

粘性解が古典解になる時

– Caffarelli の研究の紹介 –

小池茂昭

(埼玉大学 大学院 理工学研究科)

1 序

与えられた偏微分方程式の微分階数と同じ微分可能性を持った関数が、考えている領域で偏微分方程式を満たす時に**古典解**と呼ばれる。一般に偏微分方程式の古典解を見つける事は困難である。そこで、存在を示しやすい古典解の候補となる‘弱解’の概念を導入し、まず弱解を見つけてから、その微分可能性を示し、古典解の存在を得るという方法が有効である。この方法の後半における弱解の微分可能性を導く事は弱解の regularity と呼ばれ、偏微分方程式論の重要な研究テーマである。

超関数解と呼ばれる代表的な弱解の概念は、発散型偏微分方程式には非常に有効であるが、非発散型偏微分方程式には適合しない。1980年代初頭に M. G. Crandall と P.-L. Lions によって導入された弱解の概念‘**粘性解**’は、2階の(退化を含んだ)非発散型楕円型・放物型方程式に対して適切であり、粘性解の理論は、それまで扱えなかった応用上重要な非線形(退化)2階楕円型・放物型方程式の研究の進展に多大な貢献をしてきた。詳しくは、本誌での粘性解関連の文献 [9], [12], [13] を参照してほしい。

Ω を \mathbf{R}^n の有界領域とし、1階の非発散型偏微分方程式の典型例として次の eikonal 方程式を考える。

$$|Du| = 1 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

以下、 $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ は未知関数で、その勾配を $Du = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ で表す。Dirichlet 境界条件 $u = 0$ を境界 $\partial\Omega$ の上で満たす (1) の古典解 (つまり、 $u \in C^1(\Omega)$ となる解) は存在しない事が知られている。しかしながら、境界からの距離関数 $d(x) = \inf\{|x - y| \mid y \in \partial\Omega\}$ が、この境界条件を満たす (1) の唯一の‘解’であると期待され、実際、 d が唯一の粘性解となる。これは最も単純な例であるが、このように粘性解は非発散型 2階(退化)楕円型・放物型偏微分方程式の正しい弱解として認知されてきた。

本稿では regularity に話題を絞るために、古典解の存在が期待できる完全非線形 2 階一様楕円型偏微分方程式に話題を限る。特に、粘性解の regularity のうち Hölder 連続性と 2 階微分の Hölder 連続性に関しての L. A. Caffarelli による証明方法を中心に紹介する。

Caffarelli は様々な非線形楕円型方程式の弱解の regularity 研究の第一人者であるにもかかわらず、その論法は独特な難解さを持っているため、日本では少数の研究者以外は彼の研究を引用してないように思える。本稿は、彼の膨大な研究の一つを私が理解できた範囲で伝えようという試みなので、よくご存知の方は読み飛ばして頂きたい。

$n \times n$ 実対称行列全体を S^n で表し、 $F : S^n \rightarrow \mathbf{R}$ と $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、次の完全非線形 2 階偏微分方程式を考える。

$$F(D^2u) = f(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (2)$$

D^2u は、 (i, j) 成分が $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ となる $n \times n$ 実対称行列とする。

以降、一様楕円定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$ を固定し、 $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$ を満たす $A \in S^n$ 全体を $S_{\lambda, \Lambda}^n$ で表す。

F には、線形の場合の一般化である次の一様楕円性を仮定する。

$$\mathcal{P}^-(X - Y) \leq F(X) - F(Y) \leq \mathcal{P}^+(X - Y) \quad (\forall X, Y \in S^n)$$

但し、Pucci 作用素 $\mathcal{P}^\pm : S^n \rightarrow \mathbf{R}$ は次で与えられる。

$$\mathcal{P}^+(X) := \max_{A \in S_{\lambda, \Lambda}^n} \{-\text{trace}(AX)\}, \quad \mathcal{P}^-(X) := \min_{A \in S_{\lambda, \Lambda}^n} \{-\text{trace}(AX)\} \quad (X \in S^n)$$

本稿の Pucci 作用素は、[3] や [4] と符号が異なる事に注意しておく。

更に、斉次性 $F(\theta X) = \theta F(X)$ ($\theta \geq 0, X \in S^n$) を仮定する。(故に、 $F(O) = 0$ となる。)

以下の議論では、解が (2) を満たす事よりも、 $\mathcal{P}^-(D^2u) \leq f(x)$ や $\mathcal{P}^+(D^2u) \geq f(x)$ を満たす事が本質的である。故に、 F が x に依存していても一様楕円性を満たすならば、たとえ x に関して連続性を仮定しなくても以下の議論が (少なくとも前半の Hölder 連続性に関しては) 成立する。

ここでは、 u が (2) の粘性優解であるとは $F(D^2u) \geq f(x)$ を ‘粘性解の意味で’ 満たすとし、粘性劣解とは $F(D^2u) \leq f(x)$ を ‘粘性解の意味で’ 満たすとする。また、(2) の粘性解とは (2) の粘性劣解かつ粘性優解となる事である。厳密な定義はここでは与えないので [7], [12] を参照してほしい。

一般に、 u が (2) の粘性劣解でも $-u$ は (2) の粘性優解とはならず、 $G(X) := -F(-X)$ とおいた時の $G(D^2u) = -f(x)$ の粘性優解になる。 G も F と同じ一

様楕円性を満たし, F は u には直接依存しないので次の事実が示される.

任意の定数 $C \in \mathbf{R}$, (2) の粘性優解 v

↓

$$\begin{cases} v + C \text{ は, } \mathcal{P}^+(D^2u) = -|f(x)| \text{ の粘性優解} \\ -v + C \text{ は, } \mathcal{P}^-(D^2u) = |f(x)| \text{ の粘性劣解} \end{cases}$$

また, v が粘性劣解ならば, 上で優解と劣解を入れ替えた命題が成立する. これらの事実は以降, 頻繁に使う.

さて, (2) の最も典型的な例は, $\lambda = \Lambda = 1$ の場合であり, (2) は Poisson 方程式になる.

$$-\Delta u = f(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (3)$$

ここで, $\Delta u = \text{trace}(D^2u)$ とおいた.

完全非線形の例は, $F(X) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \min_{\beta \in \mathcal{B}} \{-\text{trace}(A^{\alpha, \beta} X)\}$ ($X \in S^n$) などである. ただし, \mathcal{A} と \mathcal{B} は適当な index 集合であり, $A^{\alpha, \beta} \in S_{\lambda, \Lambda}^n$ とする ($(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$). この場合, 一般に写像 $X \in S^n \rightarrow F(X) \in \mathbf{R}$ は凸でも凹でもない. また, F は $X \in S^n$ のみに依存しているから, 定数係数の方程式に対応している.

