幾何学序論 B 演習

古宇田 悠哉

平成 23 年 11 月 9 日配布

5　第二基本形式とガウス曲率・平均曲率

提出用問題　以下の事項を読み，問題 1 ～ 2 を提出せよ．

1. 第二基本形式

パラメータ表示された曲面 $p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し，p, ν の外微分を用いて形式的に

$$\mathrm{II} = -dp \cdot d\nu$$

で表わされる式を**第二基本形式**という．但し，ν は単位法線ベクトルで $\nu = \dfrac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$ で与えられた．第二基本形式は

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= -dp \cdot d\nu = -(p_u du + p_v dv) \cdot (\nu_u du + \nu_v dv) \\ &= (-p_u \cdot \nu_u) du^2 + (-p_u \cdot \nu_v - p_v \cdot \nu_u) du dv + (-p_v \cdot \nu_v) dv^2 \end{aligned}$$

と整理できるので

$$L := -p_u \cdot \nu_u = p_{uu} \cdot \nu, \quad M := -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u = p_{uv} \cdot \nu, \quad N := -p_v \cdot \nu_u = p_{vv} \cdot \nu$$

とおくと，$\mathrm{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$ と表せる．この L, M, N を**第二基本量**とよぶ．($-p_u \cdot \nu_u = p_{uu} \cdot \nu$ などの等式は，$p_u \cdot \nu = 0, p_v \cdot \nu = 0$ の両辺を u, v で偏微分することにより得られる．各自確かめよ．) 対称行列 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ を**第二基本行列**とよぶことにする．第二基本形式を用いると，第二基本形式は $\mathrm{II} = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ とも書ける．

曲面上の点 $p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ における接平面 T から曲面がどの程度離れているかを調べてみる．曲面上の点 $p\begin{pmatrix} u+\Delta u \\ v+\Delta v \end{pmatrix}$ から T へ下ろした垂線の長さを l とおくと

$$\begin{aligned} l &= \left(p\begin{pmatrix} u+\Delta u \\ v+\Delta v \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \cdot \nu\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &\sim p_u\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Delta u + p_v\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Delta v) \cdot \nu(u,v) + \left(\frac{1}{2}(p_{uu}(\Delta u)^2 + 2p_{uv}\Delta u \Delta v + p_{vv}(\Delta v)^2) \right) \\ &= \frac{1}{2}(p_{uu}(\Delta u)^2 + 2p_{uv}\Delta u \Delta v + p_{vv}(\Delta v)^2) \cdot \nu\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u \Delta v + N(\Delta v)^2) \end{aligned}$$

となるので，第二基本形式は $\Delta u, \Delta v$ が 0 に近づいたときのこの式の 2 倍の極限だと思える．

具体的に第二基本量の意味を理解するには次の問題を考えるのが良い．

問題 1　(1) グラフ $z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表される曲面の第二基本量を求めよ．

(2) (1) を用いて楕円放物面

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) S の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ における第二基本量 $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ における 2 次のテイラー展開は

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}x^2 + 2M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}xy + N\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}y^2) + o(x^2 + y^2)$$

と書けることを確かめよ．

2. ガウス曲率と平均曲率

曲面 $p(u, v)$ の第一基本行列，第二基本行列を用いて得られる行列

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}$$

の固有値を λ_1, λ_2 とおくと，これらは正の座標変換で不変であり，かつ実数になることが示せる (黒板発表用問題 9 参照)．λ_1, λ_2 を曲面の**主曲率**とよび，

$$K := \lambda_1 \lambda_2 = \det A = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H := \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}A = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

をそれぞれ，**ガウス曲率**，**平均曲率**とよぶ．$\lambda_1, \lambda_2, K, H$ はぞれぞれ u, v の関数であることに注意せよ．

曲面上のガウス曲率が正となる点を**楕円点**，0 となる点を**放物点**，負となる点を **双曲点**とよぶ．楕円点の近傍では曲面は凸となり，双曲点の近傍では曲面は鞍状になる．

ガウス曲率が至るところで 0 であるとき，その曲面は**平坦**であるといい，平均曲率が至るところで 0 である曲面を**極小曲面**とよぶ．

パラメータ表示 $p(u, v)$ により与えられる曲面 S 上の第一基本量は，p の微分だけから決まり，第一基本量が与えられれば，その曲面の各点の接平面上に内積を定義された．第一基本量さえ与えられれ

ば，$\mathbb{R}^3$ 内に実現されていることを「忘れて」も，$p(u,v)$ の定義域 D 上でその曲面の面積や，曲面上の曲線の長さ，ある点で横断的に交わる曲面上の 2 つの曲線のなす角度などを求めることができ，幾何学を展開することができる．この意味で，第一基本量のみで決まる量を曲面の「内在的 (intrinsic) な量」などとよぶ．一方で，第二基本量の定義には，法線ベクトルが必要であった．これを使って，曲面が各点の近くでどのように $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているのかを，外部の視点からはかっている．第二基本量のような，曲面の外部の情報も必要な量を「外在的 (extrinsic) な量」などとよぶ．

平均曲率は第一基本形式だけからは求めることができない「外在的な量」の代表格であるが，のちに明らかになるように，ガウス曲率 K は実は第一基本形式のみから決まる．すなわち，ガウス曲率は「内在的な量」であることが明らかになる．内在的，外在的という違いは，与えられる情報の性質の違いであり，情報の優劣を表すものではない．

