理系の数学

微分積分

演習・問題の解答例

2016/8/21 版

注意 !!
下の解答例のなかには、**説明口調**のものもあります。 だから、レポートや試験の解答に、そのまま書くと、とっても**変**です。 **自分の言葉に直して書きましょう。**

第 1 章

実数

演習 1.1 背理法で示しましょう。$a>0$ と仮定しましょう。

$\varepsilon=\frac{a}{2}>0$ とおくと、仮定から $a<a/2$ となってますね。だから〜〜、$\frac{a}{2}<0$ となり $a<0$ となるので矛盾しちゃうんです。というわけで、$a>0$ と仮定したことが間違いなので $a\leq 0$ となってるわけです。

別解 対偶命題を証明して、もとの命題を示しましょう。

「$a>0$ ならば, 次を満たす $\varepsilon_0>0$ が存在しまーーす。『$a>\varepsilon_0$』」が対偶命題になってるわけですよね。

$a>0$ を仮定してみましょう。

天下り的に、$\varepsilon_0=\frac{a}{2}$ とおいてみましょう。$\varepsilon_0>0$ となってますよね？$a>\varepsilon_0$ となるので、上の括弧の中が示せたことになってます。

演習 1.2 (1) $M=5,\quad 0\leq\pi\leq 3.2$ と $0\leq e\leq 3$ は既知とする.
(2) $M=\max\{|a|,|b|\},\quad a,b<0$ かもしれないので, $M=b$ としてはいけない.
(3) $M=2,\quad a_n=1+2^{-1}+\cdots+2^{-n}$ は $3/2\leq a_n\leq 2$ となるので.

演習 1.3 (1) (i) $|a|\leq b$, (ii) $-b\leq a\leq b$ とおく.

まず, $(i)\Rightarrow(ii)$ を示す. (i) と絶対値の定義より $\max\{-a,a\}\leq b$ となる. max の定義から, $a\leq b$ かつ $-a\leq b$ となる. よって (ii) が成り立つ.

次に $(ii)\Rightarrow(i)$ を示す. (ii) を仮定して, $a\geq 0$ のときは, $|a|=a$ であり (ii) の右の不等式から (i) が示せる. $a<0$ のときは, $|a|=-a$ であり (ii) の左の不等式から (i) が示せる.

(2) $a\geq 0$ のときは, 左辺は $|-a|=-(-a)=a$ となる. 右辺は $|a|=a$ なので一致する.

$a<0$ のときは, 左辺は $|-a|=-a$ である. 右辺は, $|a|=-a$ となり一致する.

演習 1.4 (1) 任意の $M>0$ に対し, $x=\max\{M,a\}+1$ とおくと, $x\in(a,\infty)$ かつ $x>M>0$ である. よって, $|x|>M$ となるので非有界である.

(2) 任意の $M>0$ に対し, $x=\min\{-M,a\}-1$ とおくと, $x\in(-\infty,a]$ かつ $x\leq -M-1<0$ である. よって, $|x|>M$ となるので非有界である.

演習 1.5 $\Rightarrow$ の証明：$\mathbb{R}$ の部分集合 A が有界ですから「$x\in A\Rightarrow |x|\leq M$」となる $M>0$ が存在します。

つまり、「$x\in A\Rightarrow x\leq M$」かつ「$x\in A\Rightarrow -x\leq M$」が成り立ってます。

前半は、A の上界 M が存在することを言ってます。つまり、A は上に有界です。

一方、後半は、「$x\in A\Rightarrow x\geq -M$」なので, A が下に有界となっています。

$\Leftarrow$ の証明：A が上に有界ですから、「$x\in A\Rightarrow x\leq M_1$」となる $M_1\in\mathbb{R}$ があります。

また、A は下にも有界だから「$x\in A\Rightarrow x\geq M_2$」となる $M_2\in\mathbb{R}$ があります。

$M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$ とおきます。$M_1\leq M$ と $M_2\geq -M$ が成り立ってることに注意しましょう。

よって、x が A の元であるならば、$M_2\leq x\leq M_1$ が成り立っているが、$M_1\leq M$ と $M_2\geq -M$ を用いると、$-M\leq x\leq M$ が成り立っています。

ゆえに、「$x\in A\Rightarrow |x|\leq M$」が成り立っているわけです。つまり、$A$ が有界であることの定義を満たしています。

演習 1.6 (1)『「$x\in A\Rightarrow x\leq n_0$」を満たす $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する』ならば, A は上に有界になるので,『 **⋯** 』の否定命題が成り立つ. つまり, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し,「$a_n>n$」となる $a_n\in A$ が存在する.

(2) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し,「$a_n<-n$」となる $a_n\in A$ が存在する.

演習 1.7 $\alpha=\inf A$ とおくと下限の定義 (i) から、「任意の $x\in A$ に対して、$x\geq\alpha$」が成り立ってますから、α は A の下界になってます。

$M\in\mathbb{R}$ を A の任意の下界としましょう。$M\leq\alpha$ が示せれば、α は A の下界の最大になります。

（こう考えると分かるでしょうか。$B=\{M\in\mathbb{R}\mid M$ は集合 A の下界 $\}$ と

おきます。$\alpha = \max B$ を示したことになります。なぜなら、$\alpha \in B$ が最初に示せて、次に、任意の $M \in B$ に対し、$\alpha \geq M$ が示せたわけなので、B の最大の定義を α が満たしてますね？）

さーーて、背理法で $M \leq \alpha$ を示しましょう。

$M > \alpha$ と仮定しましょう。$\varepsilon = M - \alpha > 0$ とおきます。下限の定義から、「$\alpha + \varepsilon > x_\varepsilon$」となる $x_\varepsilon \in A$ が存在しますね。

$\alpha + \varepsilon = M$ に注意すると $M > x_\varepsilon$ となってしまい、M は A の下界でなくなるので矛盾が導かれます。

ゆえに、$M > \alpha$ を仮定したのが間違いだったので、$M \leq \alpha$ が成り立ちます。

講義で「なるべく背理法を使わない証明を最初に考えましょう」と、私は言いましたが、ここで、背理法を使わずに示してみましょう。（かえって難しいかもしれません。命題 1.1 を利用します。）

任意の $\varepsilon > 0$ をとってきます。α が A の下限ですから、定義 (ii) より、$\alpha + \varepsilon > x_\varepsilon$ を満たす A の元 x_ε があります。

M は A の下限でしたから、この x_ε より小さいわけです。つまり、

$$x_\varepsilon \geq M$$

が成り立ってます。よって、x_ε をはさんで次が成り立ちます。

$$「\quad \alpha + \varepsilon > x_\varepsilon \geq M \quad」$$

ゆえに、真ん中を飛ばして読めば、$\alpha + \varepsilon > M$ が成り立ちます。$\varepsilon > 0$ は任意に選んでよかったわけですから、命題 1.1 より、$\alpha \geq M$ が示せました。

背理法を用いないと、最初の下線部分「任意の $\varepsilon > 0$ をとってきます。」が思いつきにくいので、かえって難しいかもしれません。

（命題 1.1 の証明は背理法を使っているので、結局は背理法を使っています。）

演習 1.8 B が下に有界じゃないときは, $\inf B = -\infty$ なので, $\inf B \leq \inf A$ は常に成立しています.

だから, B が下に有界でない場合だけを考えましょう. 勝手に A の元 a を決めます. 集合 A は集合 B に含まれるので, $a \in B$ が成り立っています. 故に, $\inf B \leq a$ はいつでも成り立ってます.

つまり, $\inf B$ は集合 A の下界の一つになってます. ところで $\inf A$ は命題 1.3(ii) より, A の下界の中で最大のものです. ですから, $\inf B$ よりも等しいか大きくなります.

問題 1.1 $\max\{a,b\} = \frac{|a-b|+a+b}{2}$, $\min\{a,b\} = \frac{-|a-b|+a+b}{2}$ となる.

max の方を確かめちゃいましょう。$a \geq b$ としましょう。右辺 $= \frac{(a-b)+a+b}{2} = a$ なので、もし、$a < b$ が成り立っちゃてたらば、右辺は $\frac{-(a-b)+a+b}{2} = b$ になっちゃいますよね。

min も場合わけで確かめちゃってください。

問題 1.2 (1) $\alpha = \max A$ とおくと, $\alpha \in A$ かつ「$a \in A \Rightarrow a \leq \alpha$」を満たす. よって, $\alpha = \sup A$ を示すには定義の (ii) を示せばよい.

任意の $\varepsilon > 0$ をとると, $\alpha \in A$ なので $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$ を満たす $x_\varepsilon \in A$ として $x_\varepsilon = \alpha$ をとればよい.

(2) は (1) を真似て, 証明してみましょう.

問題 1.3 背理法で示す. 結論を否定すると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a \geq 2^n$ となる. 故に, $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界な集合なので, $\sup A$ がある. $\alpha = \sup A$ とおく.

上限の定義 (ii) より, $\varepsilon = 1$ とおいて, $\alpha - 1 < 2^{n_0}$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ がある. $1 < 2^{n_0}$ に注意すると, $\alpha < 2^{n_0} + 1 < 2 \times 2^{n_0} = 2^{n_0+1}$ となり, α が A の上限であることに矛盾する.

第 2 章

数列・級数

演習 2.1 注意　2 章の段階では、実数べき乗 ($t, x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ に対し x^t のこと) を定義してないから、使えません。しかし、付録で 2 章までの知識で定義できるので、ここでは用いるてしまいましょう。

(1) 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して, アルキメデスの原理より $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{t}}}$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在します。よって、$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{1}{n^t} < \varepsilon$ となります。

$\varepsilon \geq 1$ の時は、$\frac{1}{n^t} < 1$ となりますから、$N_\varepsilon = 1$ としてしまえばよいのです。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ を固定しましょう。アルキメデスの原理より、$N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{t}}} - a$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選べます。すると、任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対し、

$$0 < \frac{1}{(n+a)^t} \leq \frac{1}{(N_\varepsilon + a)^t} < \varepsilon$$

となります。よって、証明が終わります。

演習 2.2 (1) 任意の正の実数 ε に対し、次を満たす自然数 N_ε が存在します。

「n が N_εより大きければ、不等式 $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$が成り立つ。」

さて、すべての自然数 m に対して、$\beta \leq a_m$ が成り立ってることを思い出そう。

この不等式も使って、n が N_ε より大きければ、 $\beta \leq a_n < \alpha + \varepsilon$ が成り立ってます。

真ん中の a_n を飛ばして不等式を見れば, $\beta - \alpha < \varepsilon$ となり（もちろん、$\beta - \alpha \leq \varepsilon$ も成り立ってます)、 $\varepsilon > 0$ は任意にとっていたので、命題 1.1 (ii) により、$\beta \leq \alpha$ が成り立っていることが分かります。

(2) $a_n = \beta - \frac{1}{n}$ とおくと, $a_n < \beta$ が成り立ってます。でも $\lim_{n \to \infty} a_n = \beta$ とな

ることは明らかなので、$\lim_{n\to\infty} a_n < \beta$ は成り立っていない。」

演習 2.3 (1) $a_n = A_0 + \frac{A_1}{n} + \cdots + \frac{A_m}{n^m}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A_0 + A_1 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \cdots + A_m \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^m} = A_0$$

(2) $a_n = \frac{A_0}{n^m} + \frac{A_1}{n^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{n} + A_m$ なので, (1) と同様に, $\lim_{n\to\infty} a_n = A_m$

演習 2.4 (1) $a_n = \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n+2}$ なので, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) $a_n = \frac{(n^2+n+1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ より, 分母は 2 に収束するので, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

演習 2.5 (1) $\Rightarrow$ の証明：任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある. 「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon}$」($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ の定義)

よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon$」を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ があるので, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ の定義を満たす.

$\Leftarrow$ の証明：任意の $L > 0$ に対し, 次を満たす $N_L \in \mathbb{N}$ がある.「$n \geq N_L \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{L}$」よって,「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow a_n > L$」となるので, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となる.

(2) $\Rightarrow$ の証明：任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある.「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$」よって,「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 0 > \frac{1}{a_n} > -\varepsilon$」となる. よって, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ の定義を満たす.

$\Leftarrow$ の証明：任意の $L > 0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある.「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 0 > a_n > -\frac{1}{L}$」故に,「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{a_n} < -L$」が成り立つので $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ を得る.

(3) 任意の $L > 0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある.「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow a_n \geq 4L$」 $M_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon - 1} |a_k|$ とおく. $N'_\varepsilon = [\frac{M_\varepsilon}{L}] + 1$ とおく (つまり, $N'_\varepsilon > \frac{M_\varepsilon}{L}$ を満たす).

$\hat{N}_\varepsilon = \max\{2N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ とおくと, $n \geq \hat{N}_\varepsilon$ に対し次が成り立つ.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq -\frac{M_\varepsilon}{n} + \frac{n-N_\varepsilon+1}{n}(4L) > -L + (1-\frac{N_\varepsilon}{n})(4L) \geq L(3-2) = L$$

なので, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \infty$ の定義を満たす.

演習 2.6 $\inf A = -\infty$ のときは, 任意の $L>0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある.「$a_{N_\varepsilon} < -L$」

$\{a_n\}$ は減少列だから, $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_{N_\varepsilon} < -L$ となるので, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の定義を満たす.

$\inf A = \alpha > -\infty$ と仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する.「$\alpha + \varepsilon > a_{N_\varepsilon} \geq \alpha$」減少列だから, $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \alpha+\varepsilon > a_n \geq \alpha$ となる. 書き換えると, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する.

「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\alpha - a_n| < \varepsilon$」

これは, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義である.

演習 2.7 (1) $1 \leq a_1 \leq \frac{3}{2}$ なので, $\frac{3}{2} \geq a_2 \geq \frac{3-(\frac{3}{2}-1)^2}{2} = \frac{11}{8}$ である. (2 番目の不等式は $a_1 = \frac{3}{2}$ を代入したものが最も小さいことに注意)

全く同様に, $1 \leq a_n \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \geq a_{n+1} \geq \frac{11}{8} > 1$ が導ける.

(2) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\{(a_{n-1}-1)^2 - (a_n-1)^2\}$ なので, $a_{n-1}+a_n-2 \geq 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n| = \tfrac{1}{2}|a_{n-1}-a_n| \times |a_{n-1}+a_n-2| \leq{}& \tfrac{|a_{n-1}-a_n|}{2}(\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}-2) \\ ={}& \tfrac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|\end{aligned}$$

となる.

(3) $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
|a_{n+m}-a_n| \le \sum_{k=1}^{m}|a_{n+k}-a_{n+k-1}| &\le \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}|a_{n+k}-a_{n+k-1}|+|a_{n+1}-a_n| \\
&\le \cdots \\
&\le (1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{2^{m-1}})|a_{n+1}-a_n| \\
&\le \tfrac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}|a_{n+1}-a_n| \\
&\le 2|a_{n+1}-a_n|
\end{aligned}
$$

となる. 一方, $|a_{n+1}-a_n| \le \frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}|a_2-a_1|$ なので,

$$|a_{n+m}-a_n| \le \frac{1}{2^{n-2}}|a_2-a_1|$$

となる. $n\to\infty$ とすると, 右辺はゼロに収束するので, $\{a_n\}$ はコーシー列になる.

最後の部分をもう少し正確に言うと次のようになる：任意の $\varepsilon>0$ に対し, 「$\frac{1}{2^{N_\varepsilon-2}}(|a_1|+|a_2|)<\varepsilon$」となる $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ を選べば, $k,\ell \ge N_\varepsilon$ ならば, $(k=\ell+m$ としておき$)$

$$|a_k-a_\ell| \le \frac{1}{2^{\ell-2}}|a_2-a_1| \le \frac{1}{2^{N_\varepsilon-2}}(|a_1|+|a_2|)<\varepsilon$$

となり, コーシー列の定義を満たす.

(4) (3) より, $\{a_n\}$ はコーシー列だから, (コーシー列と収束列は, 実数では同値なので) $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n$ となる $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在する. $a_{n+1}=\frac{3-(a_n-1)^2}{2}$ を満たすので, 両辺を $\lim_{n\to\infty}$ とすると

$$\alpha=\frac{3-(\alpha-1)^2}{2}=\frac{-\alpha^2+2\alpha+2}{2}$$

を満たす. 整理して, $\alpha^2=2$ を満たすので, $\alpha=\sqrt{2}$ になる. ($\alpha=\sqrt{2}$ の定義は, $\alpha^2=2$ となる正数 α である.)

演習 2.8 命題 2.13 で $m=n+1$ とおくと, $|a_n|<\varepsilon$ となるので, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ が示せた.

演習 2.9 $A=\{n_1,n_2,\cdots,n_K\}$ ($n_1<n_2<\cdots<n_K$ としておく) として,

$b_n = \begin{cases} a'_n & n \in A \text{ のとき} \\ a_n & n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ のとき} \end{cases}$ とおく.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するから, 命題 2.13 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある. 「$m > n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$」

$N'_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, n_K + 1\}$ とおくと, $m > n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$ となる. 和は $n_K + 1$ 以上の自然数で取っているから, a_k を b_k で置き換えても同じである. 故に, 再び命題 2.13 を使って, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束することが示せる.

$\sum a_n$ が発散するならば, $\sum b_n$ が発散することを示す. 対偶命題を示せばよい. つまり, $\sum b_n$ が収束すれば, $\sum a_n$ も収束することを示せばよい. しかし, これは, この演習の解答の前半部分から示されている (a_n と b_n の役割を入れ替えて).

演習 2.10 (i) $\Leftarrow$ が示されれば, 逆は a_n と b_n の役割を代えればいいので, $\Leftarrow$ だけ示す.

