

境界付き曲面上の弧のなす空間について  
(A Space of Arcs on Surfaces with Boundary)

本多 正知

## 目次

1	序文	3
2	曲面上の閉曲線に関する Thurston の結果	4
3	境界付き曲面上でのアナロジー	14
4	3つ穴あき球面上の弧	21
5	今後の課題	29

# 1 序文

Thurston は論文 [Th] において, 曲面上の閉曲線の集合の閉包としてある空間を構成した. 閉包をとるときに加わる元は lamination に対応し, Teichmüller 空間のコンパクト化や曲面の自己同相写像の分類において重要な役割をはたす (詳細は [CB][FLP] を参照). 本論文では, 曲線の条件を変えて Thurston の場合とは異なる空間を構成する.

Thurston が考えた曲線の空間は次のようにして構成される. 曲面上の本質的な単純閉曲線の集合を  $S$  とする. 本質的とは零ホモトピックでない, かつ, 境界成分とホモトピックにならないことをいう. 2つの閉曲線をイソトピーで動かしたときの最小交差数を  $i$  と定義し, 交点数と呼ぶ. 次に, 以下の写像により,  $S$  を無限次元空間に埋め込む:

$$S \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^S - \{0\} \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}^S).$$

ここで  $i_*$  は,  $i_*(c)(\cdot) := i(c, \cdot)$  で定義される.  $\mathbb{R}^S$  は  $S$  上の関数全体の集合であり, 直積位相を入れる.  $P(\mathbb{R}^S)$  は  $\mathbb{R}^S - \{0\}$  を射影化した空間であり,  $\pi$  は射影化である.  $P(\mathbb{R}^S)$  には商位相を入れる.  $S$  は単なる集合だったが,  $\pi \circ i_*$  により  $P(\mathbb{R}^S)$  に埋め込むことで閉包をとることができる. これを  $\bar{S}$  と表す.  $\bar{S}$  を具体的に求めたのが次の定理である:

定理 1.1 (W.Thurston [Th]).  $M_{g,b}$  を種数  $g$  の曲面から  $b$  個の開円板を取り除いた曲面とする.

- $M_{0,0}, M_{0,1}, M_{0,2}, M_{0,3}$ , すなわち, 球面, 円板, アニュラス, 3つ穴あき球面の場合,  $\bar{S} = \phi$ .
- $M_{1,0}$ , すなわち, トーラスの場合,  $\bar{S} = S^1$ .
- その他のオイラー標数が負である曲面  $M_{g,b}$  の場合,  $\bar{S} = S^{6g+2b-7}$ .

閉包をとったときに加わる元は, 曲面上で無限に巻きついている lamination に対応する.

Thurston の構成では閉曲線のみを考えているため境界の詳細な情報は失われる. 例えば, 境界の各点を固定する自己同相写像などを考えることはできない. そこで, 曲面の境界に固定点を選び, そこを端点とする弧を考え Thurston と同様の方法で空間を構成する.

$x_1, x_2$  を曲面の境界上の固定点とする. このとき, 固定点  $x_1, x_2$  は同じ境界成分上にあってもよいし, 一致していても構わない.  $x_1, x_2$  を両端と

する曲面上の弧の集合を  $\mathcal{T}$  とする． $\mathcal{T}$  の 2 つの弧に対し交点数  $i$  を定義し，Thurston の場合と同様に  $\mathcal{T}$  を次の図式で埋め込む：

$$\mathcal{T} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^T - \{0\} \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}^T).$$

$\pi \circ i_*(\mathcal{T})$  の閉包が  $\overline{\mathcal{T}}$  である．

この  $\overline{\mathcal{T}}$  を円板を 3 つ取り除いた球面について求めたのが次の主結果である．

定理 1.2. 3 つ穴あき球面において，固定点  $x_1$  と  $x_2$  は一致しているとする．このとき， $\overline{\mathcal{T}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  である．ただし， $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  には  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$  の 1 点コンパクト化  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  からの相対位相が入っているものとする．

$\mathbb{R}^T - \{0\}$  と  $P(\mathbb{R}^T)$  は無限次元空間なので，これらの空間の中で直接  $\overline{\mathcal{T}}$  を求めることは難しい．したがって，適切な有限次元空間に射影して求めることになる．今回の場合は 2 次元部分空間に射影して求める．

閉包をとるときに加わる元は  $\infty \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  である．これは 28 ページの図 26 のような曲面の境界に無限に巻きつく lamination に対応している．ちなみに，この曲線は Thurston の  $\mathcal{S}$  には存在しない．なぜなら， $M_{0,3}$  上の閉曲線は全て本質的ではなく， $\mathcal{S}$  が空集合になるからである．

第 2 章では Thurston の構成した曲線のなす空間の詳細を説明する．第 3 章では曲面の弧についても，同様の空間が構成できることを示す．第 4 章では 3 つ穴あき球面上の弧のなす空間を求める．第 5 章では今後の課題について述べる．

本論文を書くにあたり，非常に重要な意見を頂きました東京工業大学の小島定吉教授に感謝致します．同じく，東京工業大学の高沢光彦氏からも貴重な意見を頂きました．ここに感謝の意を表します．最後になりましたが，多くの助言と丁寧な指導をして下さった石川昌治先生に深く感謝致します．

## 2 曲面上の閉曲線に関する Thurston の結果

この章では Thurston の論文 [Th] の紹介をする．その論文では，曲面上の閉曲線全体の集合を考え，それをある空間に埋め込んだ場合どのような形をしているかについて述べている．

種数  $g$  の曲面から開円板  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  と同相な部分集合を  $b$  個取り除いた曲面を  $M = M_{g,b}$  とする．

定義 2.1. 曲面  $M$  上の閉曲線で、零ホモトピックでなく、かつ、境界の連結成分とホモトピックでないものを本質的という。

$M_{0,0}$ ,  $M_{0,1}$ ,  $M_{0,2}$ ,  $M_{0,3}$  はそれぞれ、球面、円板、アニュラス、3つ穴あき球面である。これらの場合は本質的閉曲線が存在しないので、以後、議論の対象にしない。 $M_{1,0}$  はトーラスであり、その普遍被覆空間は2次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  である。 $M_{1,0}$  には曲率0のリーマン計量が入っているものとする。また、それ以外の場合はオイラー標数  $\chi(M_{g,b}) = 2 - 2g - b$  が負であり、その普遍被覆空間はポアンカレ円板  $\mathbb{H}^2$  である。この場合  $M_{g,b}$  には曲率  $-1$  で境界が測地線になるようなリーマン計量が入っているものとする。