(3) の解の標準的な regularity 理論 (L^p 評価・Schauder 評価) を基礎に, 変数係数や低階の微分を含んだ方程式, 更に非線形の場合も, 方程式が (3) の ‘小さな’ 摂動と見なせる場合には, 様々な一般化が知られている. また完全非線形の場合 (2) でも, 本稿で述べる結果の幾つかの一般化に関しては [3] や [4] を参照してほしい.

以下, しばしば粘性解をあたかも古典解のように微分するが, すべて ‘粘性解の意味で’ 微分しているので注意してほしい. 部分積分, 線形性, 解の表現公式等を使っていない事に特に注意してほしい.

本稿では内部評価 (局所評価とも呼ばれる) だけを議論するので, 解 u の境界条件や無限遠での挙動には言及しない.

2 粘性解の Hölder 連続性

発散型方程式の場合, 1957~ 60 年の De Giorgi, Nash, Moser による Hölder 連続評価は, 非線形偏微分方程式の超関数の意味での弱解の regularity に関する研究の初期の重要な結果である.

一方, 非発散型方程式に関しては, Krylov-Safonov が確率解析を用いて, 古典解と弱解の中間的な ‘強解’ の Hölder 連続評価を示した. また, Trudinger は, 純粋に解析的な手法で同様の結果を得た. その後, 粘性解が導入され, Caffarelli は粘性解の Hölder 連続評価を証明した.

以下, $Q_r \subset \mathbf{R}^n$ を原点中心で一辺の長さ $r > 0$ の n 次元開立方体とする.

u を (2) の粘性解とする. u の原点近傍の Hölder 連続性は, 次を満たす $C_1 > 0$ と $\alpha \in (0, 1)$ が存在する事を示せばよい.

$$\text{osc}(r; u) := \sup_{Q_r} u - \inf_{Q_r} u \leq C_1 r^\alpha \quad (0 < \forall r < 1) \quad (4)$$

更に, 次の式 (5) を満たす $\theta \in (0, 1)$ の存在が示せば (4) が導かれる.

$$\text{osc}(1; u) \leq \theta \text{osc}(2; u) + C_2 \|f\|_{L^n(Q_2)} \quad (5)$$

実際, $r \in (0, 1/2)$ に対し, $u^r(x) = u(rx)$ が, $F(D^2 u^r(x)) = f^r(x) := r^2 f(rx)$ を満たすので, (5) から

$$\text{osc}(r; u) \leq \theta \text{osc}(2r; u) + C_2 r \|f\|_{L^n(Q_2)} \quad (6)$$

が得られる. $\|f\|_{L^n(Q_2)}$ は, C_2 に組み込めば $\|f\|_{L^n(Q_2)} = 1$ としてよい. すると (6) は, 右辺第 2 項を無視すれば, u の振動 (=osc) の増大度に関する評価であり, 図 1 のように原点での Hölder 連続性 (4) が導かれる.

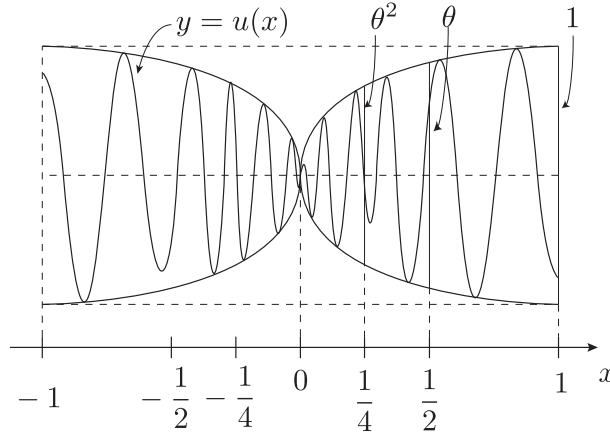


図 1: osc の減衰から Hölder 連続性へ

第 2 項もある場合を考慮して厳密に示すために, (6) において r を $s/2^k$ に置き換えると

$$\begin{aligned} \text{osc}(s/2^k; u) &\leq \theta \text{osc}(s/2^{k-1}; u) + C_2 s/2^k \\ &\leq \theta \{ \theta \text{osc}(s/2^{k-2}; u) + C_2 s/2^{k-1} \} + C_2 s/2^k \\ &\leq \dots \\ &\leq \theta^k \text{osc}(s; u) + C_2 s \end{aligned}$$

となる. ここで $\alpha = -\log \theta / \log(2/\theta) \in (0, 1)$ と決めて, 任意の $r \in (0, 1/2)$ に対し, $s = r^\alpha$ とおく. $r \in [s/2^k, s/2^{k-1})$ となる自然数 k を固定すると,

$$\begin{aligned} \text{osc}(r; u) \leq \text{osc}(s/2^{k-1}; u) &\leq \theta^{k-1} \text{osc}(s; u) + C_2 s \leq \theta^{-1} (s/r)^{\frac{\log \theta}{\log 2}} \text{osc}(1; u) + C_2 r^\alpha \\ &= \theta^{-1} \text{osc}(1; u) r^\alpha + C_2 r^\alpha \end{aligned}$$

となり $C_1 = 2\theta^{-1} \sup_{Q_1} |u| + C_2$ とおけば (4) を得る. 故に, (5) が示せれば Hölder 連続性 (4) の証明が終わる.

次の完全非線形方程式を考える.

$$\mathcal{P}^+(D^2u) = -|f(x)| \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (7)$$

弱 Harnack 不等式 次を満たす $q > 0$ と $C_0 > 1$ が存在する.

$$v \text{ は (7) の非負粘性優解} \implies \|v\|_{L^q(Q_1)} \leq C_0 \left(\inf_{Q_1} v + \|f\|_{L^n(Q_2)} \right)$$

ここで, $\|v\|_{L^q(Q_1)} = \left(\int_{Q_1} |v|^q dx \right)^{1/q}$ とおくが, $q \geq 1$ とは限らないのでノルムにはならない. しかし, $0 < q < 1$ のときも含めた ‘三角不等式もどき’ が成り立つ.

$$\|v_1 + v_2\|_{L^q(Q_1)} \leq 2^{\frac{(1-q)^+}{q}} (\|v_1\|_{L^q(Q_1)} + \|v_2\|_{L^q(Q_1)})$$

ここで, $r \in \mathbf{R}$ に対し, $r^+ = \max\{r, 0\}$ とする. また, 関数 u などに対しても $u^+ = \max\{u, 0\}$ と書く.

