数学クイズ

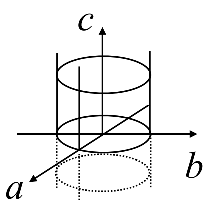
2018 年 8 月 1 日

出題者 : 甲斐亘 (代数学講座)

伊能忠敬像
千葉県香取市　伊能忠敬記念館所蔵

4 「さらなるクイズ」への答え

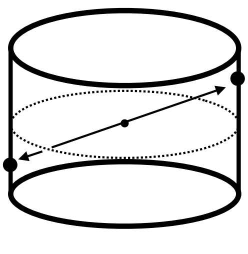
■さらなるクイズ i. 「高校の直線の方程式」$ax + by + c = 0$ から同じ結論を導いてみよう．この場合はすべての直線が視界にとらえられているので，問題はダブりを取り除くこととなる．



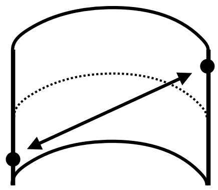
(1) まず，abc-空間内で $a^2 + b^2 = 1$ を満たす点からなる筒を考える．この筒の表面にある (a, b, c) のみを考えることにすると，ダブりはかなり減っている．どのようなダブりが残っているか?

(2) そのダブりを解消すると Möbius の帯が得られる．説明せよ!

i. (1) a, b, c を一斉に -1 倍しても，同じ直線を表し，かつ $a^2 + b^2 = 1$ という条件は保たれる．± 1 以外の定数倍ではこの条件は保たれない．したがって，「同じ直線が 2 度現れてしまう」というダブりのみが残る．



(2) この残ったダブりを解消するには，たとえば $a \geq 0$ である領域 (筒を縦に割った形をしている) に更に制限する方法がある．すると，二つの「切断面」にダブりが残っている以外は，ダブりが無くなる．



これは中間クイズ i. の形をしているので，メビウスの帯とわかる．

ii. (地図の貼り合わせ.) 「大日本沿海輿地全図」のように, 複数枚の小地図で全体を覆うことにより, 全体の形を知るということもできる.

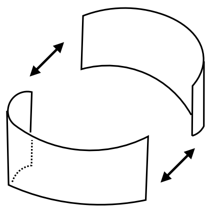
x 軸と y 軸の役割を入れ替えて, $x = \bar{a}y + \bar{b}$ の形で直線を表すことを考える. y 軸に平行な直線は $\bar{a} = 0$ の場合として表すことができる. こうして, 二つのタイプの方程式

$$y = ax + b \qquad \text{or} \qquad x = \bar{a}y + \bar{b}$$

ですべての直線をカバーできる. ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面という 2 枚の小地図で, 直線すべてを載せた地図が覆えるということである. 問題は, 両方の小地図の重なり部分がどうなっているかである.

(1) 上のふたつの方程式が同じ直線を表す場合の, a, b の組と $\bar{a}, \bar{b}$ の組の関係式を計算せよ.

(2) ab-平面内の直線 "$b = 2a$" 上で点が $a \to +\infty$ の方向に動くとき, 対応する点が $\bar{a}\bar{b}$-平面ではどう見えるか考えてみよう. 直線 "$b = 4$" ではどうか? また, a の動く方向が $a \to -\infty$ のときでは?



(3) ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面で対応する点どうしを重ね合わせると, メビウスの帯が得られることを結論してみよう.

ii. (1) $a \neq 0, \bar{a} \neq 0$ の状況で, 後者の方程式を "$y = \cdots$" の形に書き換えると

$$y = \frac{1}{\bar{a}}x - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}.$$