補題 2.2 ([CB] lemma 2.3). 本質的閉曲線はホモトピーで測地線にできる。また、 $\chi(M) < 0$  の場合は、測地線が一意的に定まる。

証明. トーラスの場合は、普遍被覆空間である  $\mathbb{R}^2$  上に曲線を持ち上げて、ホモトピーで測地線にすればよい。

$\chi(M) < 0$  の場合、 $c$  を  $M$  上の本質的閉曲線とする。 $M$  の普遍被覆写像  $\mathbb{H}^2 \rightarrow M$  を考える。 $c$  上の任意の点を  $x$  とし、 $x$  の  $\mathbb{H}^2$  上への持ち上げの1つを  $\tilde{x}$  とする。 $\tilde{x}$  を含む  $c$  の持ち上げを  $\tilde{c}$  とする。今、 $\tilde{c}$  の部分区間  $[\tilde{x}, g\tilde{x}]$  で、丁度、 $c$  を1周するものが存在する。ここで、 $g \in \Gamma$  は被覆変換群の元である。このとき、 $\mathbb{H}^2$  の境界と2点で交わる  $g$  で不変な測地線  $\tilde{\gamma}$  が存在する。特に、 $\tilde{\gamma}$  の  $M$  への像は閉測地線である。次に、 $\tilde{\gamma}$  上の任意の点を  $\tilde{y}$  とし、 $\tilde{y}$  と  $\tilde{x}$  を結ぶ任意の弧を  $\tilde{U}$  とする。また、 $\tilde{U}$  を  $g$  で動かしたものを  $g\tilde{U}$  とする。 $g\tilde{U}$  は  $g\tilde{y}$  と  $g\tilde{x}$  を結んでいる。ここで、次のような経路を考える:  $\tilde{y}$  から出発し、 $\tilde{U}$  を通って  $\tilde{x}$  に行き、 $\tilde{c}$  を通って  $g\tilde{x}$  に行き、 $g\tilde{U}$  を通って  $g\tilde{y}$  に行き、 $\tilde{\gamma}$  を通って  $\tilde{y}$  に戻る (図 1)。この「四角形」が  $M$  上で  $c$  を  $\gamma$  に移すホモトピーを与える。

一意性については、 $\mathbb{H}^2$  上で  $\tilde{c}$  と  $\tilde{\gamma}$  の端点が一致することから自明。□

定義 2.3 ([CB]). 2つの本質的単純閉曲線<sup>1</sup>  $c_1$  と  $c_2$  が次の条件を満たす部分弧<sup>2</sup>  $C_1, C_2$  を持たないとき、 $c_1$  と  $c_2$  は最小交差 (minimal intersection) をもつという:

- (1)  $C_1, C_2$  は端点を共有する。
- (2)  $C_1 \cup C_2$  は円板と同相な  $M$  上の集合の境界になっている。

<sup>1</sup>曲線が単純であるとは、自己交差を持たないことである。

<sup>2</sup>部分弧とは曲線の1つの「区間」のことである。

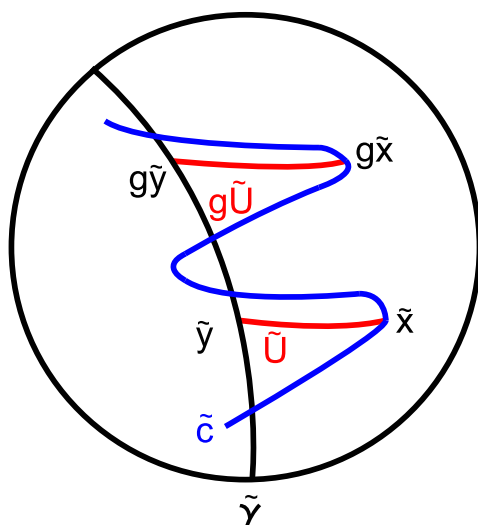


図 1: 「四角形」

補題 2.4 ([CB] lemma 2.5).  $c_1, c_2$  を  $M$  上の 2 つの本質的単純閉曲線とする.  $c_2$  をイソトピーで変形して,  $c_1$  と最小交差を持つようにすることができる.

証明. (この証明は  $M$  がトーラスの場合と  $\chi(M) < 0$  の場合, 両方に共通である.) もし  $c_1$  と  $c_2$  が最小交差を持つならば,  $c_2$  自身が既に求める曲線である.  $c_1, c_2$  が最小交差を持たないと仮定する. そのとき, “innermost” な円板が存在する. すなわち,  $c_1, c_2$  それぞれの部分弧で次を満たす  $C_1, C_2$  が存在する:

- $C_1, C_2$  は定義 2.3 の条件 (1),(2) を満たす.
- $C_1, C_2$  によってできる開円板は  $c_1, c_2$  と交わらない.

その場合, 図 2 のようにして円板を解消する. そうしてできた曲線を改めて  $c_2$  において証明をやり直す. 以上の操作を繰り返すことで,  $c_2$  とイソトピックで, かつ,  $c_1$  と最小交差を持つような曲線を得ることができる.  $\square$

補題 2.5 ([CB] lemma 2.4).  $M$  上の本質的単純閉曲線はイソトピーで変形して測地線にできる. また,  $\chi(M) < 0$  のとき, この測地線は一意的に定まる.