今後現れる定数 $C_k > 0$ は解には依存しない定数である.

この弱 Harnack 不等式から (5) が導かれる事を示そう. $M_k = \sup_{Q_k} u$ と $m_k = \inf_{Q_k} u$ とおく. $U = u - m_2$ と $V = M_2 - u$ が, Q_2 上で (7) の非負粘性優解になる. 故に, 弱 Harnack 不等式が成り立つから

$$\|U\|_{L^q(Q_1)} \leq C_0 \left(\inf_{Q_1} U + \|f\|_{L^n(Q_2)} \right), \quad \|V\|_{L^q(Q_1)} \leq C_0 \left(\inf_{Q_1} V + \|f\|_{L^n(Q_2)} \right)$$

となり, 両辺を加えると

$$M_2 - m_2 = \|U + V\|_{L^q(Q_1)} \leq 2^{\frac{(1-q)^+}{q}} C_0 \left(m_1 - m_2 + M_2 - M_1 + 2\|f\|_{L^n(Q_2)} \right)$$

となり, 式を適当に変形すると (5) が得られる. \square

【注意】 通常, (7) の非負粘性優解の弱 Harnack 不等式との非負粘性劣解の局所最大値原理から ‘Harnack 不等式’ を導き, 上述と同様な方針で Hölder 不等式を得る. ここでは, 局所最大値原理を使わない方法を述べた. しかし, $-u$ が粘性優解であるという事実を用いているので, u が粘性劣解であるという仮定は必要である.

以下に Caffarelli による弱 Harnack 不等式の証明を概観する. 他にも証明法はあるが, 一般化するためには下記の証明法が有効である事が, Świąch との共同研究 [15] で分かってきた.

最初に Aleksandrov-Bakelman-Pucci の (ABP と略す) 最大値原理を述べる. 幾つか記号を導入する. 一般に $g : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, $\partial_\Omega g(x) = \{p \in \mathbf{R}^n \mid g(y) \leq g(x) + \langle p, y - x \rangle (\forall y \in \Omega)\}$ とし, $\Gamma_r[g; \Omega] = \{x \in \Omega \mid \partial_\Omega g(x) \cap B_r \neq \emptyset\}$ とおく. また, $\Gamma[g; \Omega] = \cup_{r>0} \Gamma_r[g; \Omega]$ とする. 但し, $B_r = \{p \in \mathbf{R}^n \mid |p| < r\}$ とする.

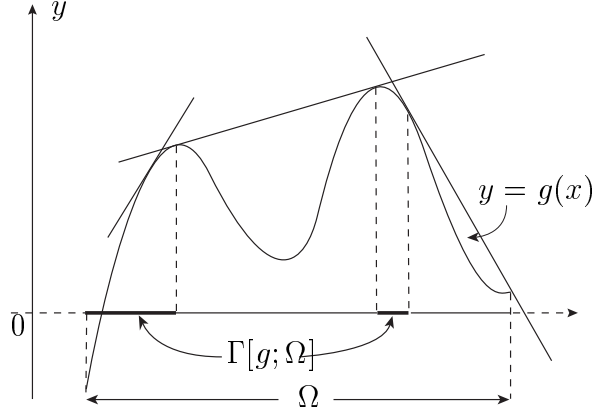


図 2: $\Gamma[g; \Omega]$ の図

ABP 最大値原理 次を満たす $C_3 > 0$ が存在する. $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を有界領域とする.

$$u \text{ は (2) の粘性劣解} \implies \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C_3 \text{diam}(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u^+; \Omega])}$$

証明の概略 簡単のため, $\text{diam}(\Omega) = 1$ と $u \in C^2$ を仮定する. 更に, $r_0 := \sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+ > 0$ と仮定してよい. $r := r_0/2$ に対して, $B_r = Du(\Gamma_r[u^+; \Omega])$ を示す.

実際, 任意の $p \in B_r$ に対し, $x \in \bar{\Omega} \rightarrow u^+(x) - \langle p, x \rangle$ の最大点を $\hat{x} \in \bar{\Omega}$ とすると,

$$u^+(x) - u^+(\hat{x}) \leq \langle p, x - \hat{x} \rangle \leq r \text{diam}(\Omega) = r_0/2 \quad (\forall x \in \Omega) \quad (8)$$

となる. よって, $\hat{x} \in \partial\Omega$ とすると, $r_0 > 0$ に矛盾するので, $\hat{x} \in \Omega$ と仮定してよい. 更に, $u(\hat{x}) \leq 0$ とすると (8) の左辺が非負なので $p = 0$ となり, 再び (8) から $u(x) \leq 0$ ($\forall x \in \Omega$) となり $r_0 > 0$ に矛盾する. 故に, $u(\hat{x}) > 0$ としてよい. 以上の考察から, $p \in Du(\Gamma_r[u^+; \Omega])$ となる.

$r_0 > 0$ に注意すると, 図 2 から $\Gamma_r[u^+; \Omega] \subset \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ が分かるから, 変数変換の公式 ([8] や [16] を参照. 左記の文献の証明でなく ‘摂動’ による証明を載せている文献があるが, 間違っているので要注意) によって

$$|B_r| \leq \int_{\Gamma_r[u^+; \Omega]} |\det(D^2u)| dx \leq \int_{\Gamma[u^+; \Omega]} |\det(D^2u)| dx$$

が得られる. $\Gamma[u^+; \Omega]$ 上では, $D^2u \leq 0$ となるので, $\mathcal{P}^-(D^2u) \leq F(D^2u)$ を用いると $|\det(D^2u)| \leq |-\text{trace}(D^2u)/n|^n \leq C_4 F(D^2u)^n$ が得られるので, 次が成り立つから証明が終わる.

$$|B_r| \leq C_4 \int_{\Gamma[u^+; \Omega]} (f^+)^n dx \quad \square$$

【注意】 ABP 最大値原理では, u が (2) の粘性劣解であることから, $\mathcal{P}^-(D^2v) = f^+$ の粘性劣解である事がわかり, この事実だけを使っている事に注意する. すると, u

が (2) の粘性優解ならば $-u$ が $\mathcal{P}^-(D^2v) = f^-$ の粘性劣解なので次が成り立つ.

$$\sup_{\Omega}(-u) \leq \sup_{\partial\Omega}(-u)^+ + C_3 \text{diam}(\Omega) \|f^-\|_{L^n(\Gamma[(-u)^+, \Omega])}$$