仮定より, 次を満たす $N_0 \in \mathbb{N}$ がある.「$n \geq N_0 \Rightarrow -\frac{\rho}{2} < \frac{b_n}{a_n} - \rho < \frac{\rho}{2}$」「 $\cdots$ 」を前半の式だけを用いて次のように変形する. 「$n \geq N_0 \Rightarrow a_n < \frac{2}{\rho} b_n$」($n = 1, 2, \cdots, N_0 - 1$ に対しては, $a_n \leq \frac{2}{\rho} b_n$ が成り立つかどうか分からないので) $a'_n = \begin{cases} b_n & 1 \leq n \leq N_0 - 1 \text{ のとき} \\ a_n & b_n \geq N_0 \text{のとき} \end{cases}$ とおき直せば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a'_n \leq \frac{2}{\rho} b_n$ が成り立つ.

$\sum b_n$ が収束すれば定理 2.16 より $\sum a'_n$ も収束する. また, 演習 2.9 より $\sum a'_n$ が収束ので, $\sum a_n$ も収束する.

(ii) $\Rightarrow$ が示せれば, $\Leftarrow$ も示せるので, $\Rightarrow$ のみを証明する. 対偶を取れば, (i) の $\Leftarrow$ の証明に他ならないので, この証明の前半で示した.

問題 2.1 (1) 次を満たす $\varepsilon_0 > 0$ が存在する.「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次を満たす $k_n \in \mathbb{N}$ が存在する.『$k_n \geq n$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon_0$ 』」

(2) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 次を満たす $\varepsilon_\alpha > 0$ が存在する.「任意の $n \in \mathbb{N}$ に

対し, 次を満たす $k_n \in \mathbb{N}$ が存在する.『$k_n \geq n$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon_\alpha$』」

問題 2.2 (1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある.「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$」

三角不等式 (補題 1.2) の最初の不等式から, $||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha|$ となる. よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow ||a_n| - |\alpha|| < \varepsilon$ となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在するので, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ の定義を満たす.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立ち, と $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ が存在することから ($\gamma = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ と置いて), 次を満たす $N_\varepsilon, N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する.

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow |a_n + b_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$$

故に, $n \geq \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ ならば, 上の二つが成り立つから

$$|b_n - (\gamma - \alpha)| = |(a_n + b_n) - \gamma + (\alpha - a_n)| \leq |a_n + b_n - \gamma| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり, $\lim_{n\to\infty} b_n = \gamma - \alpha$ が成り立つ.

(3) 定理 2.4(iii) より, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ が成り立つ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \gamma$ とおくと, 定理 2.4(ii) より, $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)\frac{1}{a_n} = \frac{\gamma}{\alpha}$ となる. 一方, $(a_n b_n)\frac{1}{a_n} = b_n$ なので, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\gamma}{\alpha}$ が成り立つ.

問題 2.3 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $x > 0 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ をまず示す. $n = 1, 2$ は等式で成り立つことはすぐ分かるので, $n \geq 3$ としてよい.

二項定理 (命題 2.8) より,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

であり, 右辺の各項は正なので, $\cdots$ 以下がない方が右辺は小さいので不等式が成り立つ.

さて、$n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ なので、$h(n) = n^{\frac{1}{n}} - 1 \geq 0$ とおく。$n = (1 + h(n))^n \geq 1 + nh(n) + \frac{n(n-1)}{2}h(n)^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h(n)^2$ が成り立つから、$h(n)$ に関して次の不等

式が成り立つ。

$$0 \leq h(n)^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

ゆえに、

$$0 \leq n^{\frac{1}{n}} - 1 = h(n) \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

が成り立つので、(例えば、はさみうちの原理で) $\lim_{n\to\infty n} |n^{\frac{1}{n}} - 1| = 0$ となる。

（ほとんど同じだけど $\cdots$ ）**別解**　$n \geq 1 + nh(n) + \frac{n(n-1)}{2}h(n)^2$ より、

$$\frac{n(n-1)}{2}h(n)^2 + nh(n) + 1 - n \leq 0$$

となるので, 二次方程式 $\frac{n(n-1)}{2}x^2 + nx + 1 - n = 0$ の二つの解 $x_n^{\pm}$ $(x_n^- < x_n^+)$ とおくと $0 < h(n) \leq x_n^+$ となる.

$$x_n^+ = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 2n(n-1)^2}}{n(n-1)} = \frac{-\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^2}}{1 - \frac{1}{n}}$$

となる. よって, はさみうちの原理 (命題 2.5) より, $\lim_{n\to\infty} h(n) = 0$ となる.

問題 2.4 (1) まず、θ が $0 \leq \alpha < \theta < 1$ を満たすように固定します。$\varepsilon = \theta - \alpha > 0$ とおくと、仮定から, 次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ があります。「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - \alpha\right| < \varepsilon$」変形すると、

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = \theta$$

となってます。（この式を出すために、$\varepsilon > 0$ を上のようにとったわけです。）

よって、$n > N_\varepsilon$ に対して次のようになります。

$$0 \leq |a_n| \leq \theta|a_{n-1}| \leq \cdots \leq \theta^{n-N_\varepsilon}|a_{N_\varepsilon}|$$

右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので、はさみうちの原理 (命題 2.5) より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となりますね。

(2) $\varepsilon \in (0, \alpha - 1)$ を固定して, $\theta = \alpha - \varepsilon > 1$ とおいてみましょう。(後でその理由が分かります。)

仮定から次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が選べます。

「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = \theta$」

つまり、$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| \geq \theta |a_n|$ が成り立ちます。だから、$n > N_\varepsilon$ に対して、次の不等式が成り立ちます。

$$|a_n| \geq \theta |a_{n-1}| \geq \cdots \geq \theta^{n-N_\varepsilon} |a_{N_\varepsilon}|$$

故に, 任意の L に対し, $N'_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ を $\theta^{N'_\varepsilon - N_\varepsilon} |a_{N_\varepsilon}| > L$ となるように選びます。すると次が成り立ちます。

$$n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \geq \theta^{n-N'_\varepsilon} L > L$$

故に, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ の定義を満たすことが確かめられました。

問題 2.5 まず、$\underline{\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1}$ を証明しよう。　(これは補題 14.4 $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$ より難しいです。でも、微分を勉強すると易しい解き方があるので、以下の証明は必要なくなります。)

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を見つければよい。

「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \log n < n\varepsilon$」

なぜなら、これは $0 < \frac{\log n}{n} = \log n^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$ を意味し、更に、$a < b \Rightarrow e^a < e^b$ を用いれば、

$$1 < n^{\frac{1}{n}} < e^\varepsilon \to 1 \ (\varepsilon \to 0)$$

と変形できるからです。

よって、「 $\cdots$ 」を満たす N_ε を見つけよう。

更に後半の不等式を変形しましょう。

$$n < e^{n\varepsilon}$$

$\alpha = e^\varepsilon$ とおくと、$\alpha > 1$ ですね。そこで、$a_n = \frac{n}{\alpha^n}$ とおいて、$a_n < 1$ となる n を見つければよいことになります。

ところで、数列 $\{a_n\}$ は、ある番号 $\hat{N}_\varepsilon$ より大きい番号 n では減少列になることが分かります。実際、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n\alpha} = (1+\frac{1}{n})\frac{1}{\alpha}$$

となるので、$\hat{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $(1+\frac{1}{\hat{N}_\varepsilon})\frac{1}{\alpha} < 1$ となるようにとれば、$n \geq \hat{N}_\varepsilon \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ となります。(この時点で、前問より、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ が導けますが、前問の解答を繰り返しておきましょう。)

更に、$\theta_\varepsilon = (1+\frac{1}{\hat{N}_\varepsilon})\frac{1}{\alpha} < 1$ とおくと、$n > \hat{N}_\varepsilon \Rightarrow a_n < \theta_\varepsilon a_{n-1} < \cdots < \theta_\varepsilon^{n-N_\varepsilon} a_{N_\varepsilon}$ なので、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ が示せる。つまり、「$\cdots$」を満たす N_ε が存在する。

各問で与えられた数列を a_n とおきましょう。

(1) $n\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}^2-1^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ より, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) $a_n = 3^n\{1+n(-\frac{2}{3})^n\} \geq 3^n\{1-n(\frac{2}{3})^n\}$ にまず注意する.

大きな n に対して、$\underline{(\frac{2}{3})^n \leq \frac{1}{2n}}$ が示せると、中括弧の中が $\frac{1}{2}$ より大きくなるので、$a_n \geq \frac{3^n}{2}$ となり $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ が示せる。

下線部は $n\log\frac{2}{3} \leq -\log(2n)$ と同じであり、$1 > \frac{2}{3}$ に注意すれば、

$$\log\frac{3}{2} \geq \log(2n)^{\frac{1}{n}} = \frac{\log 2}{n} + \log n^{\frac{1}{n}}$$

となることと同じである。右辺第一項はゼロに収束するから、右辺第 2 項のログの中身 $n^{\frac{1}{n}}$ が 1 に収束するので、右辺全体がゼロに収束する。故に、次を満たす $N_0 \in \mathbb{N}$ がある。

$$「n \geq N_0 \Rightarrow \log\frac{3}{2} \geq \log(2n)^{\frac{1}{n}}」$$

(3) 高校で $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ は習ってますね?(もし忘れたら 14 章を参照してください)よって、

$$n\sin\frac{\pi}{n} = \pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

となる。$a_n = \frac{\pi}{n}$ とおくと、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる。よって、$\frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ となるから、元の数列は π に収束する。

(4) $m = 1$ ならば、与えられた数列は $a_n = a$ となり、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ である。

$m \geq 2$ ならば、$a_n = ma + {}_mC_2\frac{a^2}{n} + \cdots$ であり、$\cdots$ は $\frac{1}{n}$ などがつき、ゼロに収束する項である。よって、$\lim_{n\to\infty} a_n = ma$ となる。

以降, 混乱が生じない場合は $\lim_{n\to\infty}$ を $\lim$ と略して書く.

(5) $a = 0$ のときは、$a_n = 1$ なので $\lim a_n = 1$ となります。以下、$a \neq 0$ とします。

例 3.3 を用いた、易しい証明をまず述べておく。（もちろん、例 3.3 は、この時点で、まだやってないから「反則」です。ですが、結果を予想するためにこうしてみます。）

$b_n = (1 + \frac{a}{\sqrt{n}})^{\frac{\sqrt{n}}{a}}$ とおくと、$\lim_{n\to\infty} b_n = e$ なので、$a_n = b_n^{a\sqrt{n}}$ だから、a の正負で結果が違うことに注意する。

まず、$a > 0$ の場合を考える。$e > 2$ だから、「$n \geq N_0 \Rightarrow b_n \geq 2$」となる $N_0 \in \mathbb{N}$ がある。更に、任意の $L > 1$ に対し、「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow n \geq (\frac{\log L}{a\log 2})^2$」となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある。$n \geq \max\{N_\varepsilon, N_0\} \Rightarrow b_n^{a\sqrt{n}} > 2^{a\sqrt{n}} > L$ なので、$\lim a_n = \infty$ となる。

$a < 0$ の場合は、$2 < e$ だから、「$n \geq N_0 \Rightarrow b_n \geq 2$」となる $N_0 \in \mathbb{N}$ がある。更に、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、「$n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow n < (\frac{\varepsilon}{a\log 2})^2$」となる $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある。$n \geq \max\{N_0, N'_\varepsilon\} \Rightarrow 0 < a_n = b_n^{a\sqrt{n}} \leq 2^{a\sqrt{n}} < \varepsilon$ となるので、$\lim a_n = 0$ となる。

<u>さて、例 3.3 を習ってないので、$\lim b_n = e$ が分かってないとしよう。</u>

$a > 0$ のときを考える。($\lim a_n = \infty$ になることを予想して。)

$m(n) = [\sqrt{n}a] \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ とする。($n > a$ とすれば、$m(n) \in \mathbb{N}$ である。) つまり、$m(n) \leq \sqrt{n}/a < m(n)+1$ を満たすことに注意する。また、$\lim_{n\to\infty} m(n) =$

∞ が成り立つことにも注意する。

定義の仕方から、$\frac{1}{m(n)+1} < a/\sqrt{n} \leq \frac{1}{m(n)}$ が成り立つ。よって、$b_n \geq (1+\frac{1}{m(n)+1})^{\sqrt{n}/a} \geq (1+\frac{1}{m(n)+1})^{m(n)} = (1+\frac{1}{m(n)+1})^{m(n)+1}\frac{1}{1+\frac{1}{m(n)+1}}$ なので、右辺は $n \to \infty$ のとき、e に収束することが分かる。以降の証明は上述のものでよい。

$a < 0$ の場合、$m(n) = [\sqrt{n}-a] \in \mathbb{N}$ とする。つまり、$m(n) \leq -\sqrt{n}/a < m(n)+1$ と $\frac{1}{m(n)+1} \leq -a/\sqrt{n} < 1/m(n)$ となる。更に、$-m(n) \geq \sqrt{n}/a > -m(n)-1$ と $-\frac{1}{m(n)+1} \geq a/\sqrt{n} > -1/m(n)$ となる。

さて、$b_n \geq (1-\frac{1}{m(n)+1})^{\sqrt{n}/a} = (1+\frac{1}{m(n)})^{-\sqrt{n}/a} \geq (1+\frac{1}{m(n)})^{m(n)}$ なので、右辺は e に収束するから、「$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow b_n \geq 2$」となる $N_0 \in \mathbb{N}$ がある。以下は、$a > 0$ のときと同様に示せます。

(6) $m = 1$ ならば、$a_n = 0$ なので $\lim a_n = 0$ である。

$m = 2$ ならば、$a_n = a^2$ なので $\lim a_n = a^2$ となる。

$m \geq 3$ ならば、(4) と同様の考察でに、$\lim a_n = \frac{m(m-1)a^2}{2}$ となる。

問題 2.6 各問題の数列を a_n とする。

(1) $a = 1$ ならば、$a_n = \frac{1}{2}$ なので明らか。

$a > 1$ ならば、$a_n = \frac{a}{1+a^{-n}}$ なので、$\lim a^{-n} = 0$ を用いれば、$\lim a_n = a$ となる。

$0 < a < 1$ ならば、$\lim a^n = 0$ なので $\lim a_n = 0$ となる。

(2) $a = 1$ ならば $a_n = 0$。

$a > 1$ ならば、$a_n = \frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}}$ なので、$\lim a_n = 1$。

$0 < a < 1$ ならば、$a_n = \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$ なので、$\lim a_n = -1$。

(3) $a = b$ ならば、$a_n = 0$ なので明らか。

$a > b$ ならば、$a_n = \frac{1-(b/a)^n}{1+(b/a)^n}$ より、$\lim a_n = 1$。

$a < b$ ならば、$\lim a_n = -1$。

(4) $0 < a \leq b \leq c$ として仮定してまず考える。$a = b = c$ ならば、$a_n = 3^{\frac{1}{n}}a$ なので、$\lim a_n = a = b = c$。

$a \leq b < c$ ならば、$a_n = \{(a/c)^n + (b/c)^n + 1\}^{\frac{1}{n}}c$ であり、中括弧は 1 よりおおきく、3 より小さいから

$$1 \leq \{(a/c)^n + (b/c)^n + 1\}^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}$$

となるが、補題 14.4 より右辺は 1 に収束するから、$\lim a_n = c$ となる。

$a < b = c$ のときも、$a \leq b < c$ と同じ計算で c に収束する。

つまり、$\lim a_n = \max\{a, b, c\}$ となる。

問題 2.7 $a_1 = b_1$ の場合, $a_n = b_n = a_1 = b_1$ なので, 明らかに $\lim a_n = \lim b_n$ である.

$a_1 > b_1$ の時を考えましょう。$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \geq \sqrt{a_1 b_1} = b_2$ が成り立ってます。真ん中の不等式は、相加相乗不等式 ($2ab \leq a^2 + b^2$) です。同様に、$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}$ が成り立つ。

また、$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$ であり、$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$ となる。つまり次が成り立つ。

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_{n-1} \geq a_n \geq b_n \geq b_{n-1} \geq \cdots \geq b_2 \geq b_1$$

$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は、それぞれ下に、上に有界な増加列なので, 単調収束定理 (系 2.7) より, それぞれ極限 α, β をもつ. つまり, $\lim a_n = \alpha$, $\lim b_n = \beta$ が成り立つ.

$\alpha = \beta$ を示そう。

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2}$$

が成り立つ。また、

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$$

が成り立つ。よって、

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|a_1 - b_1|$$

が成り立ち、

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - a_{n+1}| + \frac{1}{2^n}|a_1 - b_1| + |b_{n+1} - \beta|$$

なので、右辺第 1 項と第 3 項は、n を大きくすれば小さくでき、第二項も小さ

くなるので、$|\alpha-\beta|\leq 0$ とできるので、$\alpha=\beta$ となる。

最後に、$a_1<b_1$ の場合を考えましょう。$n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geq\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}$ なので、$a_2\geq b_2$, $a_3\geq b_3$,..., $a_n\geq b_n$,... が成り立ちます。(但し、$a_1<b_1$ です。)

$n\geq 2$ に対し、$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leq\frac{a_n+a_n}{2}=a_n$ と $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geq\sqrt{b_nb_n}=b_n$ が成り立つ。(但し、$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}>\frac{a_1+a_1}{2}=a_1$ と $b_2=\sqrt{a_1b_1}<\sqrt{b_1b_1}=b_1$ です。)だから、$n=1$ を除いてしまえば、上述の場合と同じなので、$\lim a_n=\lim b_n$ となります。

問題 2.8 (1) 任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\frac{1}{n}(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n})\leq\frac{n-k}{n}\frac{1}{k}\leq\frac{1}{k}<\varepsilon$ となる $k\in\mathbb{N}$ を固定する. $\forall n\geq N_0(\geq k)$ ならば $\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})<\varepsilon$ となる $N_0\in\mathbb{N}$ があるので,

$$\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})<2\varepsilon\quad(\forall n\geq N_0)$$

より, 極限は零.