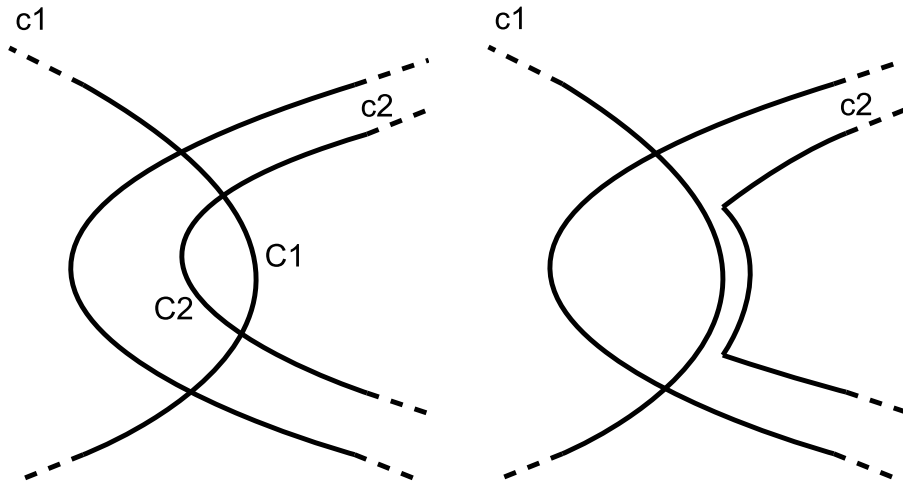


図 2: 円板の解消

証明.  $M$  がトーラスの場合は, 本質的単純閉曲線を普遍被覆  $\mathbb{R}^2$  に持ち上げてイソトピーで変形すればよい.

$\chi(M) < 0$  の場合,  $M$  上の任意の本質的単純閉曲線を  $c$  とする. 補題 2.2 から  $c$  とホモトピックな測地線  $g$  が一意的存在する. 補題 2.4 により, イソトピーで  $c$  を変形して  $g$  と最小交差を持つようにできる.  $c$  を変形したものを, 改めて  $c$  とする.

$c$  と  $g$  が交点  $x$  を持つと仮定する.  $x$  の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げの 1 つを  $\tilde{x}$  とする.  $\tilde{x}$  を通る  $c, g$  の持ち上げをそれぞれ  $\tilde{c}, \tilde{g}$  とする.  $c$  と  $g$  は最小交差を持つので,  $\tilde{c}, \tilde{g}$  の端点は交互に  $\mathbb{H}^2$  の円周上に並ぶ. 今,  $\tilde{g}$  に対応する  $c$  の持ち上げ  $\tilde{c}'$  が存在する.  $\tilde{c}$  と  $\tilde{c}'$  は交わるが, これは  $c$  が単純であることに反する. したがって,  $c$  と  $g$  は交点を持たない. これは,  $c$  と  $g$  がイソトピックであることを表す.  $\square$

補題 2.6 ([CB] lemma 2.6).  $c_1, c_2$  を  $M$  上の 2 つの本質的単純閉曲線とする. もし,  $c_1, c_2$  が横断的 (transverse) に交わり, かつ,  $c_1$  と  $c_2$  がイソトピックでないならば, 次の 2 つは同値:

- (1)  $c_1$  と  $c_2$  は最小交差を持つ.
- (2) 恒等写像とイソトピックな写像  $h: M \rightarrow M$  で,  $h(c_1), h(c_2)$  が測地線になるものが存在する.

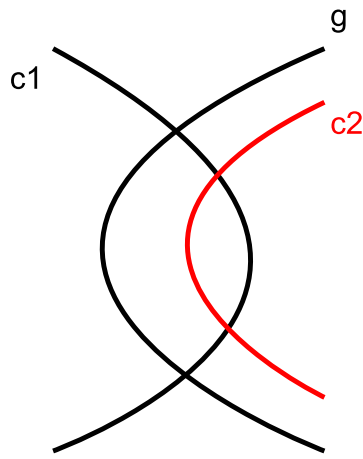


図 3:  $c_1$  から入り  $c_1$  から出る

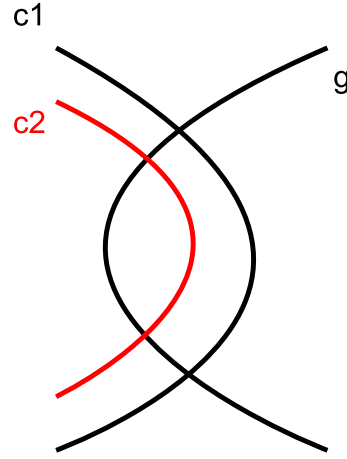


図 4:  $g$  から入り  $g$  から出る

証明. (2) を満たす  $h$  が存在すると仮定する. このとき,  $h(c_1), h(c_2)$  は測地線であるが, これらは既に, 最小交差を持っている. なぜならば, もし最小交差を持っていないとすれば, 定義 2.3 の (1), (2) を満たすような部分が存在する. これは,  $h(c_1), h(c_2)$  を普遍被覆 ( $\mathbb{R}^2$  または  $\mathbb{H}^2$ ) 上に持ち上げて考えたときに, 測地線が普遍被覆上で 2 回以上交わることを表し, 矛盾する. よって,  $h(c_1), h(c_2)$  は最小交差を持つ.

$c_1, c_2$  が最小交差を持つとする. 補題 2.5 から  $c_2$  は測地線であると仮定してよい. また, 同じく補題 2.5 から,  $c_1$  をイソトピーで測地線  $g$  に変形することができる. この  $c_1$  を  $g$  に変形する操作が  $c_2$  との最小交差性を保つことを確認すればよい.

$c_1$  と  $g$  が交わっている場合,  $c_1$  と  $g$  がつくる円板と  $c_2$  がどのように交わるかを見ればよい. まず, 図 3 のように,  $c_2$  が  $c_1$  側から入って  $c_1$  側から出ることはあり得ない. なぜならば  $c_1$  と  $c_2$  は最小交差を持つと仮定したからである. 次に, 図 4 のように,  $c_2$  が  $g$  側から入って  $g$  側から出ることもあり得ない. なぜならば  $c_2$  と  $g$  は共に測地線であるからである. すると, あり得る交わり方は図 5 のように,  $c_2$  が  $c_1$  側から入って  $g$  側から出る場合に限られる. この場合,  $c_1$  から  $g$  への変形が  $c_2$  との最小交差性を保つことは明らかである.