弱 Harnack 不等式の証明の概略 まず, $f \equiv 0$ の場合に帰着する. Q_2 上で $\mathcal{P}^-(D^2w) \geq |f(x)|$ が殆ど至る点で成り立ち, ∂Q_2 で $w = 0$ となる関数 (強優解) $w \in C(\overline{Q_2}) \cap W_{loc}^{2,n}(Q_2)$ の存在は知られている. 例えば, $|f|$ を滑らかな関数 f_ε で近似すれば, \mathcal{P}^- は凹関数なので, Evans-Krylov により $\mathcal{P}^-(D^2u) = f_\varepsilon(x)$ の古典解 w_ε の存在が知られており, $W_{loc}^{2,p}$ 評価も得られる (例えば, [10], [5] を参照). 一方, $\pm w_\varepsilon$ に ABP 最大値原理を適用すれば, $0 \leq w_\varepsilon \leq C_6 \|f_\varepsilon\|_{L^n(Q_2)}$ となる $C_6 > 0$ がある. $\{w_\varepsilon\}$ は $L^\infty(\Omega)$ で Cauchy 列になることも分かる ([5], [10] 参照) ので, w_ε の極限関数 w は $0 \leq w \leq C_6 \|f\|_{L^n(Q_2)}$ を満たす. 近似解の極限関数の 2 階微分は弱収束しか得られないので, 等式でなく上述の不等式しか満たさない事に注意しておく.

$v := u + w$ は, $\mathcal{P}^+(D^2v) \geq \mathcal{P}^+(D^2u) + \mathcal{P}^-(D^2w) \geq 0$ であり, 右辺がゼロの場合に弱 Harnack 不等式が成り立つと仮定してるから, 次のようになる.

$$\|u\|_{L^q(Q_1)} \leq \|v\|_{L^q(Q_1)} \leq C_5 \inf_{Q_1} v \leq C_5 \left(\inf_{Q_1} u + C_6 \|f\|_{L^n(Q_2)} \right)$$

(左端の不等式では, w の非負性を用いている.)

さて, 以上の議論で $f \equiv 0$ の場合を示せばよい事に帰着した. 次に, u の代わりに $v(x) := u(x)/(\inf_{Q_1} u + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ は, 最後に $\varepsilon \rightarrow 0$ ととる) を考えれば, ' $\inf_{Q_1} u \leq 1 \implies \|u\|_{L^q(Q_1)} \leq C_7$ ' となる, $C_7 > 0$ を見つければよい.

後の都合で少し仮定の部分が弱い次の命題を示そう. ' $\inf_{Q_3} u \leq 1$ ならば, (u に依存しない) 適当な $M > 1$ と $\delta \in (0, 1)$ で,

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > M\}| \leq \delta \tag{9}$$

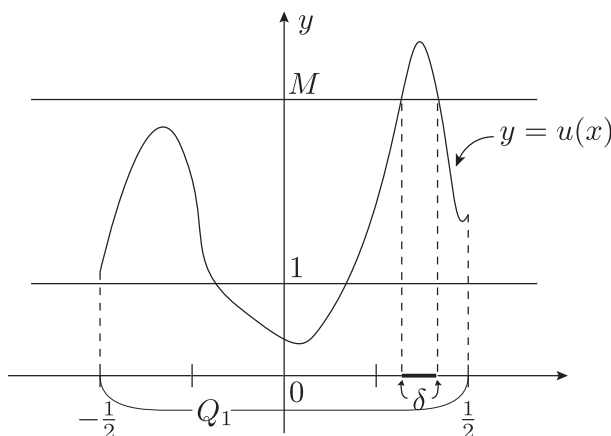


図 3: (9) のイメージ図

を満たすものが存在する'. すなわち, 'uがある程度小さい値をとると, その近くで大きな値をとる点全体の測度は小さい' 事を意味している (図 3 を参照). (下線部の強い仮定は次のステップで重要になる.)

(9) を示すために, 適当な定数 $A, B, \alpha > 0$ に対し, 関数 $\phi(x) = A - B|x|^{-\alpha}$ で, $\mathcal{P}^-(D^2\phi) \geq 0$ で, $\phi|_{Q_1} \leq -2$ かつ $\phi|_{\partial Q_2} \geq 0$ となる関数を見つけて $w := -u - \phi$ とおくと, $\mathcal{P}^-(D^2w) \leq 0$ となることから, ABP 最大値原理より $\sup_{Q_2} w \leq 0$ となる. ($-\Delta\phi \geq 0$ の場合, $n \geq 3$ ならば $\alpha = n - 2$ である.) しかし, この ϕ は原点で特異性を持つので, 原点近傍で適当に滑らかにつながねばならない.

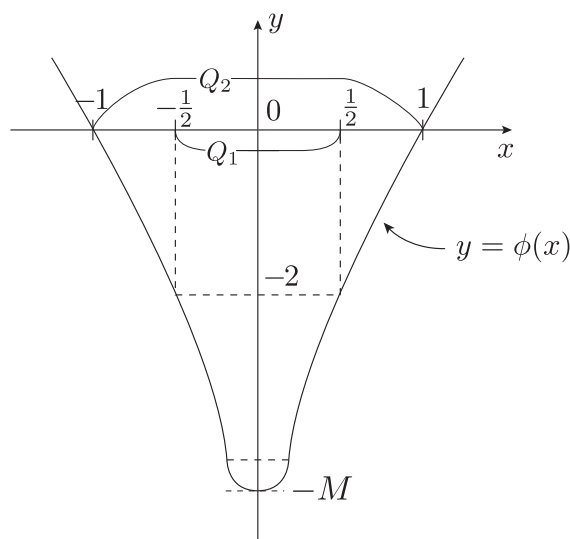


図 4: $n = 1$ の場合の ϕ

すると, $\mathcal{P}^-(D^2\phi) \geq -\xi$ となってしまいが, $\xi \geq 0$ の support は Q_1 内にあるとしてよい. 改めて, この $w = -u - \phi$ に対して ABP 最大値原理を適用し,

$$1 \leq \sup_{Q_1} w \leq \sup_{Q_2} w \leq C_8 \|\xi\|_{L^n(\Gamma[w^+; Q_2] \cap Q_1)}$$

となるが, $\Gamma[w^+; Q_2] \cap Q_1 \subset \{x \in Q_1 \mid w(x) > 0\}$ なので,

$$1 \leq C_9 |\{x \in Q_1 \mid u(x) \leq M := \sup_{Q_2} (-\phi)\}|$$

となり, $\delta = 1 - C_9^{-1}$ とおけば (9) が示せる.