問題 2　標準的トーラス面

$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(R+r\cos u)\cos v\\(R+r\cos u)\sin v\\r\sin u\end{pmatrix};\quad D=\mathbb{R}^2,\ 0<r<R$$

を S とおく．

(1) S の主曲率を求めよ．

(2) S の平均曲率とガウス曲率を求めよ．

黒板発表用問題

1. パラメータ表示
$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\u^3-3uv^2\end{pmatrix};\quad D=\mathbb{R}^2$$
で与えられた曲面の $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ における第一基本形式，単位法ベクトル，第二基本形式を求めよ．

2. グラフ $z=f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で表される曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

3. パラメータ表示
$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos u\\\sin u\\v\end{pmatrix};\quad D=\mathbb{R}^2$$
で与えられた曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

4. パラメータ表示
$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\sin\alpha\cos v\\u\sin\alpha\sin v\\u\cos\alpha\end{pmatrix};\quad D=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mid 0<u,\ 0<v<2\pi\right\},\ 0<\alpha<\pi$$
で与えられた曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

5. 楕円面

$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos u\cos v\\b\cos u\sin v\\c\sin u\end{pmatrix};\quad D=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mid |u|<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant v<2\pi\right\}$$

のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

6. 二葉双曲面

$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\sinh u\cos v\\b\sinh u\sin v\\c\cosh u\end{pmatrix};\quad D=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mid u\in\mathbb{R},\ 0\leqslant v<2\pi\right\}$$

のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

7. (1) 第 4 回の演習問題で説明した意味で，第二基本形式は，正の座標変換のもとで形式的に不変であること示せ．(ヒント：第 4 回の演習問題で扱った，単位法ベクトルの不変性を用いよ．)

(2) xy-平面の領域 $\tilde{D}$ から uv-平面の領域 D への座標変換 $\varphi:\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\left(u\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},v\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ を考え，D 上で定義された曲面のパラメータ表示 $p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ に対して，$\tilde{p}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:=p\left(u\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},v\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ とおき，この曲面の第二基本形式を 2 つのパラメータ変換を用いて

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,\quad \tilde{L}dx^2+2\tilde{M}dxdy+\tilde{N}dy^2$$

と表すとき，

$$\begin{pmatrix}\tilde{L}&\tilde{M}\\\tilde{M}&\tilde{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_x&v_x\\u_y&v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ (これを，第二基本量の座標変換式とよぶ．)

8. $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ とする．曲面 $p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ のガウス曲率，平均曲率をそれぞれ K,H とおくとき，これを用いて曲面 $cp\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ のガウス曲率，平均曲率を求めよ．

9. ガウス曲率，平均曲率は向きを保つ合同変換で不変であることを示せ．さらに，ガウス曲率は一般の合同変換でも不変であることを示せ．

10. 曲面 S ガウス曲率と平均曲率が至る点ですべて 0 であるならば，S の第二基本量はすべて 0 となり，S は平面の一部になることを示せ．

11. メビウスの帯

$$p\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos u\\\sin u\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}\cos\frac{u}{2}\cos u\\\cos\frac{u}{2}\sin u\\\sin\frac{u}{2}\end{pmatrix};\quad D=(u,v)\left\{u\in\mathbb{R}\;\middle|\;|v|<\frac{1}{2}\right\}$$

の平均曲率を，上の定義に従って形式的に求めようとすると，どのような問題点を含んでいるか説明せよ．また，その問題を解決するために，平均曲率の定義にどのような修正を加えればよいか考えよ．

12. xz 平面の曲線 $\begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \end{pmatrix}$ を z 軸の回りに回転させて得られる曲面を S とおく．

(1) ガウス曲率 K が負の定数 $-c^2$ となるような $f(u), g(u)$ を求めよ．(この回転面を**擬球面**といい，その母線を**トラクトリックス**という．)

(2) 平均曲率 H が 0 となるような $f(u), g(u)$ を求めよ．(この回転面を**懸垂面 (カテノイド)** という．)

13. パラメータ表示

$$p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ f(v) \end{pmatrix}; \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

で与えられた曲面を正コノイドとよび，特に，$f(v) = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ のとき，常螺旋面とよぶ.

(1) 正コノイドのガウス曲率，平均曲率を求めよ.

(2) 常螺旋面は極小曲面であることを示せ.

(3) 極小曲面になる正コノイドは常螺旋面に限ることを示せ.

14. エネッパーの極小曲面

$$p\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u + 3uv^2 - u^3 \\ v^3 - 3v - 3u^2v \\ 3(u^2 - v^2) \end{pmatrix}; \quad D = \mathbb{R}^2$$

のガウス曲率 K，平均曲率 H を求め，$H = 0$ であることを確かめよ.

15. (1) 実正方行列が直交行列で対角化されるのはどのような場合であったか述べよ．複素正方行列がユニタリ行列で対角化されるのはどのような場合であったか述べよ.

(2) 実対称行列 S は実固有値を持つことを示せ.

(3) 正定値対称行列 (どの固有値も正であるような実対称行列) にはルートがあること，つまり正定値対称行列 R が存在して $S = R^2$ が成り立つことを示せ（このとき $R = \sqrt{S}$ とかく).

16. G を正定値対称行列， B を実対称行列とするとき，

$$\det(\lambda G - B) = 0$$

は実解を持つことを証明せよ（ヒント：$R = \sqrt{G}$ として，R^{-1} を左右から $\lambda G - B$ にかけよ).