$c_1$  と  $g$  が交わらない場合も,  $c_1$  と  $g$  を境界とするアニュラスで同様の

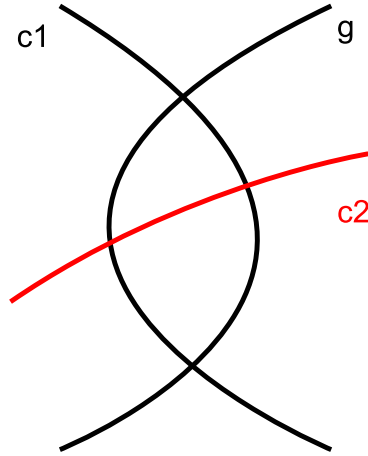


図 5:  $c_1$  から入り  $g$  から出る

議論ができる。

□

定義 2.7.  $|c_1 \cap c_2|$  を  $c_1$  と  $c_2$  の交点の数とする。さらに、

$$i(c_1, c_2) := \min_{c_1 \sim c'_1, c_2 \sim c'_2} |c'_1 \cap c'_2|$$

とする。ここで  $\sim$  はイソトピックであることを表す。これを  $c_1$  と  $c_2$  の交点数 (intersection number) と呼ぶ。

命題 2.8 ([CB][H]). 交点の数が最小であることと、最小交差を持つことは同値。すなわち、次の 2 つは同値:

- (1)  $|c_1 \cap c_2| = i(c_1, c_2)$ .
- (2)  $c_1, c_2$  は最小交差を持つ。

証明. (1) を仮定する。(2) が成り立たないと仮定すると、 $c_1$  と  $c_2$  のどこかに定義 2.3 の条件 (1),(2) を満たす部分が存在する。補題 2.4 から、 $c_2$  とイソトピックで、 $c_1$  と最小交差を持つような  $c'_2$  が存在する。(1) を仮定したので  $|c_1 \cap c_2| = i(c_1, c_2)$  である。しかし、 $|c_1 \cap c'_2| < |c_1 \cap c_2|$  である。これは  $i$  の最小性に反する。よって、(1) を仮定すると (2) が成立する。

逆に (2) を仮定する。このとき、補題 2.6 から  $c_1, c_2$  は測地線と仮定してよい。 $\chi(M) < 0$  の場合、 $c_1$  と  $c_2$  の交点を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とする。 $c_1$  の

$\mathbb{H}^2$  への持ち上げの 1 つを固定し  $\tilde{c}_1$  とする.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の持ち上げで,  $\tilde{c}_1$  上にあるものを  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  とする. 各  $\tilde{x}_i$  について,  $\tilde{x}_i$  を通る  $c_2$  の持ち上げを  $\tilde{c}_2$  とすると,  $c_1, c_2$  をイソトピーで動かしても,  $\tilde{c}_1$  と  $\tilde{c}_2$  の  $\mathbb{H}^2$  での端点は動かない. すなわち,  $c_1, c_2$  の交点  $x_i$  が解消されることはない. これは各  $x_i$  で成り立つので,  $c_1, c_2$  の交点数はこれ以上減ることはない. よって,  $|c_1 \cap c_2| = i(c_1, c_2)$ .

トーラスの場合も同様の議論ができる. □

**定義 2.9.**  $M$  上の本質的単純閉曲線全体の集合をイソトピーで割った集合を  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$  と表す.

**命題 2.10** ([Th]).

- (1) 任意の  $[c_1] \in \mathcal{S}$  に対して,  $i(c_1, c_2) \neq 0$  となる  $[c_2] \in \mathcal{S}$  が存在する.
- (2) 異なる  $[c_1], [c_2] \in \mathcal{S}$  に対して  $i(c_1, c_3) \neq i(c_2, c_3)$  となる  $[c_3] \in \mathcal{S}$  が存在する.

**証明** ([FLP]).  $[c_1] \neq [c_2] \in \mathcal{S}$  に対して,  $0 = i(c_1, b) \neq i(c_2, b)$  となる  $[b] \in \mathcal{S}$  が存在することを言えば十分.

$M$  がトーラスの場合は,  $[c_1] \neq [c_2]$  ならば  $i(c_1, c_2) \neq 0$  である. したがって,  $[b] = [c_1]$  とおけばよい.

$\chi(M) < 0$  の場合,  $[c_1] \neq [c_2]$  と仮定する. もし  $i(c_1, c_2) \neq 0$  ならば,  $[b] = [c_1]$  とおけばよい.  $i(c_1, c_2) = 0$  と仮定する.  $c'_1 \in [c_1]$  の十分に小さい近傍を  $M$  から取り除いた曲面で,  $c'_2 \in [c_2]$  を含む連結成分を  $N$  とする. 今  $[c_1] \neq [c_2]$  かつ  $i(c_1, c_2) = 0$  から,  $c'_2$  は  $N$  上の本質的閉曲線である.

$c'_2$  が  $N$  を 2 つの部分に分けない場合について考える. この場合,  $c'_2$  で  $N$  を切ると図 6 のようになる. それを再び貼り合わせると図 7 のようになる. このとき, 図のように  $b$  をとることができる. すると,  $(c'_2, b) = 1$  かつ  $(c'_1, b) = 0$ .

$c'_2$  が  $N$  を 2 つの部分に分ける場合について考える (参考: 図 8). 分けられた部分それぞれにおいて,  $c'_2$  によってできた境界から出発して, 再びその境界に戻ってくるような「非自明<sup>3</sup>」な弧が存在する. 2 つの弧を合わせてできる閉曲線を  $b$  とすれば,  $(c'_2, b) = 2$  かつ  $(c'_1, b) = 0$ . □

交点数  $i$  は 2 つの単純閉曲線に対して定義されたが, 実際はそのイソトピー類に対して定義されている. すなわち,  $\mathcal{S}$  の記号を使うと, 交点数  $i$

<sup>3</sup>後に出てくる端点を固定するホモトピーという言葉を使うなら「境界上の弧と端点を固定してホモトピックでない」という意味である.

