ 次正方行列の場合  $n$ 次代数方程式を解くことになる。これは  $n$ が5以上だと冪根では一般に解けないし、3や4でも大変なことが多い。最近は大学でも対角化は3行3列までできれば良しとして、あとは必要ならばコンピュータを使えばできる、と教えることが多い。ではコンピュータではどうやって対角化しているのだろうか?

<sup>8</sup> 明治以前の伝統的な日本建築は筋交いは使わず、柱を横に貫通する貫(ぬき)の構造が用いられていたという。柱も貫も(それぞれ5寸、1寸などのように)太い限りではこの壊れる過程でよりもちこたえるという話だが、ただしそのようにふんだんに木材を使うことは、民家のためには現状では難しいであろう。

行列  $B$  は上に出てきたように、対角線およびその両側以外が0であるとしよう。このような行列をヤコビ行列という。 $B$ は例外的場合を除いて下三角行列  $L$  と上三角行列  $R$  の積で表わすことができ、これは例えば  $L$  の対角成分が1、という条件で一意的である。この分解から

$$B = LR \mapsto B' := RL$$

と新たに  $B'$  を作ると、これはやはりヤコビ行列となる。そこで次に  $B'$  を(下三角)  $\times$  (上三角)と表わしそれを逆順に掛け  $B''$  を作り、... という変換の列が考えられる。不思議なことに、この操作を続けると次第に対角行列に近づいてゆくことが知られている。 $B' = L^{-1}BL$  であるから、 $B'$  の固有値は  $B$  のものと同じであり、極限の対角行列は  $B$  の対角化を与える。対角化を求めるこの操作をLRアルゴリズムとよぶ。

実はこのアルゴリズムの1ステップは、時間をひとつつめる離散的な時間発展と思うのがよく、これを連続時間に移行させる微分極限をとることができる[6]。微分極限におけるこの連続系はカロジェロ系とよばれる可積分系であり、LRアルゴリズムは逆にカロジェロ系を整数時間に制限したものと一致する。カロジェロ系は時間無限大において固有値を大きさ順に並べだ対角行列に収束するので[7]、LRアルゴリズムが対角化を与えることが従う。

これら離散可積分系の理解は、箱玉系とよばれるソリトン系、あるいは離散パルペ型方程式などとの関係と共に最近大きく進歩したが、紙面も尽きたのでいずれ解説が書かれることを期待したい。

## 参考文献

- [1] 深尾・石橋編「阪神・淡路大震災と地震の予測」岩波書店(1996)
- [2] 建築知識スーパーブック「地震に強い木造住宅の設計マニュアル(1996)、とくに pp10-42 の稲山氏による解説。
- [3] ハイラー、ワナー(蟹江訳)「解析教程(上)」シュプリンガー東京(1997)
- [4] 杉山英男「地震と木造住宅」丸善(1996)
- [5] 朝日新聞連載「地震と防災 6」2000年2月22日(宮城版朝刊 19面)
- [6] Rutishauser?

- [7] J. Moser
- [8] (伊理訳)「行列の対角化」シュプリンガー東京  
(1993?)

(はせがわ こうじ、東北大学)