(2) $\forall L>0$ に対し, $\forall k\geq K_L$ ならば,

$$\log k\geq L$$

となる $K_L\in\mathbb{N}$ がある.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k\geq\frac{1}{n}\sum_{k=K_L}^{n}\log k\geq\frac{L}{n}(n-K_L+1)\geq L(1-\frac{K_L}{n})$$

なので, $n\geq 2K_0$ とすれば, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\log k\geq L/2$ となる. 故に, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\log k=\infty$ となる. つまり,

$$\lim_{n\to\infty}\log(n!)^{\frac{1}{n}}=\infty$$

(3) $1\leq(n!)^{1/n^2}$ に注意. $n!\leq n^n$ なので,

$$1\leq(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leq n^{\frac{1}{n}}$$

ところが, $\log n^{1/n}=\frac{\log n}{n}\to 0$ だから, $n^{1/n}\to 1$ である. 証明終わり.

(4) **補題** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\}$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\ell$$

が成り立つ．また，$a_n>0$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\ell$ も成り立つ．

補題の証明 前半は問題 2.8(1) と同様に示せる．後半は前半の対数をとればよい.)

$a_n=n^n/n!$ とおくと, $b_n:=a_{n+1}/a_n=(n+1)^{n+1}/n^n(n+1)=(1+\frac{1}{n})^n\to e$ となるので, $\{(a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}\}^{\frac{n+1}{n}}=(a_{n+1})^{\frac{1}{n}}=(a_1)^{\frac{1}{n}}(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}\to e$ となる．(補題の後半を用いた) 故に, $(a_n)^{\frac{1}{n}}\to e$ となる．

問題 2.9 (1) $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geq N\to\log n\leq\sqrt{n}$ (各自示してみよ)．よって, $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}\leq\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}^3}<\infty$ となる．

$$0\leq\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}^3}\leq\int_{N-1}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx=[-2x^{-\frac{1}{2}}]_{N-1}^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{N-1}}$$

なので, 収束する．

(2) $a_n:=(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ とすると,

$$\log a_n=n^2log(1-\frac{1}{n})=n^2(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6(1-\frac{\theta_n}{n})}\frac{1}{n^3}$$

となる, $\theta_n\in(0,1)$ がある．よって,

$$a_n=e^{-n-\frac{1}{2}-\frac{1}{6n(1-n^{-1}\theta_n)}}\leq e^{-n}$$

故に, $\sum a_n\leq\sum e^{-n}<\infty$ で収束する．

(3) $0\leq 1-\cos\frac{\alpha}{n}=\frac{\alpha^2}{n^2}\cos\frac{\theta_n\alpha}{n}\leq\frac{\alpha^2}{n^2}$ なので、収束する．

(4) $a_n:=\frac{1}{an+b}=\frac{1}{a}\frac{1}{n+a^{-1}b}$ なので, $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geq N(>b/a)\to a_n\geq\frac{1}{2an}$ より, $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n\geq\frac{1}{2a}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ より, 発散する．ここで, $\sum\frac{1}{n}=\infty$ を用いている (調和級数の発散)．この証明も, 積分を考えれば示せる．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\geq 1+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx=\infty$$

(5) $a_n := n^\alpha/2^n$ とおくと, $a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n^{\frac{1}{n}})^\alpha}{2}$ であるが, $b_n := n^{\frac{1}{n}}$ とおくと, $\log b_n = \frac{\log n}{n} \to 0$ なので, $b_n \to 1$ となる. 故に, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \to a_n \leq \frac{1}{2}$ なので, コーシーの判定法により, 収束する.

(6) $a_n := \frac{n^\alpha}{n!}$ とおくと,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^\alpha}{n+1} \to 0$$

なので, ダランベールの判定法により収束する.

(7) $\log(1+x) = x - \frac{1}{1+\theta x}x^2$ となる $\theta \in (0,1)$ がある. よって,

$$a_n := \frac{1}{n^\alpha}\log(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \frac{1}{n^{2+\alpha}}$$

$\alpha > 0$ の時は, 収束する.

$a_n \geq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ は, $\alpha \leq 0$ なら発散.

(8) **補題** (ライプニッツの交代級数) $a_n \geq 0$ が, $a_{n+1} \geq a_n$ かつ, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する.

証明　$S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}a_n$ とおくと,

$$S_{2m+2} = S_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq S_{2m}$$

また, $S_{2m} \leq a_1 - a_{2m} \leq a_1$ なので, S_{2m} は極限を持つ. また, $S_{2m+1} = a_{2m+1} + S_{2m}$ なので極限持ち, それ派は一致する. (確かめよ!)

故に, $\exists \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ も収束する.

(8) の証明. $a_n := \sin\frac{\alpha}{n}$ は補題の仮定を満たす. 故に収束する.

(9) $a^{\log n} = e^{\log a \log n} = n^{\log a}$ より, $\log a < -1$ ならば収束し, $\log a \geq -1$ ならば発散する. つまり, $a < e^{-1}$ の時, 収束し, $a \geq e^{-1}$ の時, 発散する.

(10) $a_n = n^\alpha(a^{\frac{1}{n}} - 1) = n^{\alpha-1}(\log a)^2 e^{\frac{\theta_n \log a}{n}}$ となる $\theta_n \in (0,1)$ がある. よって, $a > 1$ の時は,

$$(\log a)^2 n^{\alpha-1} \leq a_n \leq (\log a)^2 a n^{\alpha-1}$$

なので, $\alpha < 0$ ならば収束し, $\alpha \geq 0$ ならば発散する. $0 < a \leq 1$ の時は,

$$a(\log a)^2 n^{\alpha-1} \leq a_n \leq (\log a)^2 n^{\alpha-1}$$

となり, $\alpha < 0$ の時, 収束し, $\alpha \geq 0$ の時, 発散する.

(11) $a_n := \frac{n!}{n^n}$ とおくと, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(1+n^{-1})^n} \to e^{-1}$ なので, 収束する.

(12) $a_n := (cn+d)^n/(an+b)^n$ とおくと, $a_{n+1}/a_n = a_1 = (c+dn^{-1})/(a+b^{-1})$ より, $c/a < 1$ ならば収束する. $a = c$ のとき, $a_n = 1 + \frac{d-b}{an+b} \to 1$ なので, 発散する.

$c > a > 1$ の時も, n が大きければ, $a_n > c/a$ となり発散する.

第 3 章

関数の連続性

演習 3.1 $I=\mathbb{R}$ と $J=[0,\infty)$・$I=(0,\infty)$ と $J=\mathbb{R}$・$I=(-\infty,0)$ と $J=(0,\infty)$ などなど、色々可能性があります。

だめな例を挙げておきましょう。$I=[0,\infty)$ と $J=(-\infty,1]$

演習 3.2 $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ を仮定してるので、その定義を思い出してみましょう。正の実数 ε を何でもいいから一個決めます。次の括弧「 $\cdots$ 」でくくって書いてあることが成り立っているような、正の実数 $\delta_{\varepsilon,\alpha}$ があります。

「I の元（要素）x が $|x-\alpha|<\delta_{\varepsilon,\alpha}$ を満たすならば、必ず $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ が成り立つ。」

また、もう一つの仮定を思い出しましょう。（だいたい、数学の問題で、問題にでてきた仮定を使わないことは無いのが普通です。）

すべての I の元 (要素)x は $f(x)\geq\beta$ を満たすので、I の元 x が $|x-\alpha|<\delta_{\varepsilon,\alpha}$ を満たしているならば、必ず、

$$\beta-\ell\leq f(x)-\ell\leq|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

となっています。最初と最後の不等式だけ見れば、$\beta-\ell<\varepsilon$ が成り立ってます。$\varepsilon>0$ は任意に固定していたことを思い出しましょう。ここで命題 1.1 を適用すれば、$\beta-\ell\leq 0$ が成り立ちます。

命題 3.1 を用いた別解 ($\ell\geq\beta$ の場合のみ) $x_n\in I\setminus\{\alpha\}$ が $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ を満たす数列を選ぶ. (I が開区間なら, $x_n=\alpha+\frac{1}{n}$ とおけば (n は十分大きいとき), $x_n\in I$ となる. また, $I=(a,b]$ で $\alpha=b$ のときは, $x_n=\alpha+\frac{1}{n}$ とおけばよい.)

命題 3.1 より, $\lim f(x_n)=\ell$ であるが, $f(x_n)\geq\beta$ なので $\ell\geq\beta$ となる.

演習 3.3 $\forall\varepsilon > 0$ に対し,「$x < -L_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$」となる $L_\varepsilon > 0$ が存在する.

演習 3.4 $\forall L > 0$ に対し,「$|x - \alpha| < \delta_L \Rightarrow f(x) < -L$」となる $\delta_L > 0$ が存在する.

演習 3.5 (1) $\forall L > 0$ に対し,「$x > K_L \Rightarrow f(x) < -L$」となる $K_L > 0$ が存在する.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \equiv \forall L > 0$ に対し,「$x < -K_L \Rightarrow f(x) > L$」となる $K_L > 0$ が存在する.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \equiv \forall L > 0$ に対し,「$x < -K_L \Rightarrow f(x) < -L$」となる $K_L > 0$ が存在する.

演習 3.6 (1) $0 \leq e^{-x} \leq \frac{1}{2^{[x]}}$ であり, 右辺は $\forall\varepsilon > 0$ に対し, $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$ となる $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ をとれば, $x \geq n_\varepsilon$ ならば $0 \leq e^{-x} < \varepsilon$ となるので, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ となる.

(2) $x \to \infty$ のときをまず考える. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ なので, (1) より, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$ に注意して, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$ となる.

$x \to -\infty$ のときは, $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ となる. $x = -y$ とおけば, $y \to \infty$ の場合に帰着できるので, 次のようになる.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-2y} - 1}{e^{-2y} + 1} = -1$$

演習 3.7 (1) ∞ の場合：(定義から,「$\forall L > 0$ に対し,『$|x - \alpha| < \delta_L \Rightarrow f(x) > L$』となる $\delta_L > 0$ が存在する」ことを確認しておく.)

$\forall\varepsilon > 0$ に対し, (･･･) より「$|x - \alpha| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ がある. よって, $|x - \alpha| < \delta_\varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$ となるので, $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$ が成り立つ.

$-\infty$ の場合：$\forall\varepsilon > 0$ に対し, 仮定から「$|x - \alpha| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ がある. よって, $|x - \alpha| < \delta_\varepsilon \Rightarrow 0 > \frac{1}{f(x)} > -\varepsilon$ となるので, $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$ が成り立つ.

(2) ∞ の場合：$\forall\varepsilon > 0$ に対し,「$x > L_\varepsilon \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$」となる $L_\varepsilon > 0$ がある.

よって, $x > L_\varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$ なので, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ となる.

$-\infty$ の場合：$\forall\varepsilon > 0$ に対し,「$x > L_\varepsilon \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$」となる $L_\varepsilon > 0$ がある. よって, $x > L_\varepsilon \Rightarrow 0 > \frac{1}{f(x)} > -\varepsilon$ なので, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ となる.

(3) $\forall L > 0$ に対し,「$|x-\alpha| < \delta_L \Rightarrow 0 < |f(x)| < \frac{1}{L}$」となる $\delta_L > 0$ がある. よって, $|x-\alpha| < \delta_L \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} > L$ なので $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ となる.

(4) $\forall L > 0$ に対し,「$x > K_L \Rightarrow 0 < |f(x)| < \frac{1}{L}$」となる $K_L > 0$ がある. よって, $x > K_L \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} > L$ なので $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$ となる.

演習 3.8 $y = -x$ とすれば, $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y\to\infty}(\frac{y-1}{y})^{-y} = \lim_{y\to\infty}(\frac{y}{y-1})^y$ となる. 更に, $z = y-1$ とおくと, 次のようになる.

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{z+1} = \lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^z \lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z}) = e$$

演習 3.9 $\Rightarrow$：$\forall\varepsilon > 0$ に対して,「 $\cdots$ 」が成り立つので明らか.

$\Leftarrow$：$\varepsilon > \varepsilon_0$ に対して,「 $\cdots$ 」を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ を見つければよい. ところが,「$x \in I$ が $|x-\alpha| < \delta_{\varepsilon_0,\alpha} \Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| < \varepsilon_0$」となる $\delta_{\varepsilon_0,\alpha} > 0$ があるので, この $\delta_{\varepsilon_0,\alpha} > 0$ を $\varepsilon > \varepsilon_0$ に対しても「 $\cdots$ 」が成り立つ. 実際, $x \in I$ が $|x-\alpha| < \delta_{\varepsilon_0,\alpha}$ を満たす $\Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| < \varepsilon_0 < \varepsilon$ となる.

演習 3.10 (ii)：$\{x_n\}$ を $\lim x_n = \alpha$ となる任意の数列とする. 命題 3.2$\Rightarrow$ より, $\lim f(x_n) = f(\alpha)$, $\lim g(x_n) = g(\alpha)$ となる. $b_n = f(x_n)$, $c_n = g(x_n)$ とおけば, 定理 2.4(ii) より, $\lim(b_nc_n) = f(\alpha)g(\alpha)$ となる.

つまり, $\lim(fg)(x_n) = (fg)(\alpha)$ が, $\lim x_n = \alpha$ を満たす任意の $\{x_n\}$ に対し成り立つので, 命題 3.2$\Leftarrow$ より, $\lim_{x\to\alpha}(fg)(x) = (fg)(\alpha)$ が成り立つ.

(iii) (ii) と同様に, $\lim x_n = \alpha$ となる任意の $\{x_n\}$ に対し, 命題 3.2$\Rightarrow$ より, $\lim f(x_n) = f(\alpha)$, $\lim g(x_n) = g(\alpha)$ が成り立つ.

$b_n = f(x_n)$, $c_n = g(x_n)$ とおくと, 定理 2.4(iii) より $(f(\alpha) \neq 0$ に注意して$)$, $\lim \frac{c_n}{b_n} = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$ となる. 故に, 命題 3.2$\Leftarrow$ より, $\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$ となる.

演習 3.11 $y = f(x) = e^x - 1$ とおくと, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ に注意する.

$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{\log(y+1)} = \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}}$ となるので, 例 3.8 より, 右辺の分母の $y \to 0$ の極限は 1 に収束する. 故に, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} = 1$ となる.

例 3.8 の結果を忘れた場合　分母の極限 $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}}$ を求めればよい.

最も基本的な式 (例 3.3) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ だけは, 覚えておいた方が良い (この証明を思い出すのは難しいので).

$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$ を求めればいいが, y が正から 0 に近づくか, 負から 0 に近づくかで $z = \frac{1}{y}$ とおいたとき, $z \to \infty$ か $z \to -\infty$ のどちらかになるので, 場合分けしておく.

つまり, $\lim_{y\to 0+}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0-}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ を示す. $y \to 0$ のときは, $z \to \infty$ となるので, $\lim_{y\to 0+}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^z = e$ となる (例 3.3).

$y \to -0$ のときは, $z \to -\infty$ となるので, $\lim_{y\to 0-}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{z\to-\infty}(1+\frac{1}{z})^z = e$ となる (例 3.3). 故に, 右極限と左極限が存在して値が一致するので, $y \to 0$ の極限が存在し (各自確認せよ), $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ となる. $\log x$ は $x = 1$ で連続だから, $\lim_{y\to 0}\log(1+y)^{\frac{1}{y}} = \log e = 1$ となる.

演習 3.12 (1) $I = (-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi)$, $J = \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z})$

(2) $I = (0,\infty)$, $J = \mathbb{R}$

(3) $I = [0,\infty)$ と $J = [0,\infty)$ または, $I = (-\infty, 0]$ と $J = [0,\infty)$

(4) $I = (0,\infty)$ と $J = (0,\infty)$ または, $I = (-\infty, 0)$ と $J = (-\infty, 0)$

演習 3.13 狭義増加の場合：$x, y \in I$ が $x \neq y$ ならば $x < y$ または $x > y$ が成り立つ. x と y の役割を変えればよいので, $x < y$ の場合のみ示す. $f(x) < f(y)$ なので, $f(x) \neq f(y)$ となり単射になる.

狭義減少の場合も同様なので略す.

演習 3.14 f が単射であること：$-1 \leq x < y \leq 1$ のとき $f(x) \neq f(y)$ を示せばよい. $1 \leq x < y \leq 0$ の場合：$f(x) = x < y = f(y)$ より OK, $1 \leq x \leq 0 <$

$y \leq 1$ の場合：$f(x) = x$, $f(y) = 2 - y$ より, $f(y) \geq 1 > 0 \geq x = f(x)$ より OK, $0 < x < y \leq 1$ の場合：$f(x) = 2 - x > 2 - y = f(y)$ より OK.

単調増加でないこと ($(0,1]$ で単調減少なので)：$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 1 = f(1)$ なので I で単調増加ではない. 単調減少でないこと：$f(-1) = -1 < 0 = f(0)$ なので I で単調減少でない.

演習 3.15 (1) と (2) は, $y = \cos x$, $y = \tan x$ のグラフが描ければ当たり前に見えるが, 「まだグラフを知らない」という前提で以下の証明をつけた. 実際, 三角関数のグラフの "正確な" 形状は, 高校では微分を学習した後で, 単調増加・減少などを確かめ, グラフを書いたはずである. 本書では, まだ微分はこの時点で習っていないという前提である.

本書に現れる三角関数は, 高校で学習したように直角三角形の辺の長さの比で定義したものであり, その定義から加法定理は既知のものとして使っている.