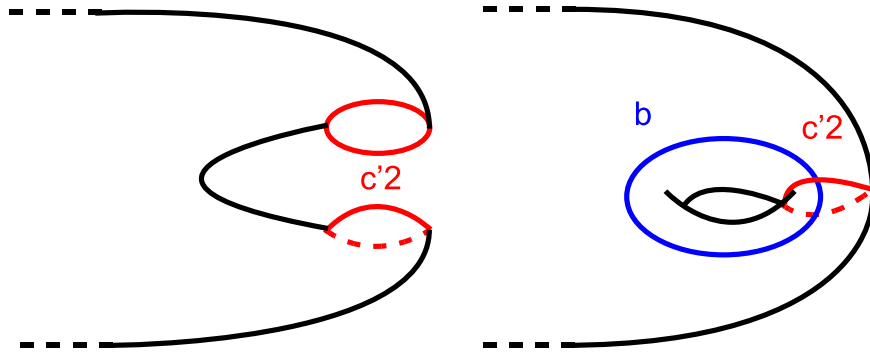


図 6:  $N$  を  $c_2$  に沿って切り開く      図 7:  $c_2$  を再び貼り合わせる

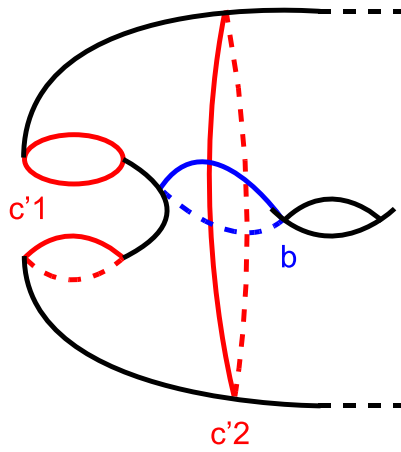


図 8:  $c_2$  が  $N$  を二分する場合

は

$$i : S \times S \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

という形の関数とみなすことができる．以後，イソトピー類を表す記号  $[c]$  と，その元である  $c$  は混同して使う．

定義 2.11.

$$i_* : S \longrightarrow \mathbb{R}^S$$

を  $i_*(c)(\cdot) := i(c, \cdot)$  で定義する．ここで， $\mathbb{R}^S$  は  $S$  上の関数全体の集合を表す． $\mathbb{R}^S$  には直積位相を入れる．

注 2.12.

$$f_c(c') := \begin{cases} 1 & \text{if } c = c', \\ 0 & \text{if } c \neq c' \end{cases}$$

という関数を使えば，これの線形結合  $f = \sum_{c \in S} \lambda_c f_c$  で  $\mathbb{R}^S$  の元は表現できる．例えば， $c' \in S$  に対応する  $\mathbb{R}^S$  の関数  $i_*(c')$  は

$$i_*(c') = \sum_{c \in S} i(c', c) f_c$$

と表現される．

注 2.13.  $f = \sum_{c \in S} \lambda_c f_c$  に対して， $pr_{c'} : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$  を  $pr_{c'}(f) := \lambda_{c'}$  で定義する．直積位相はこれを使って定義される．すなわち， $\mathbb{R}^S$  の位相は，

$$\bigcap_{j=1}^n pr_{c_j}^{-1}(O_{c_j}) \quad (O_{c_j} \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合})$$

の形の集合全体を基底とする位相である．

命題 2.10 の主張を  $i_*$  を使って書き直すと以下のようなになる．

命題 2.14 ([Th]).

- (1)  $0 \notin i_*(S)$ .
- (2)  $i_*$  は単射．

ここで， $0$  は全ての元に対して値  $0$  を返す定値写像を表す．

定義 2.15.  $f, f' \in \mathbb{R}^S - \{0\}$  に対して,  $f = cf'$  となる実数  $c \neq 0$  が存在するとき,  $f \sim f'$  と定義する.  $\sim$  は同値関係. また,  $P(\mathbb{R}^S) := \mathbb{R}^S - \{0\} / \sim$  とし,  $\pi: \mathbb{R}^S - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^S)$  を同値類への写像とする.  $P(\mathbb{R}^S)$  には商位相を入れる.

今, 命題 2.14 から, 以下のような図式を考えることができる:

$$\mathcal{S} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^S - \{0\} \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}^S).$$

定義 2.16.  $\pi(i_*(\mathcal{S})) \subset P(\mathbb{R}^S)$  の閉包  $\overline{\pi(i_*(\mathcal{S}))}$  を  $\overline{\mathcal{S}}$  で表す.

定理 2.17 (W.Thurston [Th]).

- $M = M_{0,0}, M_{0,1}, M_{0,2}, M_{0,3}$ , すなわち, 球面, 円板, アニュラス, 3つ穴あき球面の場合,  $\overline{\mathcal{S}} = \phi$ .
- $M = M_{1,0}$ , すなわち, トーラスの場合,  $\overline{\mathcal{S}} = S^1$ .
- その他の  $\chi(M_{g,b}) < 0$  である曲面の場合,  $\overline{\mathcal{S}} = S^{6g+2b-7}$ .

例 2.18. トーラス上の曲線は  $pc_1 + qc_2$  で分類される. ただし,  $-pc_1 - qc_2 = pc_1 + qc_2$ . ここで  $c_1, c_2$  は図 9 にあるように, メリディアンとロンジチュードである.  $p \geq 0$  と仮定してよい.  $q \geq 0$  の場合,  $(i_*(c_1), i_*(c_2))$ -平面において, 各単純閉曲線は格子点に対応する (図 10). 例えば,  $c_1$  は  $(0, 1)$ ,  $c_2$  は  $(1, 0)$  に対応する. 一般に,

$$i_*(c_1)(pc_1 + qc_2) = q, \quad i_*(c_2)(pc_1 + qc_2) = p$$

である. ただし, 全ての格子点が単純閉曲線に対応するわけではなく, 格子点を通る半直線を原点から引いたときに, 最初に当たる格子点のみが対応する.

これらの格子点を, 原点を中心とする単位円上に射影すると, 傾きが有理数の円上の点に対応する. 閉包をとると, 傾きが無理数の点が補われて, 四分円全体になる. これがトーラスの  $\overline{\mathcal{S}}$  の半分である.

$q \leq 0$  の場合も同様のことをすると, 単純閉曲線は  $(i_*(c_1), i_*(c_2))$ -平面で,  $q \geq 0$  の場合と全く同じ格子点に対応する. しかし, 第 3 の座標の値が異なる. 例えば,  $c_3$  を図 9 のようにとると,  $i_*(c_3)(pc_1 + qc_2) = |p - q|$  である. この値が一致するのは  $(0, 1)$  と  $(1, 0)$  の場合である. この点に対応する四分円上の点は端点であり, これらを同一視することで,  $\overline{\mathcal{S}} = S^1$  であることが分かる.

注 2.19. 閉包をとるときに補われる傾き無理数の点は, トーラス上では, 無限に巻きつく, 傾き無理数の lamination に対応している.