これと前者を見比べることで

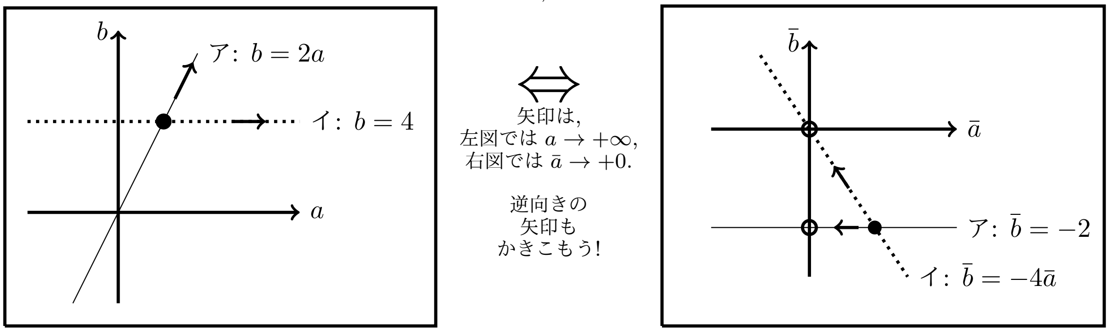
$$a = \frac{1}{\bar{a}}, \quad b = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

を得る. この式から, $a \to +\infty$ と $\bar{a} \to +0$ (正の方向から 0 に近づく) が対応し, $a \to -\infty$ と $\bar{a} \to -0$ (負の方向から 0 に近づく) が対応することもわかるので, 覚えておこう.

(2)
"$b = 2a$" にいまの式を代入すると $-\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{2}{\bar{a}}$ つまり

$$\bar{b} = -2$$

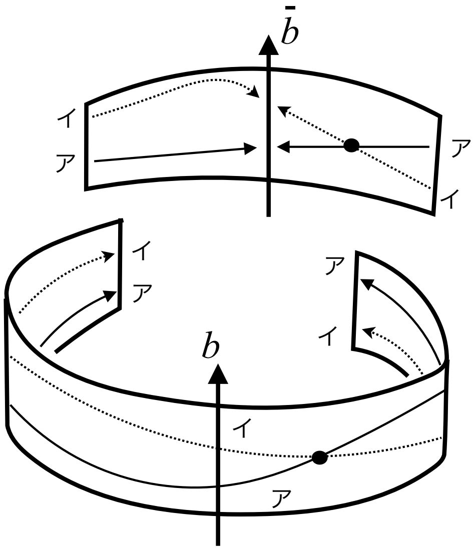
を得る. "$b = 4$" からは "$\bar{b} = -4\bar{a}$" を得る. なので, ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面を対照させた図は下のようになる.



図中の 2 直線の交点 $(a, b) = (2, 4)$ と $(\bar{a}, \bar{b}) = (1/2, -2)$ はこの座標変換で互いに対応するので, 貼り合わせの際に同一の点となることを覚えておこう.

(3)

上の図を, ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面を向かい合わせにして, 模式的に描くと下のようになる. ab-平面の a の値が大きい領域では, 上下をつぶして描いている ($\bar{a}\bar{b}$-平面も同様). ゴム膜のように, 伸び縮みを許す枠組みで考えていたことを思い出そう! また, 直線ア・イの交点が両平面に現れているが, これは貼り合わせ後は同一の点となる予定なのであった.



直線ア・イの上下の位置関係をもとに考えると, 図の左側では ab-平面と $\bar{a}\bar{b}$-平面は同じ向きで貼り合わせるべきだが, 右側では上下を反転させて貼り合わせるべきことがわかる (交点とくらべて $\bar{b}$ 軸寄りの部分に注目しよう).

その結果得られるものは**メビウスの帯**である.

※詳しい人への釈明.

中間クイズ i. のメビウスの帯と, Today's big question の答えであるメビウスの帯とでは, 境界 (上下の端) を含めるか否かの差異があるようにも思われる (中間クイズではそもそも端の取り扱いを明確にしていないが). 本稿ではこの点は敢えて無視した. そのことで混乱してしまったという読者の方にはお詫び申し上げたい.