(1) $0 \leq x < x' \leq \pi$ とする. $\cos x - \cos x' = -\sin\frac{x+x'}{2}\sin\frac{x-x'}{2}$ となる. $0 < \frac{x+x'}{2} < \pi$ と $0 > \frac{x-x'}{2} \geq -\frac{\pi}{2}$ に注意すると, $\sin\frac{x+x'}{2} > 0$, $0 > \sin\frac{x-x'}{2}$ より, $\cos x - \cos x' > 0$ なので狭義減少である.

(2) α, β に対し, $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$ を思い出す. $-\frac{\pi}{2} < x < x'\frac{\pi}{2}$ に対し, 後で $\alpha = \frac{x+x'}{2}$, $\beta = \frac{x-x'}{2}$ とおく. つまり, $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = x'$ になる. よって,

$$\tan x - \tan x' = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} - \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2\tan\beta(1 + \tan^2\alpha)}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta}$$

$0 > \beta = \frac{x-x'}{2} > -\frac{\pi}{2}$ なので, 分子は負となる. 故に, 分母が正になることを示せば狭義増加となる.

$$\text{分母} = \frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

に注意する. $|\alpha|, |\beta| < \frac{\pi}{2}$ なので, この分母はゼロにならないことにも注意する. さて, この分子を x, x' で書き直すと, $\cos x\cos x'$ となり, $|x|, |x'| < \frac{\pi}{2}$ なので正になる.

(3) $x < 0 < x'$, $x = 0 < x'$, $x < 0 = x'$ の時は, 直接計算して $f(x) < f(x')$ がすぐ分かる. よって, $x < x' < 0$ と $0 < x < x'$ の場合を調べる. $x' = x + h$

$(h > 0)$ とおく.

$a^m - b^m = (a-b)\sum_{k=0}^{m-1} a^{m-1-k}b^k$ に注意すると, $x \in \mathbb{R}$ と $h > 0$ に対し,

$f(x+h) - f(x) = (x+h)^{2n-1} - x^{2n-1} = h\sum_{k=0}^{2(n-1)} (x+h)^{2(n-1)-k}x^k$ となる.

$0 < x < x' = x+h$ の時は右辺は正であり, $f(x) < f(x')$ が示せる.

$x < x+h = x' < 0$ の時は, $x+h = -|x| + h < 0$ と $x = -|x|$ なので, 置き換えると (偶数個あるので)$f(x) - f(x+h) = h\sum_{k=0}^{2(n-1)} (|x|-h)^{2(n-1)-k}|x|^k$ となり, 右辺は正なので $f(x < f(x+h)$ が成り立つので狭義増加となる.

(4) $0 \leq x < x'$ とし, $x' = x+h$ $(h > 0)$ と表せるとする. $f(x+h) - f(x) = h\sum_{k=0}^{2n-1}(x+h)^{2n-1-k}x^k$ の右辺は正なので狭義増加となる.

(5) $x < x' = x+h$ $(h > 0)$ とおく. $f(x+h) - f(x) = e^x(e^h - 1) > 0$ となる. $(e > 2$ なので)

(6) $0x < x' = x+h$ $(h > 0)$ とする. $f(x+h) - f(x) = \log\frac{x+h}{x} = \log(1 + \frac{h}{x})$ となる. 右辺を α とおくと $1 < 1 + \frac{h}{x} = e^\alpha$ となり, $e > 2$ なので $\alpha > 0$ となる. (もし $\alpha \leq 0$ ならば $e^{-\alpha} > 2^{-\alpha} > 1$ 矛盾するから)

演習 3.16 B は下に有界な集合なので下限が存在するので, $\alpha = \inf B$ とおく. 下限の定義から $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し,「$\alpha + \frac{1}{n} > x'_n$」となる $x'_n \in B$ が存在する. よって, $|x'_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, つまり $\lim_{n\to\infty} x'_n = \alpha$ となる. 一方, $x'_n \in B$ なので $\beta \leq f(x'_n)$ なので f は連続だから, $\underline{\beta \leq \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(\alpha)}$ となる (命題 2.2).

$\alpha \in I$ なので, $a \leq \alpha \leq b$ だが, $\alpha > a$ がわかる. 何故なら, もし $\alpha = a$ ならば $f(a) < \beta \leq f(\alpha) = f(a)$ となり矛盾するからである.

アルキメデスの原理から「$N_1 \geq \frac{1}{\alpha - a}$」となる $N_1 \in \mathbb{N}$ がある. よって, $n \geq N_1$ に対し, $\alpha - \frac{1}{n} \notin B$ であり $\beta > f(\alpha - \frac{1}{n})$ が成り立つ. 再び f の連続性と命題 2.2 より $\beta \geq f(\alpha)$ となり, 下線部分とあわせて $f(\alpha) = \beta$ となる.

$\underline{f(a) > f(b) \text{ の場合の証明}}$ $f(b) < \beta < f(a)$ のときだけ示せばよい. $C = \{x \in I \mid \beta \leq f(x)\}$ とおく. C は上に有界な集合だから $\alpha = \inf C$ とおける. 定義から, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 「$\alpha + \frac{1}{n} > c_n$」となる $c_n \in C$ がある. $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ な

ので $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ なので, f の連続性と命題 2.2 から $\underline{\beta \leq f(\alpha)}$ が成り立つ.

$\alpha = b$ ならば $f(b) < \beta \leq f(\alpha) = f(b)$ となり矛盾するので, $\alpha < b$ となる. $n \geq \frac{1}{b-\alpha}$ に対して, $\alpha + \frac{1}{n} \notin C$ なので, $\beta > f(\alpha + \frac{1}{n})$ となるので, f の連続性と命題 2.2 より $\beta \geq f(\alpha)$ となり, 下線部分とあわせて $\beta = f(\alpha)$ が成り立つ.

演習 3.17 $B = \{f(x) \mid x \in I\}$ とおき, B が下に有界であることを示す. 否定すると, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し「$f(x'_n) < -n$」となる $x'_n \in I$ がある. ボルツァノ・ワイエルストラスの定理 (定理 2.10) より $\{x'_n\} \subset I$ は収束する部分列 $\{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がある. つまり, $\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \alpha'$ となる α' がある. $a \leq x'_{n_k} \leq b$ より $\alpha' \in I$ になるので, f の連続性から $f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) \in \mathbb{R}$ となる. しかし, $f(x'_{n_k}) < -n_k$ なので $f(\alpha) = -\infty$ となり矛盾する.

B が下に有界だから $\inf B = \gamma \in \mathbb{R}$ とおく. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し, 「$\gamma + \frac{1}{n} > y_n$」となる $y'_n \in B$ がある. よって, $y'_n = f(z_n)$ となる $z_n \in I$ がある. よって, 再び定理 2.2 により部分列 $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と $\beta \in \mathbb{R}$ で $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \beta$ となるものがある.

先ほどと同様に, $a \leq \beta \leq b$ と $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(\beta)$ となる. 一方, $\gamma + \frac{1}{n_k} > y'_{n_k} \geq \gamma$ より, $\lim_{k\to\infty} y'_{n_k} = \gamma$ となる. つまり, $\gamma = f(\beta)$ となる. $\beta \in I$ であり, $\forall x \in I$ に対し, $f(x) \geq f(\beta)$ なので $f(\beta) = \min f(I)$ である.

演習 3.18 以下の議論で, $\forall \varepsilon > 0$ を固定する. 「$x, x+h \in I$ が $0 < h < \delta_\varepsilon$ を満たせば $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ が存在すればよい. (定義で $y = x + h$ とおいた. $y < x$ のときは x と y の役割を代えればよい.)

(1) $g(x) = e^{-x}$ は $x = 0$ で連続だから (例 14.14 と定理 3.4), 「$|h| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |1 - e^{-h}| < \varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ がある. この $\delta_\varepsilon > 0$ を使うと, $e^{-x} \leq 1$ ($x \geq 0$) に注意すれば, $x, x+h \in I$ が $0 < h < \delta_\varepsilon$ ならば $0 < f(x) - f(x+h) = e^{-x}(1 - e^{-h}) < \varepsilon$ となる.

(2) $h > 0$, $0 \leq x < x + h \leq 100$ とすると, $\delta_\varepsilon = \min\{1, \frac{\varepsilon}{201}\}$ とおくと, $0 < h < \delta_\varepsilon$ ならば, 次が成り立つ.

$$0 < (x+h) - x^2 = h(2x+h) < 201h < \varepsilon$$

(3) 演習 14.50 より $\sin x$ は連続である. よって, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, 「$|h| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$|2\sin\frac{h}{2}| < \varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ が存在する．

$\cos(x+h) - \cos x = -2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$ に注意すれば，$0 < h < \delta_\varepsilon$ ならば $|\cos(x+h) - \cos x| \leq 2|\sin\frac{h}{2}| < \varepsilon$ となる．

(4) $0 \leq x < x+h$ とすると，$\sqrt{x+h}^2 = x+h \leq x + 2\sqrt{xh} + h = (\sqrt{x}+\sqrt{h})^2$ なので，$0 < \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \leq \sqrt{h}$ となることに注意する．$\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ とおけば，$0 < h < \delta_\varepsilon \Rightarrow \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \leq \sqrt{h} < \varepsilon$ となる．

演習 3.19 (1) 背理法による証明：$\varepsilon > 0$ に対し，「$x, x' > 0$ が $|x - x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}| < \varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ があるとする．$\varepsilon = 1$ としてもよいので，δ_1 とおく．つまり，$|x - x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{x(}| < 1$ が成り立つ．

$N_1 > \frac{1}{\delta_1}$ となる $N_1 \in \mathbb{N}$ を固定する．$N_1 \geq 2$ としてよい．$\forall x > 0$ に対し，$0 < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\frac{1}{N_1}} < 1$ が成り立つ．

$$\frac{1}{N_1(x+\frac{1}{N_1})^2} \leq \frac{1}{N_1 x(x+\frac{1}{N_1})} < 1$$

なので，変形して $0 < \frac{1}{\sqrt{N_1}} - \frac{1}{N_1} < x$ となるが，$0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{N_1}} - \frac{1}{N_1}$ のときに矛盾するので，仮定が間違っている．

(2) 背理法による証明：「$x, x' \geq 0$ が $|x - x'| < \delta_1 \Rightarrow |e^x - e^{x'} < 1$」となる $\delta_1 > 0$ が存在すると仮定する．$N_1 > \frac{1}{\delta_1}$ となる $N_1 \in \mathbb{N}$ を固定し，$x' = x + \frac{1}{N_1}$ とおく．後の都合で，$\underline{0 < e^{\frac{1}{N_1}} < \frac{3}{2}}$ が成り立つとしておく (必要なら N_1 をより大きく取って)．

$$0 < e^{x+\frac{1}{N_1}} - e^x = e^x(e^{\frac{1}{N_1}} - 1) < 1$$

故に，$e^x < \frac{1}{e^{\frac{1}{N_1}} - 1}$ が $\forall x \geq 0$ で成り立つが，変形して

$$x < -\log(e^{\frac{1}{N_1}} - 1)$$

下線部から $x < -\log\frac{1}{2} = \log 2$ となるが，$x \geq \log 2$ のときに矛盾する．故に一様連続でない．

問題 3.1 (1) 以降，複合同順に注意する．$t = 0$ のときは極限は 1 になるのは明らかか．

$t>0$ の時は, $x=ty$ とおくと, (もし極限があるとすれば) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{t}{x})^x = \lim_{y\to\pm\infty}(1+\frac{1}{y})^{ty}$ となる. 連続関数 $f(x)=x^t$ を用いれば, 右辺 $= \lim_{y\to\pm\infty} f((1+\frac{1}{y})^y)$ となるが, 例 3.3 より極限は $f(e)$ となるので, e^t と等しくなる.

$t<0$ の時も $x=ty$ とおくと, $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{t}{x})^x = \lim_{y\to\mp\infty}(1+\frac{1}{y})^{ty}$ となり, $t>0$ の場合と同様に e^t と一致する.

(2) 命題 14.38(iii) より, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ に注意する. $y=\sin x$ とすると, $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{\sin^{-1} y}} = \lim_{y\to 0}\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\}^{\frac{y}{\sin^{-1} y}}$ となる. $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin^{-1} y} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ に注意する.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\}^{\frac{y}{\sin^{-1} y}}$$

なので, 直感的には右辺 $=e$ となりそうだが, テキスト中の定理・命題からは直接は示せない. (例えば, $g(y)=(1+\frac{1}{y})^y$ とおくと $\lim_{y\to 0} g(y) = e$ だが, 右辺 $= \lim_{y\to 0} g(y)^{\frac{y}{\sin^{-1} y}}$ であり 1 変数関数の合成関数で表せない.)

厳密な証明を述べる：$\forall\varepsilon>0$ を固定し,「$|y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |(1+y)^{\sin^{-1} y} - e| < \varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon>0$ を見つければよい.

そのために $\forall\varepsilon' \in (0,1)$ を固定する (後で, $\varepsilon>0$ と関係をつける). $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin^{-1} y} = 1$ と $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ より, 次を満たす $\delta_1, \delta_2 > 0$ がある.

$$「|y|<\delta_1 \Rightarrow |\frac{y}{\sin^{-1} y} - 1| < \varepsilon', \quad |y|<\delta_2 \Rightarrow |(1+y)^{\frac{1}{y}} - e| < \varepsilon'」$$

今後, $|y|<\delta(\varepsilon') = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと, $e-\varepsilon' < (1+y)^{\frac{1}{y}} < e+\varepsilon'$ より,

$$(e-\varepsilon')^{\frac{y}{\sin^{-1} y}} - e < \{(1+y)^{\frac{1}{y}}\}^{\frac{y}{\sin^{-1} y}} - e < (e+\varepsilon')^{\frac{y}{\sin^{-1} y}} - e$$

となり, 更に次を得る.

$$(e-\varepsilon')^{1-\varepsilon'} - e < \{(1+y)^{\frac{1}{y}}\}^{\frac{y}{\sin^{-1} y}} - e < (e+\varepsilon')^{1+\varepsilon'} - e$$

さて, 最初に固定した $\varepsilon>0$ に対し, 十分小さい $\varepsilon'>0$ で上式から

$$-\varepsilon < (e-\varepsilon')^{1-\varepsilon'} - e, \quad かつ \quad (e+\varepsilon')^{1+\varepsilon'} - e < \varepsilon \qquad (問題 3.1(2)1)$$

となる $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) > 0$ が取れる仮定すると, $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon'(\varepsilon))$ ととれば, $|y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon - e < (1+y)^{\frac{1}{\sin^{-1} y}} - e < \varepsilon - e$ となる.

式 (問題 3.1(2)1) を示す. 後半の式：もし, この不等式が成り立つ $\varepsilon' \in (0,1)$ がないとすると, $\varepsilon' \in (0,1) \Rightarrow (e+\varepsilon')^{1+\varepsilon'} \geq \varepsilon + e$ となる. 故に, $(1+\varepsilon')\log(e+\varepsilon') \geq \log(\varepsilon+e)$ なので, $\inf\{(1+\varepsilon')\log(e+\varepsilon') \mid \varepsilon' \in (0,1)\} \geq 1 + \theta_\varepsilon$ となる $\theta_\varepsilon > 0$ がある. 左辺は 1 と等しくなり ($\varepsilon' \to 0$ とする) 矛盾を得る.

前半の式：同様に $\varepsilon' \in (0,1)$ が取れないとすると, $\log(e-\varepsilon) \geq \sup\{(1-\varepsilon')\log(e-\varepsilon') \mid \varepsilon' \in (0,1)\}$ となる. この右辺は $\varepsilon' \to 0$ とすれば 1 と一致して矛盾する.

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ なので, $\frac{1}{x} = \frac{(\log x)'}{(x)'}$ に注意すればロピタルの定理より, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ となる. $f(y) = e^y$ と置けば, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}} = f(\frac{\log x}{x})$ なので $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = f(\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}) = f(0) = 1$ となる.

(4) $\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}$ に注意して, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \frac{2}{3}$ となる.

(5) $\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x+1)} = \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}$ に注意する. 命題 14.38(iii) より $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ なので, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} = -\lim_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^2 (\cos x + 1) = -2$ となる.

(6) $y = x-1$ とすると, $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{-\frac{1}{y}} = e^{-1}$ となる.

問題 3.2 「$1-\delta < x < 1+\delta\ (x \neq 1) \Rightarrow \frac{499}{1000} < \frac{1}{1+x} < \frac{501}{1000}$」となる $\delta > 0$ を見つければよい. よって, $\frac{1000}{499} - 1 > x > \frac{1000}{501} - 1$ となるから, $1+\delta \leq \frac{1000}{499} - 1 = \frac{501}{499}$ と $1-\delta \geq \frac{1000}{501} - 1 = \frac{499}{501}$ となればよい. 故に, $\delta \leq \frac{2}{499}$ かつ $\delta \leq \frac{2}{501}$ が成り立てばよい. $\frac{2}{499} > \frac{2}{501}$ なので $\delta \in (0, \frac{2}{501}]$ ならばよい.

問題 3.3 (1) 命題 14.38(iii) より $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ なので, $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} = 1$ なので, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ なので $x=0$ で連続になる.

(2) $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\times 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ だが $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{-x} = -1$ となるので連続でない. (右連続にはなっている.)

(3) $x_n = \frac{1}{2n\pi}\ (n \in \mathbb{N})$ とすると $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ なので, 連続にならな

い. もし, 連続ならばどんな数列 $\{x_n\}$ で $\lim x_n = 0$ を満たすものをとっても $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$ とならねばならない (命題 3.1).

(4) $\lim_{x\to 0-} = e^{\frac{1}{x}} = 0$ と $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ となる. $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0+} = 0$ となり連続でない. (右連続ではある.)

(5) $\lim_{x\to 0-} = e^{\frac{1}{x}} = 0$ と $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ となるが, どちらにしても $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ となり, 連続である.