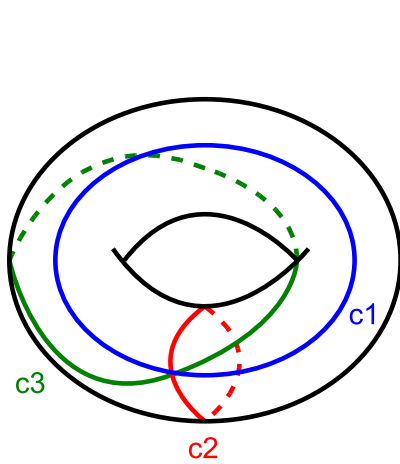


図 9: トーラス

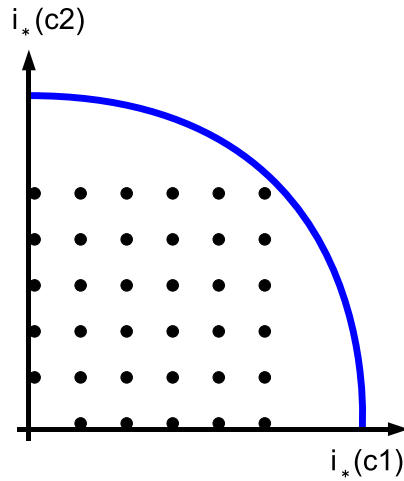


図 10: 格子点とその射影

### 3 境界付き曲面上でのアナロジー

この章では、曲面の境界に両端点を持つような弧を考え、それらに対して前章と同様のことができることを述べる。

以下では、 $M_{g,b}$  は  $b \geq 1$  とする。  $M$  上の弧とは  $a : [0, 1] \rightarrow M$  で  $a(0), a(1) \in \partial M$  となる連続写像の像である。  $a(0), a(1)$  は同じ境界成分上にあってもよい。 また、  $a(0) = a(1)$  でもよい。

**定義 3.1.** 境界付き曲面上の弧を変形するホモトピーが端点を動かさないとき、そのホモトピーは端点を固定するホモトピーであるという。すなわち、ホモトピー  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  が  $0, 1 \in [0, 1]$  (弧の変数) と任意の  $t, t' \in [0, 1]$  (ホモトピーの変形の変数) に対して  $H(0, t) = H(0, t')$ ,  $H(1, t) = H(1, t')$  を満たすとき  $H$  は端点を固定するホモトピーという。

境界付き曲面上の2つの弧  $a_1, a_2$  に対して、  $a_1(0) = a_2(0)$ ,  $a_1(1) = a_2(1)$  となる適当な変数を与えて写像とみなしたとき、  $H(\cdot, 0) = a_1$ ,  $H(\cdot, 1) = a_2$  を満たすような端点を固定するホモトピーが存在するならば、  $a_1$  と  $a_2$  は端点を固定してホモトピックであるという。

**注 3.2.** ホモトピー型は上記のパラメータ付けに依存しない。以後、弧の端点を表すために  $a(0), a(1)$  という表記を使用することもある。

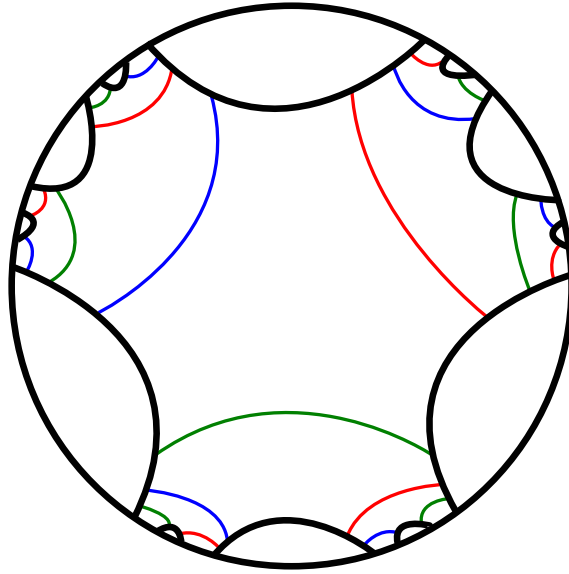


図 11: ポアンカレ円板の部分空間

定義 3.3. 境界付き曲面上の弧が境界上の弧とホモトピックでないとき、本質的であるという。

以下では、円板  $M_{0,1}$  とアニュラス  $M_{0,2}$  は議論の対象としない。すなわち、以下で議論するのは  $\chi(M_{g,b}) < 0$  の場合であり、その普遍被覆はポアンカレ円板上の境界付き部分空間である (参考: 図 11)。

補題 3.4. 全ての本質的弧は境界を固定したホモトピーで測地線にできる。また、この測地線は一意的に定まる。

証明.  $a : [0, 1] \rightarrow M$  を  $M$  上の本質的弧とする。  $\tilde{M} \subset \mathbb{H}^2$  を  $M$  の普遍被覆とする。今  $a(0)$  は  $\partial M$  上にあるので、 $a(0)$  の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げも  $\tilde{M}$  の境界上にある。その点を  $\tilde{a}(0)$  とする。弧  $a$  の持ち上げで  $\tilde{a}(0)$  を始点とするものを  $\tilde{a}$  とする。  $M$  上の弧  $a$  の終点もまた  $M$  の境界にあるので、 $\tilde{a}$  の終点も境界上にある。それを  $\tilde{a}(1)$  とする。この  $\tilde{a}(0)$  と  $\tilde{a}(1)$  に対して、これらをつなぐ測地線  $g$  が存在する。 $\tilde{a}$  と  $g$  によって作られる「二角形」を  $M$  に写したものが補題のホモトピーを与える。  $\square$

定義 3.5. 2つの本質的単純弧  $a_1$  と  $a_2$  が次の条件を満たす部分弧  $A_1, A_2$  を持たないとき、 $a_1$  と  $a_2$  は最小交差 (minimal intersection) をもつという:

- (1)  $A_1, A_2$  は端点を共有する。

(2)  $A_1 \cup A_2$  は円板と同相な  $M$  上の集合の境界になっている。

ただし,  $A_1, A_2$  の端点が  $M$  の境界上にある場合も含む。

注 3.6. 本質的単純弧は自分自身と最小交差を持っている。

定義 3.7.  $H$  を端点を固定するホモトピーとする。任意の  $t, t' \in [0, 1]$  に対して,  $H([0, 1], t)$  と  $H([0, 1], t')$  が同相のとき,  $H$  は端点を固定するイソトピーであるという。