【注意】 上記の関数 ϕ のグラフは, 1次元では正しいが, $n \geq 5$ の場合には, Q_1 と Q_2 の間に原点中心の球は取れない. よって, $n \geq 5$ では, Q_2 の代わりに原点中心で半径 \sqrt{n} の球で考えねばならない.

次に自然数 k に対し,

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > M^k\}| \leq \delta^k \quad (10)$$

が示せば, $|\{x \in Q_1 \mid u(x) > t\}| \leq \delta^{-1} t^{\log \delta / \log M}$ が導かれる (弱 Harnack 不等式から Hölder 連続性を導いた方法を参照). 故に, $q \in (0, -\log \delta / \log M)$ に対して, $\|u\|_{L^q(Q_1)} \leq C_7$ が示せる.

さて, (10) を数学的帰納法で示そう. $k-1$ で (10) が成立していると仮定する. $A = \{x \in Q_1 \mid u(x) > M^k\}$ と $B = \{x \in Q_1 \mid u(x) > M^{k-1}\}$ とおく. $A \subset B \subset Q_1$ と $|B| \leq \delta^{k-1}$ に注意する (帰納法の仮定).

Q_1 を一辺の長さを半分にした 2^n 個の立方体 Q のうち, A との共通部分の比率が δ より大きい場合 (つまり $|A \cap Q|/|Q| > \delta$), Q はそのままにして番号をつける. そうでない場合は Q を更に 2^n 個に分け, この性質が得られるまで細かくしていく. 番号付けられたものを $\{Q^j\}_{j=1}^\infty$ とする (つまり, $|A \cap Q^j|/|Q^j| > \delta$). Q^j に対して, Q^j が作られた元の立方体を \hat{Q}^j と表す ($|A \cap \hat{Q}^j|/|\hat{Q}^j| \leq \delta$ に注意せよ). $Q^j \neq Q^i$ でも $\hat{Q}^j = \hat{Q}^i$ の場合があるが, 同じものは一つだけ番号をつける (図 5 を参照).

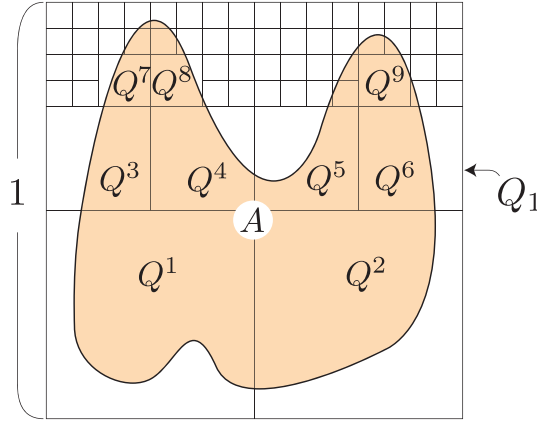


図 5: 立方体分割

$\hat{Q}^j \subset B$ を示そう. もし, $\hat{x} \in \hat{Q}^j \setminus B$ があるとする (つまり, $u(\hat{x}) \leq M^{k-1}$). $Q^j = z + Q_{1/2^m}$ として, $v(x) = u(z + 2^{-m}x)/M^{k-1}$ とおいても $\mathcal{P}^+(D^2v) \geq 0$ を満たし, $\inf_{Q_3} v \leq 1$ が成り立つので, (9) を示したのと同様に $|\{x \in Q_1 \mid v(x) > M\}| \leq \delta$ が示せる.

u に戻すと $|Q^j \setminus A|/|Q^j| \geq 1 - \delta$ となり, $|A \cap Q^j| + |Q^j \setminus A| > |Q^j|$ が得られ, 矛盾が導かれる.

ところで, $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q^j$ が殆ど至る所で成り立つ. 実際,

$$L = \left\{ x \in Q_1 \left| \begin{array}{l} \text{一辺の長さが } 2^{-j} \text{ で } x \text{ を含む立方体 } \tilde{Q}^j \text{ に対し} \\ \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{Q}^j|^{-1} \int_{\tilde{Q}^j} \chi_A(y) dy = \chi_A(x) \text{ が成り立つ} \end{array} \right. \right\}$$

とおくと, Lebesgue の微分定理より $|Q_1 \setminus L| = 0$ となる. $x \in L$ で, $x \notin \bigcup_{j=1}^\infty Q^j$ ならば, $\chi_A(x) \leq \delta < 1$ なので, $x \notin A$ となるからである.

故に, \hat{Q}^j の選び方から,

$$|A| = \sum_{j=1}^{\infty} |A \cap Q^j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |A \cap \hat{Q}^j| \leq \delta \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{Q}^j| \leq \delta |B| \leq \delta^k$$

となるので (10) が示せる. \square

3 球上の弱 Harnack 不等式

次章で使いやすいように弱 Harnack 不等式を球上で導いておく. 簡単のため $f \equiv 0$ とする.

$$\mathcal{P}^+(D^2u) = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (11)$$

弱 Harnack 不等式 次を満たす $q > 0$ と $C'_0 > 0$ が存在する.

$$v \text{ は (11) の非負粘性優解} \implies \|v\|_{L^q(B_1)} \leq C'_0 \inf_{B_1} v$$

単位立方体上の弱 Harnack 不等式を単純には適用できないので, Cabré [1] のアイデアを紹介する. まず, Q_2 に対し, 次のような単位立方体 $\{Q^k\}_{k=1}^N$ を選ぶ.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad Q_2 = \bigcup_{k=1}^N Q^k \\ (ii) \quad \text{次を満たす } \beta \in (0, 1) \text{ と } m \in \{2, \dots, N\} \text{ が存在する.} \\ \quad \quad \quad \text{「} 1 \leq i < j \leq N \text{ に対し, 次を満たす } \{k_\ell\}_{\ell=1}^m \text{ がある.} \\ \quad \quad \quad \text{「} Q^{k_1} = Q^i, Q^{k_m} = Q^j \text{ かつ } |Q^{k_\ell} \cap Q^{k_{\ell+1}}| \geq \beta \text{ (} 1 \leq \ell \leq m-1 \text{)」} \end{array} \right. \quad (12)$$

$\{Q^k\}_{k=1}^N$ は, 一定の割合で ‘重なる部分’ を持ち, Q_2 を被覆する単位立方体を選べばよい.