(6) $y = \tan^{-1}\frac{1}{x}$ および, $g(y) = f(\frac{1}{\tan y})$ とおく $(y \neq 0)$. (つまり, $g(\tan^{-1}\frac{1}{x}) = f(x)$ となる. $g(y) = \frac{y}{\tan y} = \frac{y\cos y}{\sin y}$ なので, $\lim_{y\to\pm\frac{\pi}{2}} g(y) = 0$ となる. 一方, $\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{y\to\pm\frac{\pi}{2}} g(y) = 0 = f(0)$ なので, 連続である.

問題 3.4 $\forall\alpha \in I$ を固定する. 仮定から, $\forall\varepsilon > 0$ に対し,「$x \in I$ が $|x-\alpha| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon > 0$ がある. 三角不等式 (補題 1.2) より $|\,|f(x)| - |f(\alpha)|\,| \leq |f(x) - f(\alpha)|$ となる. よって「$x \in I$ が $|x-\alpha| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\,|f(x)| - |f(\alpha)|\,| < \varepsilon$」となる δ_ε が選べたので, $|f|$ は $\alpha \in I$ で連続. $\forall\alpha \in I$ なので $|f| \in C(I)$ となる.

問題 3.5 (1) $b_n = \log a_n$ とおくと, $\lim b_n = \log\alpha$ なので $\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} b_n}{n} = \log\alpha$ である (命題 2.6). $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_n = \log(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ より $f(x) = \log x$ は連続なので, $\log\alpha = \lim\log(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \log(\lim(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}})$ なので, $\alpha = \lim(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ となる.

(2) $c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (例えば $c_1 = a_1$ とする) とおく, $\lim c_n = \alpha$ なので (1) より $\lim(c_1\cdots c_n)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ となるが, $c_1\cdots c_n = a_n$ なので OK.

問題 3.6 (1) 帰納法で, $f(\sum_{k=1}^{n} x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ が成り立つことに注意する. よって, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(1) = nf(1)$ が成り立つ. また, $m \in \mathbb{N}$ に対し, $mf(\frac{1}{m}) = f(1)$ なので $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}f(1)$ となる. よって, 正の有理数 $r = \frac{n}{m}$ に対し, $f(\frac{n}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = \frac{n}{m}f(1) = rf(1)$ となる.

更に, f は連続だから $f(0) = \lim f(\frac{1}{n}) = 0$ であり, 正の有理数 r に対し, $f(-r) + f(r) = f(0) = 0$ なので $f(-r) = -rf(1)$ となる.

故に, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\lim r_n = x$ となる有理数 $r_n \in \mathbb{Q}$ をとると, f は連続なので $f(x) = \lim f(r_n) = \lim r_n f(1) = xf(1)$ となる. 故に, $a = f(1)$ と置けばよい.

(2) まず, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $f(0) = f(0 \times n) = f(0)^n$ が成り立つ. $n = 2, 3$ の時は, $0 = f(0)(f(0) - 1)$ と $0 = f(0)^3 - f(0) = (f(0) - 1)\{f(0)^2 + f(0) + 1\}$ となる. もし, $f(0) \neq 1$ とすると, $f(0) = 0$ と $f(0)^2 + f(0) + 1 = 0$ が成り立つが, 同時に成り立つことはない. 故に $f(0) = 1$ となる.

よって, $1 = f(0) = f(1 - 1) = f(1)f(-1)$ なので $f(1) \neq 0$ に注意しておく.

自然数 $n, m \in \mathbb{N}$ に対し, $f(n) = f(1)^n$ であり, $f(\frac{1}{m})^m = f(1)$ なので, $f(\frac{1}{m}) = f(1)^{\frac{1}{m}}$ となる. よって, 正の有理数 $r = \frac{n}{m}$ に対し, $f(r) = f(1)^r$ となる.

また, $1 = f(0) = f(r - r) = f(r)f(-r)$ なので $f(-r) = \frac{1}{f(r)} = \frac{1}{f(1)^r} = f(1)^{-r}$ となる.

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, 有理数 $r_n \in \mathbb{Q}$ で $\lim r_n = x$ となるものを取ると, f の連続性から $f(x) = \lim f(r_n) = \lim f(1)^{r_n} = f(1)^x$ となるので, $a = f(1)$ と置けばよい.

問題 3.7 $g(x) = x - f(x)$ とおくと, $g(1) = 1 - f(x) \geq 0$ と $g(0) = -f(0) \leq 0$ となる. どちらかの等号が成り立てば $\alpha = 1$ または $\alpha = 0$ とおけば $g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = 0$ となるので OK.

よって, $g(1) > 0 > g(0)$ の場合を調べればよい. 中間値の定理 (定理 3.11) から $g(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in [0, 1]$ が存在する.

問題 3.8 $y = \sin^{-1} x$ とおくと, $\sin y = x$ となるが, $\sin y = \cos(-y + \frac{\pi}{2})$ である ($-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ に注意). よって, $\cos^{-1} x = - + \frac{\pi}{2}$ なので y の定義に戻れば成り立つ.

問題 3.9 $\forall \varepsilon > 0$ に対し「$x, x' \in (a, b)$ が $|x - x'| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$」となる $\delta'_\varepsilon > 0$ がある. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $x_n = a + \frac{1}{n}$ とおくと, $n, m \geq \frac{1}{2\delta'_e}$ ならば $|x_n - x_m| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \delta'_\varepsilon$ なので $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ となる. すなわち,

$\{f(x_n)\}$ はコーシー列なので極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ がある．つまり $\lim f(x_n) = \alpha$ となる．

$\displaystyle\lim_{x \to a+} f(x) = \alpha$ を示せばよい．$\forall \varepsilon > 0$ に対し，「$x, x' \in (a,b)$ が $|x - x'| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ がある．また，「$\forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を選ぶ．

$a < x < a + \delta_\varepsilon$ を任意に固定する．$n \geq \max\{N_\varepsilon, \frac{1}{\delta_\varepsilon}\}$ とおくと

$$|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - \alpha| < \varepsilon$$

となるので，$\displaystyle\lim_{x \to a+} f(x) = \alpha$ が示せた．

$\displaystyle\lim_{x \to b-} f(x)$ に関しては各自試みよ．

問題 3.10 $\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$ とおけば，$x, x' \in I$ が $|x - x'| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$ ならば

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| < \varepsilon$$

となるので，δ_ε は ε だけに依存するので一様収束である．

第 4 章

1 変数関数の微分の基礎

演習 4.1 極限 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ が存在することは, $g(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ とおいた関数 g が $x=\alpha$ で極限を持つことであるから, 命題 3.1 より, 次と同値になる.

『「$x_n \in I\setminus\{\alpha\}$ が $\lim x_n=\alpha$を満たす $\Rightarrow \lim g(x_n)=\ell$」となる $\ell\in\mathbb{R}$ がある』

g を定義に戻って書き直せばよい.

演習 4.2 (1) $g(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ とすると合成関数 $g\circ f$ の微分になるから $\cos(\cos x)(-\sin x)=-(\cos(\cos x))\sin x$ となる.

(2) $g(x)=e^x$, $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと $g\circ f$ の微分なので, $(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$ となる.

以降, どのような合成関数を取ったかは略す.

(3) $\frac{-\sin x}{\cos x}$

(4) $a^x=e^{x\log a}$ なので $\log a\times e^{x\log a}=(\log a)a^x$ または, 括弧をなくしたければ $a^x\log a$ となる.

括弧をつけないと誤解をうむ場合があるときは, なるべく括弧の少ない表し方・順番に書くのが好ましい.

(5) 関数の積の微分なので $nx^{n-1}\log x+x^{n-1}=x^{n-1}(1+n\log x)$

(6) $x^x=e^{x\log x}$ なので, $(1+\log x)e^{x\log x}=(1+\log x)x^x$ となる.

(7) $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ として, $(g\circ f)'(x)$ を計算すると,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$$

となる. 整理して $\frac{1}{2\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}$ としてもよい.

(8) $\frac{a-x}{a+x}=-1+\frac{2a}{a+x}$ に注意し, 積の微分より $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}+\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}(-\frac{2a}{(a+x)^2})$ と

なる．整理して，$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\{1-\frac{ax}{a^2-x^2}\}$ としてもよい．

(9) $\frac{1}{2\sqrt{1+\log x}}\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{1+\log x}}$ となる．

(10) $\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}}\{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\}$ となる．整理して，$\frac{x\sqrt{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}}{2(x^2-1)}$ となる．

(11) $\frac{1}{\log(x^2+e^x)}\frac{1}{x^2+e^x}(2x+e^x)=\frac{2x+e^x}{(x^2+e^x)\log(x^2+e^x)}$ となる．

演習 4.3 (1) $y=\cos^{-1}x$ とおくと，$x=\cos y$ であり x で両辺を x で微分すると，$y'=-\frac{1}{\sin y}$ となる．$\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}=\pm\sqrt{1-x^2}$ となるが，$-1\le x\le 1$ であり，$0\le y\le\pi$ だから $0\le\sin y\le 1$ なので $\sin y=\sqrt{1-x^2}$ となる．よって，$(\cos^{-1})'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる．

(2) $y=\tan^{-1}x$ とおくと，$x=\tan y$ となる．両辺を x で微分して整理すると $y'=\cos^2 y$ となる．

$x^2+1=\tan^2 y+1=\frac{1}{\cos^2 y}$ なので，$(\tan^{-1})'x=\frac{1}{x^2+1}$ となる．

(3) $y=\sin^{-1}(\cos x)$ とおくと $\sin y=\cos x$ となる．ただし，$|y|\le\pi/2$. 両辺を x で微分すると $(\cos y)y'=-\sin x$ となり，$y'=-\frac{\sin x}{\cos y}$ である．

$|y|\ge\pi/2$ なので，$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ となる．よって，$y'=-\frac{\sin x}{|\sin x|}=-\frac{x}{|x|}$ $(x\ne 0)$.

(4) $y=\cos^{-1}(2\sin x)$ とおくと，$\cos y=2\sin x$ となる． x で微分すると，$-y'\sin y=2\cos x$ となる． $y'=-2\frac{\cos x}{\sin y}$ に $\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}=\pm\sqrt{1-4\sin^2 x}$.

$|x|$ が $1-4\sin^2 x\ge 0$ となるくらい小さい時，$\cos y=2\sin x$ なので，y は $\pi/2$ に充分近い．よって，$s\in y\ge 0$ なので，$\sin y=\sqrt{1-4\sin^s x}$ となり，$y'=-2\cos x/\sqrt{1-4\sin^2 x}$.

(5) $y=\tan^{-1}\frac{a+x}{1-ax}$ とおくと，$\tan y=\frac{a+x}{1-ax}=-\frac{1}{a}+\frac{1+a^2}{a(1-ax)}$ となる．x で微分して，$y'\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{1+a^2}{a}\frac{a}{(1-ax)^2}=\frac{1+a^2}{(1-ax)^2}$ となる．ところで，$\tan y=\frac{a+x}{1-ax}$ より $\sin y=\frac{a+x}{1-ax}\cos y$ である．よって，

$$\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-\frac{(a+x)^2}{(1-ax)^2}\cos^2 y$$

となり, $\cos^2 y = \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2}$ となるので, $y' = \cos^2 y \frac{1+a^2}{(1-ax)^2}$ に代入して, 次のようになる.

$$y' = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

(6) **問題が間違ってました！このままではきれいな答えが出ません。**正しい問題は,「$\sin^{-1}(3x-4x^3)$ の導関数を求めよ」

$y = \sin^{-1}(3x-4x^3)$ とおくと, $\sin y = 3x-4x^3$ となり x で微分して $y'\cos y = 3-12x^2$ を得る.

$$\cos^2 y = 1-(3x-4x^3)^2 = (1-x^2)(4x^2-1)^2$$

よって, $x^2 < 1/4$ の時, $y' = 3/\sqrt{1-x^2}$, $1/4 < x^2 < 1$ の時, $y' = -3/\sqrt{1-x^2}$

演習 4.4 (1) $\sin' x = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ なので, $\sin^{(n)} x = \sin(x+\frac{\pi n}{2})$ が予想できる. 実際に成り立つことは数学的帰納法で示せるので略す.

(2) $(e^{ax})' = ae^{ax}$ なので, $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ が予想でき, 数学的帰納法で示せる (各自やる).

(3) $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ とおく. $f' = e^{\frac{1}{x}}((n-1)x^{n-2} - x^{n-3}) = e^{\frac{1}{x}}x^{n-3}((n-1)x-1)$ となる ⋯

(4) $f(x) = \log(1+x)$ とおくと, $f' = \frac{1}{1+x}$, $f'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3}$ なので, $f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$ が予想される. 数学的帰納法で示せる (各自チェック！).

(5) $f(x) = (ax+b)^k$ とおくと, $n \geq k+1$ のときは $f^{(n)} = 0$ である. $f' = ka(ax+b)^{k-1}$, $f'' = k(k-1)a^2(ax+b)^{k-2}$ なので, $3 \leq n \leq k$ のときは, $f^{(n)} = \frac{k!}{(k-n)!}a^n(ax+b)^{k-n}$ となることが予想でき, 数学的帰納法で示せる (自分で).

(6) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ とおくと, $f' = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f'' = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f^{(3)} = \frac{3!}{(1-x)^4}$ なので $f^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ が予想でき, 数学的帰納法で示せる (自習).

演習 4.5 $f(\alpha) \geq f(a) > f(\beta)$ とする. $a \neq \beta$ かつ $b \neq \beta$ なので, $n \in \mathbb{N}$ が $\frac{1}{n} < \min\{\beta-a, b-\beta\}$ を満たせば, $\beta \pm \frac{1}{n} \in (a,b)$ となるので, $f(\beta) \leq f(\beta \pm \frac{1}{n})$ なので

$$\frac{f(\beta+\frac{1}{n})-f(\beta)}{\frac{1}{n}} \geq 0$$

となる．f は β で微分可能だから命題 4.1 より $f'(\beta) \geq 0$ となる．一方，

$$\frac{f(\beta-\frac{1}{n})-f(\beta)}{-\frac{1}{n}} \leq 0$$

より，同様に $f'(\beta) \leq 0$ となり，結局等号 $f'(\beta) = 0$ が成り立つ．

演習 4.6 定数関数とは $\forall x, y \in [a,b]$ に対し $f(x) = f(y)$ となる．定数関数であることを否定すると，「$f(\alpha) \neq f(\beta)$」を満たす $\alpha, \beta \in [a,b]$ があることである．$\alpha \neq \beta$ は明らかなので，$a \leq \alpha < \beta \leq b$ とする．

$f(\alpha) < f(\beta)$ と仮定して矛盾を導く．($f(\alpha) > f(\beta)$ と仮定しても同様に矛盾が導ける.)

平均値の定理 (定理 4.12) より，「$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(z_0)$」となり $z_0 \in (\alpha, \beta)$ が存在するが，$f'(z_0) = 0$ なので $f(\alpha) = f(\beta)$ となり矛盾する．

演習 4.7 定理 4.15 の定理の証明で，a を α で置き換え，b を x で置き換えればよい．

演習 4.8 系 4.16 で，$\alpha = 0$ とおけばいい。

問題 4.1 $\frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}$ の時，$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x|} = \frac{|a_n|}{|x|} \leq (n+1)|a_n|$ となる．

問題 4.2 $\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}} = 1$ なので $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}} = 1$ となるが，$\frac{f(-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}} = -1$ なので，収束列の取り方によって値が違うから $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ の $x \to 0$ での極限座存在しない．つまり，$x = 0$ で微分可能でない．

問題 4.3 2 次のテイラー展開 (または，マクローリン) を関数 $g(h) = f(\alpha+x) + f(\alpha-x) - 2f(\alpha)$ に適用すると，$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(\theta x)x^2$ となる $\theta \in (0,1)$ がある．計算すると，

$$g(h) = \{f'(\alpha) - f'(\alpha)\}h + \frac{1}{2}\{f''(\alpha+\theta h) + f''(\alpha-\theta h)\}h^2$$

となる．よって，$h^{-2}g(h) - f''(\alpha) = \frac{f''(\alpha+\theta h)+f''(\alpha-\theta h)-2f''(\alpha)}{2}$ f'' は α で連続

だから, $\forall\varepsilon>0$ に対し,「$|x|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f''(\alpha+x)-f''(\alpha)|<\varepsilon$」となる $\delta_\varepsilon>0$ がある. $|h|<\delta_\varepsilon$ とすると $0<\theta<1$ なので, $|f''(\alpha\pm\theta h)-f(\alpha)|<\varepsilon$ となるので, $|g(h)-f''(\alpha)|<\varepsilon$ となる.

問題 4.4 (1) 2 次のマクローリン展開により, $f(x)=(1+x)^\alpha$ とおくと, $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2$ となる $\theta\in(0,1)$ がある. 計算すると,

$$f(x)=1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)(1+\theta x)^{\alpha-2}x^2$$

となる $\theta\in(0,1)$ がある. $\alpha>1$ で $x\neq 0$ なので, 第 3 項を除くと等号の着かない不等式が成り立つ.

(2) 同じく $(1+x)^\beta=1+\beta x+\frac{1}{2}\beta(\beta-1)(1+\theta x)^{\beta-2}x^2$ となる $\theta\in(0,1)$ がある. $0<\beta<1$ なので (かつ $x\neq 0$ の時は), 第 3 項を除くと等式の着かない不等式を得る.

(3) $\sin x=\sin 0+\cos 0x-\frac{1}{2}\sin(\theta x)x^2$ となる $\theta\in(0,1)$ がある. $\sin(\theta x)>0$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ なので, 第 3 項を除くと $\sin x<x$ が成り立つ.

$f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$ とおく. $f''(x)=-\sin x$ なので $-1<f''(x)<0$ となる. 更に, $f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0$, $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{\pi}$, $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$ となる. よって, $f'(t)=0$ となる $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ がただ一つある.