また, 境界付き曲面上の2つの弧  $a_1, a_2$  に対して,  $a_1(0) = a_2(0), a_1(1) = a_2(1)$  となる適当な変数を与えて写像とみなしたとき,  $H(0, \cdot) = a_1, H(1, \cdot) = a_2$  を満たすような端点を固定するイソトピーが存在するならば,  $a_1$  と  $a_2$  は端点を固定してイソトピックであるという。端点を固定するイソトピーは  $M$  上の弧の同値関係を与える。

補題 3.8.  $a_1, a_2$  を  $M$  上の端点を共有する2つの本質的単純弧とする。 $a_2$  を端点を固定するイソトピックで変形して,  $a_1$  と最小交差を持つようにすることができる。

証明. もし,  $a_1$  と  $a_2$  が最小交差を持つならば,  $a_2$  自身が既に求める弧である。 $a_1, a_2$  が最小交差を持たないとする。そのとき, “innermost” な円板が存在する。すなわち,  $a_1, a_2$  それぞれの部分弧  $A_1, A_2$  で次を満たすものが存在する:

- $A_1, A_2$  は定義 3.5 の条件 (1), (2) を満たす。
- $A_1, A_2$  によってできる開円板は  $a_1, a_2$  と交わらない。

このとき, 以下の3種類の場合がある:

Case-1  $A_1$  の端点両方が境界上にある場合 (図 12)。この場合  $a_1 = A_1, a_2 = A_2$  であり,  $a_2$  は  $a_1$  とイソトピックである。すなわち,  $a_1$  が求める弧である。

Case-2  $A_1$  の端点の片方が境界上にある場合, 図 13 のようにして  $a_2$  をイソトピックで変形し円板を解消する。そうしてできた弧を改めて  $a_2$  とおいて証明をやり直す。

Case-3 その他の場合, 図 14 のようにして円板を解消する。そうしてできた弧を改めて  $a_2$  とおいて証明をやり直す。

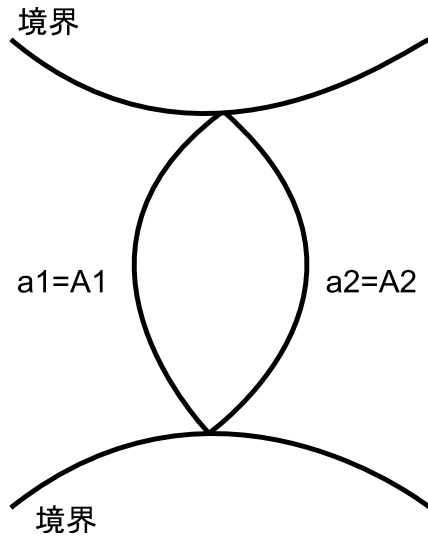


図 12: 両端が境界上にある場合

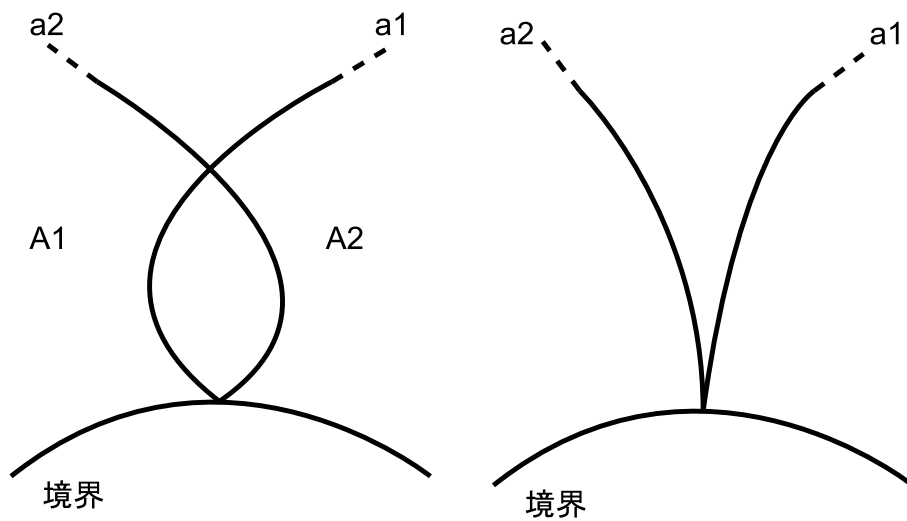


図 13: 片方が境界にある場合

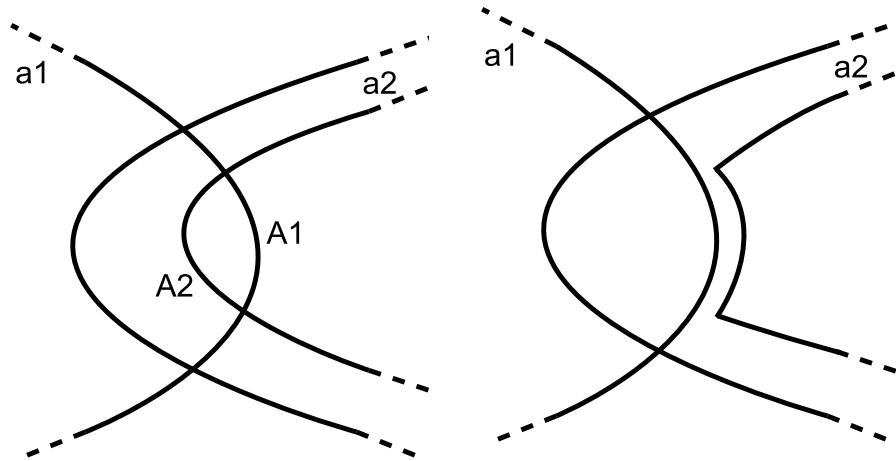


図 14: その他の場合

以上の操作を繰り返すことで、 $a_2$  と端点を固定してイソトピックで、かつ、 $a_1$  と最小交差を持つような弧を得ることができる。□

補題 3.9.  $M$  上の本質的単純弧は端点を固定したイソトピーで変形して測地線にできる。また、この測地線は一意的に定まる。

証明.  $M$  上の任意の本質的単純弧を  $a$  とする。補題 3.4 から  $a$  とホモトピックな測地線  $g$  が一意に存在する。補題 3.8 により、端点を固定したイソトピーで  $a$  を変形して  $g$  と最小交差を持つようにできる。 $a$  と  $g$  はホモトピックなので、 $a$  と  $g$  の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げで、両端を共有するものが存在する。それらを  $\tilde{a}, \tilde{g}$  とする。 $\tilde{a} \neq \tilde{g}$  のときは、 $\tilde{a}$  と  $\tilde{g}$  は最小交差を持たない。すると、 $a$  と  $g$  も最小交差を持たないことになり、矛盾する。□