さて, $\hat{x} \in \overline{B_1}$ を $\inf_{B_1} v = v(\hat{x})$ となるように選ぶ. $\hat{x} \in Q^1$ と仮定してよい. Q^1 は B_1 からはみ出さずとも知れないので, $\inf_{B_1} v \geq \inf_{Q^1} v$ に注意する. $q > 0$ に対して, ‘三角不等式もどき’ から次が得られる.

$$\|v\|_{L^q(B_1)} \leq \|v\|_{L^q(Q_2)} \leq C(q) \sum_{i=1}^N \|v\|_{L^q(Q^i)} \quad (13)$$

前章で得た弱 Harnack 不等式から,

$$\|v\|_{L^q(Q^i)} \leq C_0 \inf_{Q^i} v \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

が成り立つ.

さて, $i \geq 2$ に対し, $Q^{k_1} = Q^i, Q^{k_2}, \dots, Q^{k_m} = Q^1$ で (12) の (ii) を満たすように選ぶと, 次の一連の不等式が成り立つ.

$$\inf_{Q^i} v \leq \inf_{Q^i \cap Q^{k_2}} v \leq \left(\frac{1}{|Q^i \cap Q^{k_2}|} \int_{Q^i \cap Q^{k_2}} v^q dx \right)^{1/q} \leq \frac{1}{\beta^{1/q}} \|v\|_{L^q(Q^{k_2})} \leq \frac{C_0}{\beta^{1/q}} \inf_{Q^{k_2}} v$$

これを繰り返せば $\inf_{Q^i} v \leq C'(q) \inf_{Q^1} v \leq C'(q) \inf_{B_1} v$ となり, (13), (14) とあわせて証明が終わる. \square

この章の結果は B_1 の代わりに $B_{1/2}$ で置き換え, 次の形で使う.

$$|\{x \in B_{1/2} \mid v(x) \geq 1\}|^{1/q} \leq C'_0 \inf_{B_{1/2}} v \quad (15)$$

4 2階微分の Hölder 連続評価

(2) の粘性解の更に高い regularity の結果の一つで Evans-Krylov 評価「 $X \rightarrow F(X)$ が凸の場合, D^2u が Hölder 連続」の Caffarelli による証明のアイデアを紹介する.

証明は《第1段》まず, $u \in C^{1,1}$ を示し, 殆ど至る所で方程式を満たしているとして《第2段》 D^2u の Hölder 連続性を示す. 《第1段》は通常 of 粘性解理論に現われる近似とポテンシャル論の標準的な方法で示せるので, 本稿では《第2段》の部分だけを述べる.

$u \in C^2$ として示せば, 各点での議論を‘殆ど至る所’で行えばよいので(気をつけなくてはならない箇所はあるが), 簡単のため $u \in C^2$ を仮定する.

困難な点を明らかにするために $F \in C^2$ を仮定しておく. (後の証明の概略では, $F \in C^2$ は仮定しない) すると, 凸性は次で表せる.

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial X_{ij} \partial X_{kl}}(X) Z_{ij} Z_{kl} \geq 0 \quad (\forall X = (X_{ij}), Z = (Z_{ij}) \in S^n)$$

以降, 繰り返す番号は 1 から n まで和を取ることにする.

以下, (2) の代わりに (2) において $f \equiv 0$ の場合を考える.

$$F(D^2u(x)) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n) \quad (16)$$

まず, F の凸性が重要な理由を説明する. $\gamma \in \mathbf{R}^n$ を単位ベクトルとし, (16) の滑らかな解 u として $u_{\gamma\gamma} := \partial^2 u / \partial \gamma^2$ を考える. (16) を γ 方向に 2 階微分した $w = u_{\gamma\gamma}$ は

$$0 = \frac{\partial F}{\partial X_{ij}}(D^2u) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial X_{ij} \partial X_{kl}} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_k \partial x_l} \geq \frac{\partial F}{\partial X_{ij}}(D^2u) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$$

を満たし, 一様楕円性から $\lambda I \leq (-F_{X_{ij}}(D^2u)) \leq \Lambda I$ が得られる. よって, w は $\mathcal{P}^-(D^2w) = 0$ の粘性劣解になる. この事実は $F \in C^2$ でなくても成り立つ.

w が $\mathcal{P}^+(D^2w) = 0$ の粘性優解になっていれば, w の Hölder 連続性が示せるので, γ は任意だから D^2u の Hölder 連続性が導かれる. しかし, w が $\mathcal{P}^+(D^2w) = 0$ の粘性優解にならないので, この情報不足を補うのが一様楕円性である.

【注意】 もちろん, F が凹の場合も同じ結果が得られる. F が凸でも凹でもないが, 次のような特殊な場合は [2] により, 2 階微分の Hölder 評価が得られている.

$$F(X) = \max\{-\text{trace}(A^1 X), \min\{-\text{trace}(A^2 X), -\text{trace}(A^3 X)\}\}$$

ただし, $A^k \in S_{\lambda, \Lambda}^n$ ($k = 1, 2, 3$) とする.

最近, 凸性を仮定しない場合, Nadirashvili-Vlăduț が, [17] では C^2 にならないが $W^{2, \infty}$ になる粘性解, [18] では $W^{2, \infty}$ にすらならない粘性解の存在を示した.

Hölder 連続性を導いた方法を思い出すと, 次を満たす $\delta_0 \in (0, 1)$ がある事を示せばよい ((5) における ‘振動 (osc)’ を $D^2 u$ の値域の直径で置き換え, 縮尺を少し工夫すればよい).

$$\text{diam}(D^2 u(B_{\delta_0})) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(D^2 u(B_1))$$

更に, 縮尺法を用いて $\text{diam}(D^2 u(B_1)) = 2$ と仮定してよいので, 次を示せばよい.

$$\text{diam}(D^2 u(B_{\delta_0})) \leq 1$$

Step 1 最初に, $F(X_1) = F(X_2) = 0$ ならば,

$$c_0 \|X_2 - X_1\| \leq \|(X_2 - X_1)^\pm\| \quad \text{但し, } c_0 := \frac{\lambda}{\lambda + n\Lambda}$$

が成り立つ事を示す. ここで, \mathbf{R}^n の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ として $\|X\| := \sup\{|\langle Xe, e \rangle| \mid \|e\| = 1\} = \max\{|\lambda_k| \mid \lambda_k \text{ は } X \text{ の固有値}\}$ である.

実際, X の正の固有値を λ_k^+ , 負の固有値を λ_k^- とすると

$$\mathcal{P}^+(X) = -\lambda \sum \lambda_k^+ - \Lambda \sum \lambda_k^-$$

なので,

$$\begin{aligned} 0 = F(X_2) - F(X_1) &\leq \mathcal{P}^+(X_2 - X_1) \\ &\leq -\lambda \|(X_2 - X_1)^+\| + n\Lambda \|(X_2 - X_1)^-\| \\ &\leq -\lambda \|X_2 - X_1\| + (\lambda + n\Lambda) \|(X_2 - X_1)^-\| \end{aligned}$$

となるからである. $(X_2 - X_1)^+$ に対する結果は, X_1 と X_2 を入れ替えればよい.