もし, $f(s)=0$ となる $s\in(0,\frac{\pi}{2})$ があるとすると, $s\in(t,\frac{\pi}{2})$ である. なぜなら, $s\in(0,t]$ では $f(s)>f(0)=0$ であるから.

$f(s)=0$ が $s\in(t,\frac{\pi}{2})$ で成り立つと, $(t,\frac{\pi}{2})$ で $f'<0$ なので $f(\frac{\pi}{2})<0$ となり矛盾する. 故に, $x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow f(x)>0$ となる.

(4) (3) より, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ¥$To \sin x<x$ は成り立つ. $x\geq\frac{\pi}{2}>1$ ならば $\sin x\leq 1<x$ となる.

7 次のマクローリン展開で, $\sin x=\sin 0+\cos 0\cdot x-\frac{1}{2}\sin 0\cdot x^2-\frac{1}{3!}\cos 0\cdot x^3+\frac{1}{4!}\sin 0\cdot x^4+\frac{1}{5!}\cos 0\cdot x^5-\frac{1}{6!}\sin(\theta x)x^6$ となる $\theta\in(0,1)$ がある. つまり

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{6!}\sin(\theta x)x^6$$

が成り立つが, 右辺最後の 2 項は $\geq\frac{x^5}{6!}(6-x)$ であり, $0<x<6$ のときに, 成り立つ. 帰納的に次が示せる (各自確かめよ).

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{7!}(\frac{7!}{5!} - x^2) + \cdots + \frac{x^n}{(n+2)!}(\frac{(n+2)!}{n!} - x^2) + \frac{x^{n+3}}{(n+4)!}(n+4-|\sin(\theta x)|\cdot x)$$

$0 < x < n+1$ ならば第 3 項以降は皆, 正なので, $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ が $0 < x < n+1$ で成り立つが, n は任意の自然数を取れるので, $\forall x > 0$ で成立する.

(5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \sin(\theta x)\frac{x^3}{3!}$ となる $\theta \in (0,1)$ がある. $0 < x < \pi/2$ ならば第 3 項をとれば $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ が成り立つ.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\sin(\theta x)$ となる $\theta \in (0,1)$ があるが, 右辺最後の項を除けば $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ が示せる.

(6) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\theta x}$ となる $\theta \in (0,1)$ がある. よって, $e^x > 1 + x$ となる (これは $x \in \mathbb{R}$ でよい).

$e^x < \frac{1}{1-x}$ を示すには, $f(x) = (1-x)e^x$ とおき, $f(x) < 1$ を示せばよい.

$f'(x) = -xe^x$、$f(0) = 1$, $f(1) = 0$ に注意すれば、ほとんど明らか.

問題 4.5 (1) $\sin f = x$ より, $f' \cos f = 1$ となり, $f'' \cos f - (f')^2 \sin f = 0$ となる. よって, $f''(1 - \sin^2 f) = f'' \cos^2 f = \sin f \cos f (f')^2 = \sin f f'$ となる. $\sin f = x$ を思い出せばよい.

(2) $n = 0$ は, 今示したので, $n \geq 0$ で成立するとして, 両辺を微分する.

$$-2xf^{(n+2)} + (1-x-2)f^{(n+3)} - 2nf^{(n+1)} - 2nxf^{(n+2)} - n(n-1)f^{(n+1)} = f^{(n+1)} + xf^{(n+2)}nf^{(n+1)}$$

右辺左辺ともキャンセルさせずに, 素直に整理し直せばよい.

(3) (1) から $f''(0) = 0$, (3) で $n = 2, x = 0$ で, $f^{(4)}(0) = 0$ となる, 後は帰納法で示す.

(4) (3) で $n = 1$ とすると, $f^{(3)}(0) = f'(0)$. $f'(0) = 1$ に注意する. (なぜなら, $f'(x)\cos f(x) = 1$ だが, $f(0) = 0$ なので, $f'(0) = 1$)

あとは (3) を用いて帰納法で示せばよい.

問題 4.6 ライプニッツの公式より、

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(x^{n-1})^{(k)}(\log x)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-1)\cdots(n-k)x^{n-k-1}(-1)^{n-k+1}(n-k-1)!x^{-n+k} + 0 \times \log x$$

$$= \frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!k!}(-1)^{n-k+1} = \frac{(n-1)!}{x}\{1-(1-1)^n\} = \frac{(n-1)!}{x}$$

問題 4.7 f' は, 有界閉区間 $[a,b]$ 上で連続だから. $K = \max_{x\in[a,b]}|f'(x)| < \infty$ とおく. $a \leq x < y \leq b$ に対し, $f(x)-f(y) = f'(z)(x-y)$ となる $z \in [x,y] \subset [a,b]$ がある. 故に, $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ となる.

問題 4.8 (1) $n = 2m+1$ の時, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m\frac{\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$ $(0 < \exists\theta < 1)$

(2) $n = 2m+2$ の時, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+1}$ $(0 < \exists\theta < 1)$

(3) $e^x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$ $(0 < \exists\theta < 1)$

(4) $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n-1} {}_aC_k x^k + {}_a C_n(1+\theta x)^{a-n}x^n$ $(0 < \exists\theta < 1)$ ただし、$a \notin \mathbb{N}$ に対しては, 次で与える.

$$ {}_aC_k = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \quad \text{(一般化された二項係数)}$$

(5) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}x^n$ $(0 < \exists < 1)$

(6) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k + \frac{n+1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^n$ $(0 < \exists\theta < 1)$

(7) (4) で, $a = \frac{1}{2}$ とする. 具体的には, 各自やってください.

(8) $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$ に注意して, $n = 2m+1$ として, $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=1}^{m}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \left(\frac{1}{(1+\theta x)^{2m+1}} + \frac{1}{(1-\theta x)^{2m+1}}\right)x^{2m+1}$ $(0 < \exists\theta < 1)$

第 5 章

1 変数関数の積分の基礎

演習 5.1 仮定から, 次を満たす $M_1, M_2 > 0$ がある.

$$\forall x \in I \Rightarrow |f(x)| \leq M_1 \quad |g(x)| \leq M_2$$

$M = |s|M_1 + |t|M_2$ とおけばよい.

演習 5.2 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対し, $[a_{k-1}, a_k] = [a'_{j(k)}, a'_{j(k)+i(k)}]$ となる $i(k), j(k) \in \mathbb{N}$ となったとする. ($I_k = [a_{k-1}, a_k]$, $I'_k = [a'_{k-1}, a'_k]$ とおく.)

$$\inf_{x \in I_k} f(x)|I_k| = \inf_{x \in I_k} f(x) \sum_{i=1}^{i(k)} |I'_{j(k)+i}| \leq \sum_{i=1}^{i(k)} \inf f(I'_{j(k)+i})|I'_{j(k)+i}|$$

となるので, 両辺を $k = 1$ から m まで和をとればよい.

演習 5.3 Δ_n を例と同様に選ぶ.

(1) $\overline{S}[f, \Delta_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} = b - a$ であり, 同じく $\underline{S}[f, \Delta_n] = b - a$ となる. よって, $\overline{S}[f] \leq \overline{S}[f, \Delta_n] = b - a$ かつ $\underline{S}[f] \geq \underline{S}[f, \Delta_n] = b - a$ なので $\overline{S}[f] \geq \underline{S}[f]$ となる. 故に $\overline{S}[f] = \underline{S}[f] = b - a$ が成り立つ.

(2) $0 \leq a < b$ とする. それ以外の場合も同様に示せる. $r = b - a > 0$ とおき, $\Delta_n = \{[a + \frac{kr}{n}, a + \frac{(k+1)r}{n}]\}_{k=0}^{n-1}$ とすると,

$$\underline{S}[f, \Delta_n] \leq \underline{S}[f], \quad \overline{S}[f] \leq \overline{S}[f, \Delta_n]$$

に注意. $\underline{S}[f, \Delta_n]$, $\overline{S}[f, \Delta_n]$ を計算するとそれぞれ

$$\underline{S}[f, \Delta_n] = \sum_{k=0}^{n-1} (a + \frac{kr}{n})\frac{r}{n} = ar + \frac{r^2}{2}(1 - \frac{1}{n}) \to ar + r^2/2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\overline{S}[f,\Delta_n]=\sum_{k=1}^{n}(a+\frac{kr}{n})\frac{r}{n}=ar+\frac{r^2}{2}(1+\frac{1}{n})\to\frac{b^2-a^2}{2}$$

(3) (2) と同様に, $\underline{S}[f,\Delta_n]$ と $\overline{S}[f,\Delta_n]$ を計算すると

$$\begin{aligned}\underline{S}[f,\Delta_n]= &\ \sum_{k=0}^{n-1}(a+\frac{kr}{n})^3\frac{r}{n}\\ = &\ a^3r+3a^2\frac{r^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}+3a\frac{r^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\\ &+\frac{r^4}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}\quad\to\frac{b^4-a^4}{4}\end{aligned}$$

同様に,

$$\overline{S}[f,\Delta_n]=\sum_{k=1}^{n}(a+\frac{kr}{n})^3\frac{r}{n}\to\frac{b^4-a^4}{4}$$

となるので OK.

演習 5.4 まず, 修正です. p.98 の下から 8 行目の $-s\int_a^b gdx$ は, $-t\int_a^b gdx$ の間違いで〜す.

テキストと同様に,

$$\text{左辺}>-\varepsilon+\overline{S}[h,\Delta_\varepsilon]-s\underline{S}[f,\Delta_\varepsilon]-t\overline{S}[g,\Delta_\varepsilon]$$

となる分割 Δ_ε がある. よって,

$$\begin{aligned}\text{左辺}> &\ -\varepsilon+\overline{S}[sf,\Delta_\varepsilon]+\underline{S}[tg,\Delta_\varepsilon]-s\underline{S}[f,\Delta_\varepsilon]-t\overline{S}[g,\Delta_\varepsilon]\\ \geq &\ -\varepsilon+t\overline{S}[g,\Delta_\varepsilon]-t\overline{S}[g,\Delta_\varepsilon]=-\varepsilon\end{aligned}$$

$s\leq 0\leq t$ の時は, f,g の役割を代えればよい.

$s,t\geq 0$ の時, （省略して書きまーす）

$$\int h-s\int f-t\int g<\varepsilon+\underline{S}[h,\Delta_\varepsilon]-s\overline{S}[f,\Delta_\varepsilon]-t\overline{S}[g,\Delta_\varepsilon]\leq\varepsilon$$

となる Δ_ε がある (右辺には登場しないが). 同様に,

$$\int h-s\int f-t\int g>-\varepsilon+\overline{S}[h,\Delta_\varepsilon]-s\underline{S}[f,\Delta_\varepsilon]-t\underline{S}[g,\Delta_\varepsilon]\geq-\varepsilon$$

$s,t \leq 0$ の時くらい自分でやりましょう.

演習 5.5

$$\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-f(\alpha)\right| = \left|\int_{\alpha}^{\alpha+h}\frac{f(x)-f(\alpha)}{h}dx\right|$$

$$\leq \int_{\alpha+h}^{\alpha}\left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{h}\right|dx \leq \omega(|h|)$$

なので, OK!

演習 5.6 易しいので省略.

演習 5.7 (1) $\frac{1}{5}\sin(5x)$

(2) $\frac{1}{9}e^{3x^3}$

(3) $-\frac{1}{3}\cos(x^3)$

(4) $\cos(\cos x)$

(5) $-\log(\cos x+3)$

(6) $-\log(\cos x)$

(7) $\frac{1}{n+1}\log(x^{n+1}+1)$

(8) $-(\log|x|)^{-1}$

(9) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{1}{\cos\theta}\frac{d\sin\theta}{d\theta}d\theta = \int d\theta = \theta = \sin^{-1}x$

演習 5.8 (1) $\displaystyle\int x\sin x dx = [-x\cos x] + \int\cos x dx = -x\cos x + \sin x$

(2) $\displaystyle\int x^2\cos x dx = [x^2\sin x] - \int 2x\sin x dx$

$\displaystyle = x^2\sin x - 2\{[-x\cos x] + \int\cos x dx\} = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

(3) $\displaystyle\int x^{-2}\log x dx = [-x^{-1}\log x] + \int x^{-1}\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x}\log x - \frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\int x^{-1/2}\log x dx = [2\sqrt{x}\log x] + 2\int\sqrt{x}\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\log x + 4\sqrt{x}$

(5) $\displaystyle\int e^x\sin x dx = [e^x\sin x] - \int e^x\cos x dx = e^x\sin x - \{[e^x\cos x] + \int e^x\sin x dx\} =$

$e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$ より,

$$\int e^x \sin x dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2}$$

(6) $a = 0$ のときは, 易しいので略. $b = 0$ も易しいので略. よって, $a \neq 0$ かつ, $b \neq 0$ とする.

$\int e^{ax} \cos bx dx = [\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx)] + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx$

$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \{[\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx)] - b \int e^{ax} \cos(bx) dx$ より,

$$(1 + \frac{b^2}{a}) \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a} \{\cos(bx) + \frac{b}{a} \sin(bx)\}$$

となる. よって,

$$\frac{e^{ax}}{a + b^2} \{\cos(bx) + \frac{b}{a} \sin(bx)\}$$

問題 5.1 $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ $(\forall x \in (a, b))$ とする. (a, b) の分割 $\Delta = \{I_1 := (a, a_1], I_2 := [a_1, a_2], \cdots, I_m := [a_{m-1}, b)\}$ とする. $\overline{S}[g, \Delta] = \sum_{k=1}^{m} \sup g(I_k)|I_k|$ なので, $\Delta' := \{I_1' := [a, a_1], I_2' := I_2, \cdot, I_{m-1}' := I_{m-1}, I_m' := [a_{m-1}, b]\}$ とおくと,

$$0 \geq \overline{S}[g, \Delta] - \overline{S}[f, \Delta'] = \{\sup g(I_1) - f(I_1')\}|I_1| + \{\sup g(I_m) - \sup f(I_m')\}|I_m|$$

$$\geq -M(|I_1| + |I_m|)$$

問題 5.2 (1) $\Delta := \{I_k := [a_{k-1}, a_k] \mid k = 1, 2, \cdots, m, a = a_0 < \cdots < a_m = b\}$ とする, $c \in [a_{k_0-1}, a_{k_0}]$ とする. $0 \leq \overline{S}[\Delta, f] - \underline{S}[\Delta, f] = (2-1)(a_{k_0} - a_{k_0-1}) = a_{k_0} - a_{k_0-1} \leq |\Delta|$ である. 故に, $\lim_{|\Delta| \to 0} \{\overline{S}[\Delta, f] - \underline{S}[\Delta, f]\} = 0$.

$\underline{S}[\Delta, f]$

$$\leq (a_{k_0-1} - a) + 2(b - a_{k_0-1}) = (c - a) + 2(b - c) + (a_{k_0-1} - c) + 2(c - a_{k_0-1})$$

$$\leq (c - a) + 2(b - c) + (c - a_{k_0-1})$$

また, $\overline{S}[\Delta, f]$

$$\geq (a_{k_0} - a) + 2(b - a_{k_0}) = (c - a) + 2(b - c) + (a_{k_0} - c) + 2(c - a_{k_0})$$

$$= (c - a) + 2(b - c) - (a_{k_0} - c)$$

なので,

$$\underline{S}[\Delta, f] - |\Delta| \leq (c - a) + 2(b - c) \leq \overline{S}[\Delta, f] + |\Delta|$$

より, 両辺を $\lim_{|\Delta| \to 0}$ とすればいい.

(2)

問題 5.3

問題 5.4 (1) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}dx = \int_0^a -\frac{1}{3}(\sqrt{ax - x^2}^3)' + \frac{a}{3}\sqrt{ax - x^2}dx$ となり, 右辺第 1 項は, $-\frac{1}{3}[\sqrt{ax - x^2}^3]_0^a = 0$ となる. 一方, 第 2 項を変形すると,

$$= \frac{a^2}{6}\int_0^a \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}(x - \frac{a}{2})^2}dx$$

となる. $y = \frac{2}{a}x - 1$ と変数変換すると, 次のようになる.

$$= \frac{a^3}{12}\int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2}dy = \frac{a^3}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta)d\theta = \frac{a^3\pi}{24}$$

(2) $\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1 + \cos x}dx + \int_{\pi?2}^{\pi} \frac{x\sin x}{1 - \cos x}dx$ の第 2 項を $x = \pi - t$ と変数変換すると

$$\int_{\pi?2}^{\pi} \frac{x\sin x}{1 - \cos x}dx = \int_{\pi/2}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1 - \cos(\pi - t)}(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos t}dt$$

となるので, 第 1 項との和は次のようになる.

$$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1 + \cos t}dt = -\pi\Big[\log(1 + \cos t)\Big]_0^{\pi/2} = \pi\log 2$$

(3) $= \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}dy$ となるので，変数変換 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ をすれば，次のようになる．

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\theta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(4) $= \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx = \int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx$ となるので，変数変換 $y = 2x-1$ を用いれば次のようになる．

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(5) $(\log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta})' = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$ に注意すると次のようになる．

$$= 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos\theta}d\theta = 2\left[\log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right]_0^{\pi/4} = 2\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\log(\sqrt{2}+1)$$

(6) $= \displaystyle\left[\frac{x^2}{2}\log(1+x^2)\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{9}{2}\log 10 - \int_0^3\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$ となる．第 2 項は

$$= \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^3 = -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\log 10$$

なので，$5\log 10 - \frac{9}{2}$ となる．

(7) 変数変換 $t = \sqrt{e^x-1}$ とすると，$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2t}$ に注意すると，次のようになる．

$$= \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2 - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = 2 - 2\int_0^{\pi/4} d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}$$

(8) $I_{m,n} := \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とおくと，

$$I_{m,n} = \left[-\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$$

なので, $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1} = \cdots = \frac{m!}{(n+1)\cdots(n+m)} I_{0,n+m}$ となる. ところで, $I_{0,n+m} = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+m} dx = \frac{1}{n+m+1}$ なので, 次のようになる.

$$= \frac{m!n!}{(n+m+1)!}$$

問題 5.5

問題 5.6

問題 5.7

問題 5.8

問題 5.9

問題 5.10

問題 5.11

問題 5.12

問題 5.13

問題 5.14

第 6 章

1 変数関数の微分の応用

演習 6.1 (i) $x < \alpha$ の時, 同じく, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(x_\alpha)}$ となる $\alpha_x \in (x, \alpha)$ がある. $0 < \alpha - x < \delta_\varepsilon$ ならば, $0 < \alpha - \alpha_x < \delta_\varepsilon$ だから, テキストの次の不等式が成立する.