Step 2 任意の自然数 N_0 に対し, $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, \lambda, \Lambda, N_0) \leq \min\{c_0/32, 1/4\}$ で次を満たすものが存在する.

‘ $1 < \text{diam}(D^2 u(B_1)) \leq 2$ であり, かつ半径が $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ の開球 $\{B^k\}_{k=1}^N$ ($1 \leq N \leq N_0$) が $D^2 u(B_1)$ の被覆ならば, $\{B^k\}_{k=1}^N$ から一つ減らしても $D^2 u(B_{1/2})$ の被覆になる.’

B^1, \dots, B^N を半径が $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ の開球で $D^2u(B_1) \subset \cup_{k=1}^N B^k$ を満たすとする. $B^k \subset B_{2\varepsilon}(D^2u(x_k)) =: \hat{B}^k$ となる $x_k \in B_1$ がある. 更に, $X_k := D^2u(x_k)$ のうちで $\|X_i - X_j\| \geq c_0/16$ となる番号を (並び替えて) $1, \dots, N'$ ($N' \leq N$) とする. $\hat{B}^1, \dots, \hat{B}^{N'}$ は, もとの被覆より少ないかもしれないが, 減らした開球, 例えば $\hat{B}^{N'+1}$ とは中心同士が $c_0/16$ より小さいので, $\hat{B}^{N'+1} \subset B_{c_0/8}(X_k)$ となる $k \in \{1, \dots, N'\}$ がある. 故に, $D^2u(B_1) \subset \cup_{k=1}^{N'} B_{c_0/8}(X_k)$ となり, 逆像を考えると $B_1 \subset \cup_{k=1}^{N'} (D^2u)^{-1}(B_{c_0/8}(X_k))$ となっている.

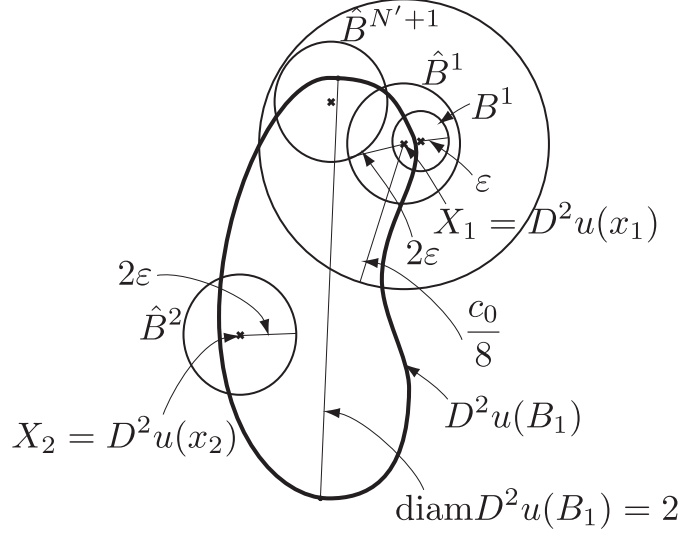


図 6: B^k, \hat{B}^k の選び方

よって, ある番号 $k_0 \in \{1, \dots, N'\}$ で

$$|\{x \in B_{1/2} \mid D^2u(x) \in B_{c_0/8}(X_{k_0})\}| \geq \frac{|B_{1/2}|}{N'}$$

となるものがある. $k_0 = 1$ としよう. つまり,

$$|\{x \in B_{1/2} \mid D^2u(x) \in B_{c_0/8}(X_1)\}| \geq \frac{|B_{1/2}|}{N'} \geq \frac{|B_{1/2}|}{N_0} =: \eta > 0 \quad (17)$$

となる.

また, $\varepsilon \leq 1/4$ だから, 任意の $k \in \{2, \dots, N\}$ に対し, $\|X_k - X_1\| \leq 1/4$ だと $\text{diam} D^2u(B_1) > 1$ に矛盾するので $k_1 \in \{2, \dots, N\}$ で $\|X_{k_1} - X_1\| > 1/4$ となるものがある. 簡単のため $k_1 = 2$ とおく (図 6 を参照).

$F(X_k) = 0$ ($k = 1, 2$) を思い出すと, Step 1 で $c_0\|X_2 - X_1\| \leq \|(X_2 - X_1)^+\|$ なので, 単位ベクトル $\gamma \in \mathbf{R}^n$ で

$$\frac{c_0}{4} \leq u_{\gamma\gamma}(x_2) - u_{\gamma\gamma}(x_1) \quad (18)$$

となるものが存在する。 $K := \sup_{B_1} u_{\gamma\gamma}$ とし、 $v(x) := K - u_{\gamma\gamma}(x)$ とおくと、 $u_{\gamma\gamma}$ が $\mathcal{P}^-(D^2u) = 0$ の粘性劣解だから、 v は B_1 上で $\mathcal{P}^+(D^2v) = 0$ の非負粘性優解になる。 (17) から、 $x \in B_{1/2}$ が $\|D^2u(x) - X_1\| < c_0/8$ を満たすならば、 $u_{\gamma\gamma}(x) - u_{\gamma\gamma}(x_1) < c_0/8$ であり、 (18) と合わせて

$$\frac{c_0}{8} \leq u_{\gamma\gamma}(x_2) - u_{\gamma\gamma}(x) \leq v(x)$$

となる。 よって、 (17) より

$$|\{x \in B_{1/2} \mid v(x) \geq c_0/8\}| \geq \eta$$

となる。 v の代わりに、 $8v/c_0$ に対して (15) と (17) から次を得る。

$$\inf_{B_{1/2}} v \geq \frac{c_0}{8C'_0} \eta^{1/q} =: \kappa > 0 \quad (19)$$

$z \in B_1$ を $K - \varepsilon < u_{\gamma\gamma}(z)$ ととると、 $\|D^2u(z) - X_{j_0}\| < 2\varepsilon$ となる $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ が存在するので、 $K - u_{\gamma\gamma}(x_{j_0}) < 3\varepsilon$ となる。 さて、 $\varepsilon_0 \leq \kappa/5$ とおくと、 $D^2u(B_{1/2}) \cap \hat{B}^{j_0} = \emptyset$ になる。 実際、 $\|D^2u(y) - X_{j_0}\| < 2\varepsilon$ となる $y \in B_{1/2}$ があつたとすると、

$$\kappa \leq K - u_{\gamma\gamma}(y) \leq K - u_{\gamma\gamma}(x_{j_0}) + \|X_{j_0} - D^2u(y)\| < 5\varepsilon$$

となり矛盾する。

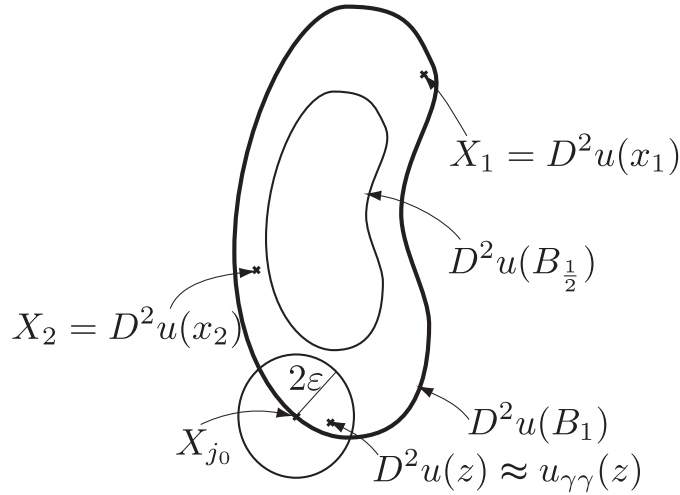


図 7: z , \hat{B}^{j_0} と $D^2u(B_{1/2})$ の位置

故に、 $B^{j_0} \subset \hat{B}^{j_0}$ なので、 B^{j_0} を除いても $D^2u(B_{1/2})$ の被覆になる。 つまり、 $D^2u(B_{1/2}) \subset \bigcup_{k=1}^N B^k \setminus B^{j_0}$ となる (図 7 を参照)。

Step 3 Step 2 の j_0 を N とする。 Step 2 の $D^2u(B_1)$ の被覆 $\{B^k\}_{k=1}^{N-1}$ を用いる。 $w(x) = 4u(x/2)$ とおくと、 w は $F(D^2w(x)) = 0$ ($x \in B_1$) を満たす事に注意して、

$1 < \text{diam}(D^2w(B_1)) \leq 2$ が成り立つとすると, $D^2w(B_1)$ の被覆 $\{B^k\}_{k=1}^{N-1}$ から一つ減らして $D^2w(B_{1/2})$ が覆える. 有限回でなくなってしまうので, ある $1 \leq k \leq N-1$ で $\text{diam}(D^2u(B_{1/2^k})) \leq 1$ でないと矛盾するので, 証明を終える. \square

あとがき

今から 10 年も前であろうか, L. C. Evans 氏と雑談していた際, Caffarelli の数学について, 「(彼の論文は)horrible だが, extremely interesting だ. 自分が年を取って引退したら彼の論文の解説を書きたい」と言っていた. Evans 氏らしい表現だが, その位, 彼の研究は魅力的だが理解が難しいという事であろう. 実は, 私も学生時代, 彼の自由境界の regularity に関する論文が理解できず挫折した思い出がある.

個人的には Caffarelli の数学の魅力は, 誤解を恐れずに言えば, ‘難しい数学を何も使わない’事だと考えている.

今では彼の重要な仕事を解説した良い本に [4], [6], [11] がある. [4] の著者の一人, Cabré 氏によると Caffarelli の講義を分かりやすく書いたものだそうだ. この本は本稿で非常に参考にした, というより, この本の一部を私流に書き換えただけである.

密かに, 私も日本で Caffarelli の仕事のごく一部でも伝えられるようになりたいと願っている.

謝辞

この原稿を考えている間に, Berkeley 市の Mathematical Sciences Research Institute の特別週間で, Caffarelli 氏による完全非線形方程式の解の regularity に関する 5 回連続講演を拝聴する機会があった. この原稿で氏のアイデアを紹介する許可を頂き, その素晴らしい講演と共にここに感謝いたします. 日本数学会の担当者の方々には, 原稿が遅れてしまいご迷惑をおかけしました. そして, 初稿の不備を指摘していただいたレフリーの方々, きれいな図を描いてくれた埼玉大学数学専攻の大学院生の中川和重君と石原海君に感謝いたします.

最後に, Caffarelli の研究を再び勉強をする機会を作ってくれた, 本稿の執筆を推薦して頂いた畏友, 坂口茂氏に感謝いたします.

参考文献

- [1] X. CABRÉ, On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **48** (1995), 539–570.
- [2] X. CABRÉ & L. A. CAFFARELLI, Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.*, **83** (2003), 573–612.

- [3] L. A. CAFFARELLI, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, *Ann. Math.*, **130** (1989), 189-213.
- [4] L. A. CAFFARELLI & X. CABRÉ, Fully Nonlinear Elliptic Equations, AMS Colloquium Publications, **43**, 1996.
- [5] L. A. CAFFARELLI, M. G. CRANDALL, M. KOCAN & A. ŚWIĘCH, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49** (1996), 365-397.
- [6] L. A. CAFFARELLI & S. SALSA, A Geometric Approach to Free Boundary Problems, Graduate Studies in Math., **68**, AMS, 2005.
- [7] M. G. CRANDALL, H. ISHII & P.-L. LIONS, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 1-67.
- [8] L. C. EVANS & R. GARIEPY, Measure Theory and Fine Properties of Functions, *Studies in Advanced Math.*, CRC Press, 1992.
- [9] 儀我美一, 曲面の発展方程式における等高面の方法, *数学*, **47** (1995), 321-340.
- [10] D. GILBARG & N. S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1983.
- [11] C. E. GUTIÉRREZ, The Monge-Ampère Equation, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2001.
- [12] 石井仁司, 非線形偏微分方程式の粘性解について, *数学*, **46** (1994), 144-157.
- [13] 石井仁司, 粘性解とその応用, *数学*, **47** (1995), 97-110.
- [14] S. KOIKE, A Beginner's Guide to the Viscosity Solution Theory, *MSJ Memoir*, **13**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [15] S. KOIKE & A. ŚWIĘCH, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, *J. Math. Soc. Japan* に掲載決定.
- [16] H. MORIMOTO, Stochastic Control and Mathematical Modelling in Economics, Cambridge University Press に出版決定.
- [17] N. NADIRASHVILI & S. VLĂDUȚ, Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations, *GAFSA, Geom. Funct. Anal.*, **17** (2007), 1283-1296.

- [18] N. NADIRASHVILI & S. VLĂDUȚ, Singular viscosity solutions to fully non-linear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.*, **89** (2008), 107–113.