(ii) $x < \alpha$ の時, (6.2) 式を満たす $\alpha_x \in (x, \alpha)$ があるので, $\frac{f(x)}{g(x)} > L$ なので OK.

演習 6.2 (6.1) の仮定は分かりづらいですね. $\alpha = a$ **(resp.,** $\alpha = b$**) の時は,**

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0 \quad (resp., \lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0)$$

$\alpha = a$ で, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$ の時は, テキスト通りでよい. $\alpha = b$ の場合は, 演習 6.1 を参照.

演習 6.3 $\alpha = a$ (resp., $\alpha = b$) の時は, $\lim_{x \to a+} g(x) = \pm\infty$ (resp., $\lim_{x \to b-} \pm\infty$) を仮定するに代える.

演習 6.4 系 6.4 について: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ の場合を考える. $F(x) = f(1/x)$, $G(x) = g(1/x)$ とおくと, $\lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{x \to 0+} G(x) = 0$ となる. 定理 6.2 の仮定は満たされる.

さらに, $\lim_{x \to 0+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{-f'(1/x)x^{-2}}{-g'(1/x)x^{-2}} = \lim_{x \to 0+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \ell$ なので, 結論を得る.

系 6.5 に関しては, 上で定理 6.2 を使ったところを定理 6.3 を使えばよい.

演習 6.5 極大について考える. (極小も同様) $\forall t > 0$ に対し, $f(\alpha \pm t) \le f(\alpha)$ より, $\frac{f(\alpha \pm t) - f(\alpha)}{t} \le 0$ なので, $t \to 0+$ とすると, $\pm f'(\alpha) \le 0$ より OK.

演習 6.6 $f''(\alpha) = -2\rho < 0$ とおくと, $\exists \delta > 0$ s.t. $|x - \alpha| \le \delta \to f''(x) \le -\rho$.

$|x-\alpha|<\delta$ ならば, $\exists\theta\in(0,1)$ s.t.

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{1}{2}f''(\theta x+(1-\theta)\alpha)(x-\alpha)^2\le f(\alpha)-\frac{\rho}{2}(x-\alpha)^2$$

故に,「題意は示せた」と結ぶと, 大学の数学では顰蹙をかいます.「題意」ってなんですか?

演習 6.7 $f(x)=x^3$

演習 6.8 (1) $x=0$ で極小

(2) (微分はできないけど)$x=0$ で極小

(3) $x=e^{-1}$ で極小

各自, 増減表を書いてみましょう.

問題 6.1 $lim_{x\to 0+}f(x)=0$ は簡単に分かる. 一方, $\lim_{x\to 0-}f(x)=0$ は自明だから, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ となり, 連続性が示せた.

よって, $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\lim_{x\to 0+}f^{(n)}(x)=0$ を示せばよい. 帰納法で示す. $n-1$ で成立するとする.

補題 $k\in\mathbb{N}$ に対し, $\lim_{x\to 0+}x^k e^{-\frac{1}{x^2}}=0$

補題の証明: $y=x^{-2}$ とすると, $x^k e^{-\frac{1}{x^2}}=(y^{k/2}e^y)^{-1}\to 0$ $(y\to\infty)$ なので明らか.

さて, $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ なので, 帰納法で

$$f^{(n)}(x)=p_n(\frac{i}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$$

となる. 但し, $p_n(r)$ は, 高々$3n$ 次の多項式になる. よって $f^{(n)}(x)\to 0$ $(x\to 0+)$ となる.

問題 6.2 準備中

問題 6.3 準備中

第 7 章

1 変数関数の積分の応用

演習 7.1 $(A,B,C)=\frac{1}{3}(1,-1,-2)$

演習 7.2 計算すると, $(A,B,C,D)=\frac{1}{2}(-1,1,1,0)$ となるので, 後は, 計算できますよね??

演習 7.3 準備中

演習 7.4 準備中

演習 7.5 準備中

演習 7.6 準備中

命題 7.1 の証明

任意の $\varepsilon>0$ に対し、f,g は $(a+\varepsilon,b)$ で有界で積分可能とする。$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=\pm\infty$ の場合に証明する。他の場合も同様なので略す。

$\forall\varepsilon>0$ に対し、

$$\sup_{x\in(a,a+\varepsilon)}|f(x)|=M_\varepsilon<\infty,\qquad \sup_{x\in(a,a+\varepsilon)}|g(x)|=M'_\varepsilon<\infty$$

となる $M_\varepsilon,M'_\varepsilon>0$ があるから、$\forall x\in(a,a+\varepsilon)$ に対し、

$$|sf(x)+tg(x)|\leq|s|M_\varepsilon+|t|M'_\varepsilon$$

となるので、$sf+tg$ は $(a,a+\varepsilon)$ で有界。

更に、$sf+tg$ は $(a,a+\varepsilon)$ で積分可能になる (定理 5.5)。

また、$F(\varepsilon)=\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b}fdx$ と $G(\varepsilon)=\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b}gdx$ とおくと、$\lim_{\varepsilon\to0}F(\varepsilon)$ と $\lim_{\varepsilon\to0}G(\varepsilon)$

は存在するので、それぞれ α, β とおくと、定理 3.3 の証明と “同様に” $\lim_{\varepsilon \to 0}\{sF(\varepsilon)+tG(\varepsilon)\} = s\alpha + t\beta$ となる。

演習 7.7 準備中

命題 7.2 の証明

まず、命題 7.2 は少々不正確なので正確に述べておく。

命題 7.2 修正版

(1) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ で、$\forall \varepsilon \in (0, b-a)$ に対し、$(a+\varepsilon, b)$ 上で f は有界かつ積分可能とする。f が (a, b) で広義積分可能であることと次が必要十分条件である。

「$\forall \varepsilon > 0$ に対し、次を満たす $\delta_\varepsilon \in (0, b-a)$ が存在する。
『$\forall c, c' \in (a, a+\delta_\varepsilon) \Rightarrow |\int_c^{c'} f(x)dx| < \varepsilon$』」

(2) $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ が有界関数で、$\forall b > a$ に対し、$[a, b]$ で f が積分可能とする。f が広義積分可能 $\Longleftrightarrow$

(∗) 「$\forall \varepsilon > 0$ に対し、次を満たす $K_\varepsilon > a$ が存在する。
『$\forall b, b' > K_\varepsilon \Rightarrow |\int_b^{b'} f(x)dx| < \varepsilon$』」

(1) の片側は、講義で示したので (2) を示す。(1) の逆の片側は略す。

以降、$x > a$ に対し、$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおく。

$\Longleftarrow$ の証明 (∗) を仮定する。

Step 1: $x_n > a$ が $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ をとる。数列 $\{F(x_n)\}$ が極限を持つことを示す。

$\{F(x_n)\}$ がコーシー列であることを示せばよい。

まず、(*) より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、「$b, b' > K_\varepsilon \Rightarrow |\displaystyle\int_b^{b'} f(x)dx| < \varepsilon$」となる $K_\varepsilon > a$ がある。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ だから、この K_ε に対し、「$n \geq N_\varepsilon \to x_n \geq K_\varepsilon$」となる $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある。よって、$m, n \geq N_\varepsilon$ ならば、$x_n, x_m > K_\varepsilon$ なので、

$$|F(x_n) - F(x_m)| = |\int_{x_n}^{x_m} f(t)dt| << \varepsilon$$

となる。故に $\{F(x_n)\}$ はコーシー列であり、実数では収束列と同じだから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) \in \mathbb{R}$ が存在する。

Step 2: $x_n, y_n > a$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(y_n)$ となる。【注意】両辺の極限が存在することは Step 1 で示した。ここでは、∞ に発散する、どんな数列を持ってきても同じ極限になることを示している。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \alpha$、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \beta$ とおく。$\alpha = \beta$ を示せばよい。

Step 1 の記号を使う。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$b, b' > K_\varepsilon \Rightarrow |\displaystyle\int_b^{b'} f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$ となる $K_\varepsilon > a$ が存在する。この K_ε に対し、次を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow x_n > K_e,\ y_n > K_\varepsilon$$

また、次を満たす $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ がある。

$$n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow |F(x_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |F(y_n) - \beta| < \frac{\varepsilon}{3}$$

よって、

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - F(x_n)| + |F(x_n) - F(y_n)| + |F(y_n) - \beta|$$

なので、$n \geq \max\{N_\varepsilon . N'_\varepsilon\}$ ならば、$|\alpha - F(x_n)| + |F(y_n) - \beta| < \frac{2\varepsilon}{3}$ であり、

$$|F(x_n) - F(y_n)| = |\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となり、$|\alpha - \beta| < \varepsilon$ を得る。$\varepsilon > 0$ は任意だから、$\alpha = \beta$ が示せた。

Step 3: 今、$z_n = a + \frac{1}{n}$ とおき、Step 1 より、その極限を α とする。つまり、

$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \alpha$ とする。$\lim_{x\to a+} F(x) = \alpha$ が成り立たないとすると、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、「$x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ で $|F(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$」となる $\varepsilon_0 > 0$ と $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ がある。しかし、Step 1 から $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \alpha$ なので矛盾する。

演習 7.8 準備中

演習 7.9 準備中

問題 7.1 準備中

問題 7.2 準備中

問題 7.3 準備中

問題 7.4 準備中

第 8 章

関数列

問題 8.1 準備中

問題 8.2 準備中

第 9 章
$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^N$ へ

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ というように転置の記号 ^{t} を省略しよう。(書くのが面倒だから)

演習 9.1 準備中

$\boldsymbol{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{N,n})$ がコーシー列とする。$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$m, n \geq M_\varepsilon$ ならば $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| < \varepsilon$ となる $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する。$\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_N)$ に対し、$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ に対し、$\|\boldsymbol{z}\| \geq |z_k|$ が成り立つことに注意すれば、

$$n, m \geq M_\varepsilon \to |x_{k,n} - x_{k,m}| \leq \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| < \varepsilon$$

となるので、実数列 $\{x_{k,n}\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列である。故に、実数において収束列とコーシー列は同じなので、$\{x_{k,n}\}_{n=1}^\infty$ は収束列になる。つまり、$\lim_{n\to\infty} x_{k,n} = z_k$ となる $z_k \in \mathbb{R}$ が存在する。$\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_N)$ とおく。

$\forall \varepsilon > 0$ を固定する。各 $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ に対し、

$$n \geq M_{k,\varepsilon} \to |x_{k,n} - z_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}$$

となる $M_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在する。$M_\varepsilon := \max\{M_{1,\varepsilon}, M_{2,\varepsilon}, \cdots, M_{N.\varepsilon}\} \in \mathbb{N}$ とおくと、$n \geq M_\varepsilon$ とする。

$$\max\{|x_{1,n} - z_1|, \cdots, |x_{N,n} - z_N|\} = |x_{k(n),n} - z_{k(n)}|$$

となる $k(n) \in \{1, 2, \cdots, N\}$ がある。

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{z}\| \leq \sqrt{N}|x_{k(n),n} - z_{k(n)}| < \varepsilon$$

となる。つまり、

$$n \geq M_\varepsilon \to \|bx_n - \boldsymbol{z}\| < \varepsilon$$

が成り立つので、$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{z}$ が示せた。

逆に、$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{z}$ とする。$\forall\varepsilon > 0$ に対し、

$$n \geq M_\varepsilon \to \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{z}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する。故に、$\forall n, m \geq M_\varepsilon$ ならば

$$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| \leq \|bx_m - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}_n\| < \varepsilon$$

が成り立つので、コーシー列である。

演習 9.2 準備中

$\varepsilon = 1$、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とする。

$B_1(\boldsymbol{0})$ が開集合であること。$\forall \boldsymbol{z} \in B_1(\boldsymbol{0})$ とする。$\|\boldsymbol{z}\| < 1$ なので、$\varepsilon = 1 - \|\boldsymbol{z}\| > 0$ とおくと、$B_\varepsilon(\boldsymbol{z}) \subset B_1(\boldsymbol{0})$ となる。実際、$\forall \boldsymbol{y} \in B_\varepsilon(\boldsymbol{z})$ をとる。

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{0}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}\| < \varepsilon + (1 - \varepsilon) = 1$$

が成り立つので、$\boldsymbol{y} \in B_1(\boldsymbol{0})$ となる。

$B_1(\boldsymbol{0})$ が閉集合でないこと。閉集合と仮定して矛盾を導く。閉集合ならば、$\boldsymbol{x}_n \in B_1(\boldsymbol{0})$ が $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{z}$ ならば $\boldsymbol{z} \in B_1(\boldsymbol{0})$ となるはずである。しかし、$\boldsymbol{x}_n = (1 - \frac{1}{n}, 0, \cdots, 0) \in B_1(\boldsymbol{0})$ とする。$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = (1, 0, \cdots, 0)$ となるが、$\|(1, 0, \cdots, 0)\| = 1$ なので、$B_1(\boldsymbol{0})$ には属さない。

$\overline{B}_1(\boldsymbol{0})$ が閉集合であること。$\boldsymbol{x}_n \in \overline{B}_1(\boldsymbol{0})$ が $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{z}$ とする。つまり、$\forall\varepsilon > 0$ に対し、

$$n \geq M_\varepsilon \to \|bx_n - \boldsymbol{z}\| < \varepsilon$$

となる $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する。よって、

$$\|\boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_n\| + \|\boldsymbol{x}_n\| < \varepsilon + 1$$

が成り立つ。$\varepsilon > 0$ は任意なので、$\|\boldsymbol{z}\| \leq 1$ となり、$\boldsymbol{z} \in \overline{B}_1(\mathbf{0})$ となることがわかる。

$\overline{B}_1(\mathbf{0})$ が開集合でないことを示す。$\boldsymbol{z} := (1, 0, \cdots, 0)\overline{B}_1(\mathbf{0})$ に対し、$B_\varepsilon(\boldsymbol{z}) \subset \overline{B}_1(\mathbf{0})$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。$\boldsymbol{y} := (1 + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \cdots, 0)$ とおく。$\boldsymbol{y} \in B_\varepsilon(\boldsymbol{z})$ であるが、$\boldsymbol{y} \notin \overline{B}_1(\mathbf{0})$ であるので $B_\varepsilon(\boldsymbol{z}) \subset \overline{B}_1(\mathbf{0})$ が成り立たない。故に開集合でない。

演習 9.3 準備中

演習 9.4 準備中

演習 9.5 準備中

定理 9.7 の証明

(i)（線形性）$|s| + |t| = 0$ の場合は、$(sf + tg)(x) = 0$ となり、連続になるのは明らか。

$|s| + |t| > 0$ と仮定して示す。$\forall \varepsilon > 0$ に対し次を満たす $\delta_{\varepsilon,1}, \delta_{\varepsilon,2} > 0$ がある。

$$\boldsymbol{x} \in D \text{ が } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_{1,\varepsilon} \to |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \tfrac{\varepsilon}{|s|+|t|}$$
$$\boldsymbol{x} \in D \text{ が } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_{2,\varepsilon} \to |g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a})| < \tfrac{\varepsilon}{|s|+|t|}$$

$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1,\varepsilon}, \delta_{2,\varepsilon}\} > 0$ とおくと、$\boldsymbol{x} \in D$ が $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_\varepsilon$ を満たすならば、

$$|(sf+tg)(\boldsymbol{x}) - (sf+tg)(\boldsymbol{a})| \leq |s||f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| + |t||g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a})| < \varepsilon$$

となるので、$sf + tg$ は $\boldsymbol{a}$ で連続になる。

(ii)（積の連続性）次を満たす $\delta_1 > 0$ がある。

「$\boldsymbol{x} \in D$ が $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_1 \to |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < 1$」

よって、$\boldsymbol{x} \in D \cap B_1(\boldsymbol{a}) \to |f(\boldsymbol{x})| \leq |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| + |f(\boldsymbol{a})| < 1 + |f(\boldsymbol{a})|$ となる。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、次を満たす $\delta_{1,\varepsilon}, \delta_{2,\varepsilon} > 0$ がある。

$$\boldsymbol{x} \in D \cap B_{\delta_{1,\varepsilon}}(\boldsymbol{a}) \to |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \tfrac{\varepsilon}{2(1+|g(\boldsymbol{a})|)}$$
$$\boldsymbol{x} \in D \cap B_{\delta_{2,\varepsilon}}(\boldsymbol{a}) \to |g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a})| < \tfrac{\varepsilon}{2(1+|f(\boldsymbol{a})|)}$$

$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1,\varepsilon}, \delta_{2,\varepsilon}\}$ とおくと、$\boldsymbol{x} \in D \cap B_{\delta_\varepsilon}(\boldsymbol{a})$ ならば、

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})| &\leq |f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})| \\ &\leq |f(\boldsymbol{x})||g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{a})| + |g(\boldsymbol{a})||f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| \\ &\leq (1 + |f(\boldsymbol{a})|)\tfrac{\varepsilon}{2(1+|f(\boldsymbol{a})|)} + |g(\boldsymbol{a})|\tfrac{\varepsilon}{2(1+|g(\boldsymbol{a})|)} \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{|g(\boldsymbol{a})|}{1+|g(\boldsymbol{a})|} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

より、fg は $\boldsymbol{a}$ で連続。

(iii)（商の連続性）$\frac{1}{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で連続であることを示せば、(ii) を用いて、$\frac{g}{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で連続になる。

$|f(\boldsymbol{a})| > 0$ に注意する。次を満たす $\delta_0 > 0$ がある。

$$\boldsymbol{x} \in D \cap B_{\delta_0}(\boldsymbol{a}) \to |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \frac{|f(\boldsymbol{a})|}{2}$$

よって、$\boldsymbol{x} \in D \cap B_{\delta_0}(\boldsymbol{a})$ ならば、

$$|f(\boldsymbol{x})| \geq |f(\boldsymbol{a})| - |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| > \frac{|f(\boldsymbol{a})|}{2} > 0$$

となる。$\forall \varepsilon > 0$ に対し、次を満たす $\delta_\varepsilon \in (0, 1\delta_0]$ がある。

$$\boldsymbol{x} \in D \cap B_{\delta_\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \to |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \frac{\varepsilon|f(\boldsymbol{a})|^2}{2}$$

よって、$\boldsymbol{a} \in D \cap B_{\delta_\varepsilon}(\boldsymbol{a})$ ならば

$$|\tfrac{1}{f(\boldsymbol{x})} - \tfrac{1}{f(\boldsymbol{a})}| = \tfrac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})|}{|f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{a})|} \leq \tfrac{2|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})|}{|f(\boldsymbol{a})|^2} < \varepsilon$$

となり、$\frac{1}{f}$ は $\boldsymbol{a}$ で連続になった。

演習 9.6 準備中

演習 9.7 準備中

演習 9.8 準備中

演習 9.9 準備中

演習 9.10 準備中

演習 9.11 準備中

問題 9.1 準備中

問題 9.2 準備中

問題 9.3 準備中

問題 9.4 準備中

問題 9.5 準備中

問題 9.6 準備中

問題 9.7 準備中

第 10 章

多変数関数の微分の基礎

演習 10.1 (1) $x_1 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_N e^{x_1 \cdots x_N}$
(2) $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \frac{x_j}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{x_j}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$

演習 10.2 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ とする。$\boldsymbol{0}$ で全微分可能とする。$\omega(\boldsymbol{x}) := \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\|}$ とおくと、$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0$ となる。つまり、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\boldsymbol{x} \in D$ が $\|\boldsymbol{x}\| < \delta_\varepsilon$ をみたすならば、$|\omega(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$ となる $\delta_\varepsilon > 0$ が存在する。

さて、$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ ならば、

$$n \geq M_\varepsilon \to \|\boldsymbol{x}_n\| < \delta_\varepsilon$$

となる $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する。よって、$|\omega(\boldsymbol{x}_n)| < \varepsilon$ が成り立つので、

$$\lim_{n \to \infty} \omega(\boldsymbol{x}_n) = 0$$

となる。

逆を考える。もし、$\underline{\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0}$ が成り立たないとする。下線部を否定すると、次を満たす $\varepsilon_0 > 0$ が存在する。

$$\|\boldsymbol{x}_n\| < \frac{1}{n} \quad かつ \quad |\omega(\boldsymbol{x}_n)| \geq \varepsilon_0$$

つまり、$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ なので、$\lim_{n \to \infty} \omega(\boldsymbol{x}_n) = 0$ となるので、矛盾する。

演習 10.3 $\omega(\boldsymbol{x}) := \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|}$ が $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つ。$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_\varepsilon$ ならば $|\omega(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$ となる $\delta_\varepsilon > 0$ が存在する。$\delta_\varepsilon \leq 1$ と仮定してよいので、

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| \leq \omega(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq \omega(\boldsymbol{x}) < \varepsilon$$

が成り立つ。

演習 10.4 $g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$、$g_\theta = -f_x r \sin\theta + f_y r \cos\theta$ なので、

$$f_x = g_r \cos\theta - g_\theta \frac{\sin\theta}{r}$$

$$f_y = g_r \sin\theta + g_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

となる。

$$f_x^2 = g_r^2 \cos^2\theta - 2g_r g_\theta \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + g_\theta^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$f_y^2 = g_r^2 \sin^2\theta + 2g_r g_\theta \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + g_\theta^2 \frac{\cos^2\theta}{r^2}$$

より

$$gf_x^2 + f_y^2 = g_r^2 + \frac{1}{r^2} g_\theta^2$$

となる。

(2)

演習 10.5 準備中

問題 10.1 (1) $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{-x^2-y^2}$

(2) $f_x = 2y\cos(2x+3y)$, $f_y = \sin(2x+3y) + 3y\cos(2x+3y)$

(3) $f_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

(4) $f_x = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$, $f_y = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$

(5) ***********

(6) $f_x = 2xy\sin\frac{y}{x} - (x^2y + y^3)\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}$, $f_y = (x^2 + 3y^2)\sin\frac{y}{x} + (x^2y + y^3)\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$

(7) $f_x = \frac{1}{(y+x)^2}(y + x - x + y) = \frac{2y}{(y+x)^2}$, $f_y = \frac{1}{(y+x)^2}(-y - x - x + y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$

(8) ************

問題 10.2 問題　$\forall\varepsilon > 0$ に対し、$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta_\varepsilon$ に対し、

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\rangle| \leq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$$

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\rangle| \leq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$$

が成り立つ。$\boldsymbol{e} := \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|} > 0$ とおく。上の 2 式を使って

$$|\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\rangle - \langle\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\rangle| \leq 2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$$

をえる。$|t| < \delta_\varepsilon$ とすると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}$ として代入すれば、

$$|t\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{e}\rangle| \leq 2\varepsilon|t|$$

より、

$$\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\| \leq 2\varepsilon$$

となる。$\varepsilon > 0$ は任意なので、$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ となる。

補足

2 次元極座標変換

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく。$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ としたとき、f_x や f_y の**直接**の求め方。

$$f_x = g_r\frac{\partial r}{\partial x} + g_\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$f_y = g_r\frac{\partial r}{\partial y} + g_\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

となり、$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta$ と $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$ は易しい。

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ なので、$\frac{\partial\tan\theta}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{\sin\theta}{r\cos^2\theta}$ となる。よって、

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

を得る。故に、次が示せた。

$$f_x = \cos\theta g_r - \frac{\sin\theta}{r} g_\theta$$

次に、y 偏微分を求める。$\frac{\partial\tan\theta}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$ であり、一方、$\frac{\partial\tan\theta}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{r\cos\theta}$ となる。よって、

$$\frac{\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

を得る。故に次が成り立つ。

$$f_y = \sin\theta g_r + \frac{\cos\theta}{r} g_\theta$$

3 次元極座標変換

$x = r\cos\theta\sin\phi$、$y = r\sin\theta\sin\phi$、$z = r\cos\phi$ とし、$g(r,\theta,\phi) = f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$ とおく。

$$f_x = g_r\frac{\partial r}{\partial x} + g_\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + g_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

となり、$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta\sin\phi$ はすぐわかる。

$\frac{y}{x} = \tan\theta$ なので、$\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = \frac{\sin\theta\sin\phi}{r\cos^2\theta\sin^2\phi} = \frac{\sin\theta}{r\cos^2\theta\sin\phi}$ である一方、$\frac{\partial\tan\theta}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$ となるので、

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\cos^2\theta\frac{\sin\theta}{r\cos^2\theta\sin\phi} = \frac{\sin\theta}{r\sin\phi}$$

となる。一方、$z = r\cos\phi$ なので、$\frac{\partial r\cos\phi}{\partial x} = \frac{x}{r}\cos\phi - r\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} = \cos\theta\sin\phi\cos\phi - r\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}$ であり、$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ なので、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}$$

を得る。故に、次が成り立つ。

$$f_x = \cos\theta\sin\phi g_r - \frac{\sin\theta}{r\sin\phi}g_\theta + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}g_\phi$$

$$f_y = g_r\frac{\partial r}{\partial y} + g_\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + g_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

であり、$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi$ はやさしい。

$\frac{y}{x} = \tan\theta$ なので、$\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{r\cos\theta\sin\phi}$ である。一方、$\frac{\partial\tan\theta}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$ なので、

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \cos^2\theta\frac{1}{r\cos\theta\sin\phi} = \frac{\cos\theta}{r\sin\phi}$$

となる。$z = r\cos\phi$ なので、$\frac{\partial r\cos\phi}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\phi - r\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\cos\phi - r\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}$ であり、$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ なので、

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\sin\theta\cos\phi}{r}$$

となる。よって次を得る。

$$f_y = \sin\theta\sin\phi g_r + \frac{\cos\theta}{r\sin\phi}g_\theta + \frac{\sin\theta\cos\phi}{r}g_\phi$$

$$g_z = g_r\frac{\partial r}{\partial z} + g_\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + g_\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

であり、$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\phi$ となる。

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ なので、$\frac{\partial\tan\theta}{\partial z} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$ であり、$\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial z} = 0$ なので、次を得る。

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

$\frac{\partial r\cos\phi}{\partial z} = \frac{z}{r}\cos\phi - r\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial z} = \cos^2\phi - r\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}$ であり、$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ よって次を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\cos^2 \phi - 1}{r \sin \phi} = -f r \sin \phi r$$

故に次が成り立つ。

$$g_z = \cos \phi g_r - \frac{\sin \phi}{r} g_\phi$$

問題 10.3 準備中

問題 10.4 準備中

問題 10.5 準備中

第 11 章

陰関数定理とその応用

演習 11.1 準備中

演習 11.2 準備中

演習 11.3 準備中

演習 11.4 準備中

演習 11.5 準備中

演習 11.6 準備中

演習 11.7 準備中

演習 11.8 準備中

演習 11.9 準備中

演習 11.10 準備中

問題 11.1 準備中

問題 11.2 準備中

問題 11.3 準備中

問題 11.4 準備中

問題 11.5 準備中

問題 11.6 準備中

問題 11.7 準備中

問題 11.8 準備中

第 12 章

多変数関数の積分の基礎

演習 12.1 準備中

演習 12.2 準備中

演習 12.3 準備中

演習 12.4 準備中

演習 12.5 準備中

演習 12.6 準備中

演習 12.7 準備中

演習 12.8 準備中

演習 12.9 準備中

演習 12.10 準備中

演習 12.11 準備中

演習 12.12 準備中

問題 12.1 準備中

問題 12.2 準備中

問題 12.3 準備中

問題 12.4 準備中

問題 12.5 準備中

問題 12.6 準備中

問題 12.7 準備中

問題 12.8 準備中

第 13 章

多変数関数の積分の変数変換

演習 13.1 準備中

演習 13.2 準備中

演習 13.3 準備中

演習 13.4 準備中

演習 13.5 準備中

問題 13.1 準備中

問題 13.2 準備中

問題 13.3 準備中

問題 13.4 準備中

問題 13.5 準備中

第 14 章

追加事項

演習 14.1 (1) $0, 0'$ が二つの零元とする。$a + 0 = a$ と $a + 0' = a$ が任意の a に対し成り立つので、$0' = 0' + 0$ と $0 = 0 + 0'$ がなりたつ。交換法則より、$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$ となり、$0 = 0'$ が成り立つ。

(2) $1, 1'$ を単位元とする。$1' = 11'$ と $1 = 1'1$ が成り立つ。交換法則より、$1' = 11' = 1'1 = 1$ となり $1 = 1'$ が成り立つ。

(3) $(-a) + b = 0$ とすると、$b = -(-a)$ となる。一方、交換法則より、$b = b + 0 = b + \{a + (-a)\} = b + \{(-a) + a\} = \{b + (-a)\} + a = \{(-a) + b\} + a = 0 + a = a + 0 = a$ となるので、$b = a$ となる。

(4) $a \leq b$ かつ $a \geq b$ とする。$a < b$ とすると、$a \geq b$ に矛盾する。また、$a > b$ とすると $a \leq b$ に矛盾するので、$a = b$ となる。

別方法　($a < b$ または $a = b$) かつ、($a > b$ または $a = b$) が成り立つ。故に、($a < b$ かつ $a > b$) または、$a = b$ が成り立つが、前者は成り立たないので、$a = b$ となる。

(5) -0 は 0 の逆元のことなので、$0 = 0 + (-0)$ となる。一方、0 は零元なので、$(-0) + 0 = -0$ が成り立つので、よって、$-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$ なので、-0 も零元であることに注意する。

$a > 0$ のとき、$-a = 0$ だと仮定する。$a = -(-a) = -0 = 0$ となるので矛盾する。次に、$-a > 0$ を仮定すると、$a + (-a) > 0$ となるが左辺は 0 なので $0 > 0$ となり矛盾する。故に、$-a < 0$ となる。

(6) $a - b = 0$ とすると、$-a = (-a) + (a - b) = \{(-a) + a\} - b = -b$ となる。故に、$a = -(-a) = -(-b) = b$ となり、矛盾する。

$a - b = a + (-b) < 0$ を仮定する。$b > b + \{a + (-b)\} = b + \{(-b) + a\} = \{b + (-b)\} + a = 0 + a = a + 0 = a$ となる。

演習 14.2 準備中

演習 14.3 準備中

演習 14.4 準備中

演習 14.5 準備中

演習 14.6 準備中

演習 14.7 準備中

演習 14.8 準備中

演習 14.9 準備中

演習 14.10 準備中

演習 14.11 準備中

演習 14.12 準備中

演習 14.13 準備中

演習 14.14 準備中

演習 14.15 準備中

演習 14.16 準備中

演習 14.17 準備中

演習 14.18 準備中

演習 14.19 準備中

演習 14.20 準備中

演習 14.21 準備中

演習 14.22 準備中

演習 14.23 準備中

演習 14.24 準備中

演習 14.25 準備中

演習 14.26 準備中

演習 14.27 準備中

演習 14.28 準備中

演習 14.29 準備中

演習 14.30 準備中

演習 14.31 準備中

演習 14.32 準備中

演習 14.33 準備中

演習 14.34 準備中

演習 14.35 準備中

演習 14.36 準備中

演習 14.37 準備中

演習 14.38 準備中

演習 14.39 準備中

演習 14.40 準備中

演習 14.41 準備中

演習 14.42 準備中

演習 14.43 準備中

演習 14.44 準備中

演習 14.45 準備中

演習 14.46 準備中

演習 14.47 準備中

演習 14.48 準備中

演習 14.49 準備中

演習 14.50 準備中

演習 14.51 準備中

問題 14.1 準備中

問題 14.2 準備中

問題 14.3 準備中

問題 14.4 準備中

問題 14.5 準備中

問題 14.6 準備中

問題 14.7 準備中

問題 14.8 準備中

問題 14.9 準備中

問題 14.10 準備中

問題 14.11 準備中

問題 14.12 準備中

第 15 章

各章の証明

演習 15.1

演習 15.2

演習 15.3 $\mathbb{R}$ の部分集合 A が、上に有界と仮定しましょう。

さーて、ここで実数の部分集合が「上に有界」の定義を思い出してみましょう。

「y が A に属する元ならば、不等式 $y \leq M$」となる $M \in \mathbb{R}$ が存在する、

ですね。

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ と、おきましょう。(B が嫌いなら C でもいいです。)

B は下に有界となってることが予想できますか？このことが正しい事を示しましょう！(「当たり前ジャン！」と言っては駄目です。)

x が B の元だとしたら、$-x \in A$ となってますね。つまり、言い換えれば、$-x \leq M$ が成り立ってます。右辺と左辺を入れ替えれば、$x \geq -M$ が成り立ちますね。

x は B から勝手に選んだ元で、$x \geq -M$ が成り立ってるわけですから、$-M$ は集合 B の下界の一つになってます。つまり、B は下に有界な集合になってます。

ここで、仮定 (d') を使いましょう。

集合 B は下に有界であることが今、分かったわけですから、(d') の仮定が成り立ってるわけです。

だから, (d') の結論が成り立ちます。つまり、$\inf B > -\infty$ となってます。($B \neq \varnothing$ ならば、$-\infty \leq \inf B < \infty$ がいっつも、成り立ってます。)

何度も $\inf B$ と書くのは煩わしいので、$\beta = \inf B$ とおくと, $-\infty < \beta < \infty$ です。

$-\beta$ が A の上限になることが次のように分かります。

上限の定義の (i) を確かめましょう。A の勝手な元 y をとります。$-y \in B$ なので、β は集合 B の下限なので、下限の定義 (i) より、$-y \geq \beta$ が成り立ってます。右辺と左辺を入れ替えれば、$y \leq -\beta$ が成り立つことがわかります。

次に上限の定義の (ii) を示しましょう。(ii) の定義を確かめるために、まず任意に（勝手に）$\varepsilon > 0$ を固定します。β が B の下限ですから、下限の定義の (ii) を思い出すと、$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon$ となる $x_\varepsilon \in B$ が存在します。

そこで、y_ε を $-x_\varepsilon$ で定義すると（つまり、$y_\varepsilon = -x_\varepsilon$）、$y_\varepsilon \in A$ が成り立ってます。

$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon$ を書き換えると、$-\beta - \varepsilon < -x_\varepsilon = y_\varepsilon$ となります。ゆえに、大事なところを抜き書きすれば、

「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次を満たす $y_\varepsilon \in A$ が存在する『$-\beta - \varepsilon < y_\varepsilon$』」

となり、$-\beta$ が A の上限の定義の (ii) を満たすことが分かりました。つまり、$\sup A = -\beta$ となってます。

演習 15.4 準備中

演習 15.5 準備中

演習 15.6 準備中

演習 15.7 準備中

演習 15.8 準備中

演習 15.9 準備中

演習 15.10 準備中

演習 15.11 準備中

演習 15.12 準備中