補題 3.10.  $a_1, a_2$  を  $M$  上の端点を共有する 2 つの本質的単純弧とする。もし  $a_1, a_2$  が横断的に交わり、かつ、 $a_1$  と  $a_2$  がイソトピーでないならば、次の 2 つは同値:

- (1)  $a_1, a_2$  は最小交差を持つ。
- (2) 恒等写像とイソトピックな写像  $h : M \rightarrow M$  で、 $h(a_1), h(a_2)$  が測地線になるものが存在する。

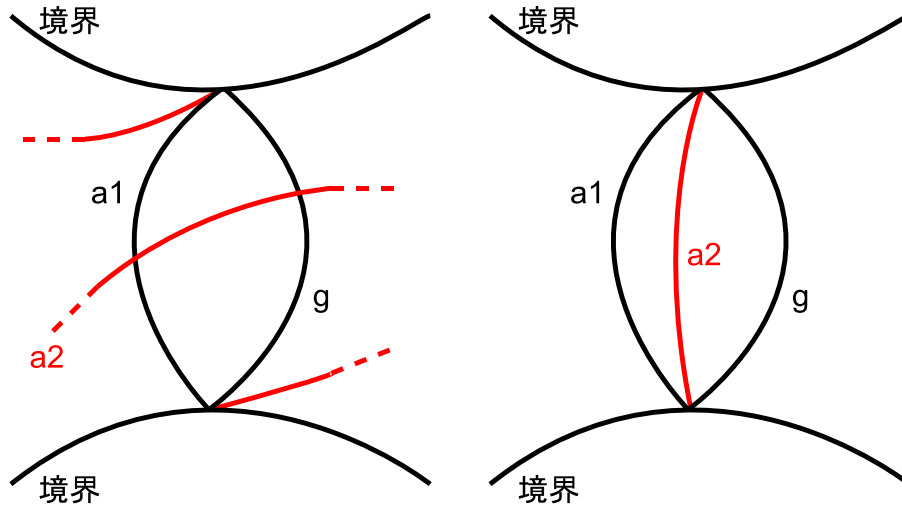


図 15: 補題 3.10 の証明の補足

証明. 補題 2.6 の証明と同様. ただし, 最終的に可能な形は, 図 15 のように端点を共有する形になることに注意.  $\square$

定義 3.11.  $|a_1 \cap a_2|$  を  $a_1$  と  $a_2$  の交点の数とする. ただし,  $|a \cap a| = 0$  と定める<sup>4</sup>. また, 端点についてはそれぞれ 1 回交わると数える. 例えば, 図 16 のような場合は, どちらも  $|a_0 \cap a_1| = 2$  である. さらに,

$$i(a_1, a_2) := \min_{a_1 \sim a'_1, a_2 \sim a'_2} |a'_1 \cap a'_2|$$

とする. ここで  $\sim$  は端点を固定してイソトピックであることを表す. これを  $a_1$  と  $a_2$  の交点数 (intersection number) と呼ぶ.

命題 3.12. 交点の数が最小であることと, 最小交差を持つことは同値. すなわち, 次の 2 つは同値:

- (1)  $|a_1 \cap a_2| = i(a_1, a_2)$ .
- (2)  $a_1, a_2$  は最小交差を持つ.

証明. 命題 2.8 の証明と同じ.  $\square$

<sup>4</sup>Thurston の場合は互いにイソトピックになる曲線は「平行移動」をすることで, 交わらないようにすることができた. しかし, 今回は端点を動かさないので, 交わらないようにすることができない. そのため, このように定義している.

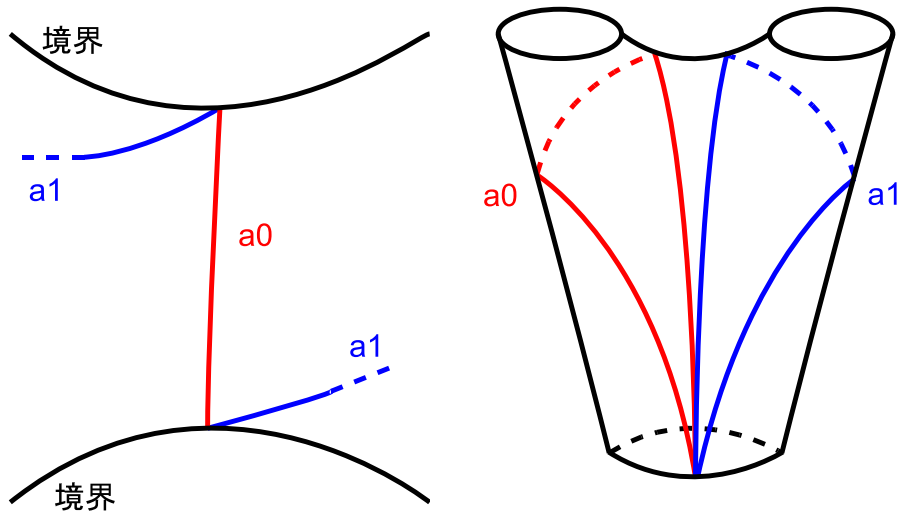


図 16: 交点の数の補足

ここで、曲面の境界上の2点  $x_1, x_2$  を選ぶ。このとき、 $x_1, x_2$  は同じ境界成分上にあってもよいし、一致していても構わない。

定義 3.13.  $x_1, x_2$  を端点とする  $M$  上の弧の端点を固定したイソトピー類の全体の集合を  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(M, x_1, x_2)$  と表す。

命題 3.14.

- (1) 任意の  $[a_1] \in \mathcal{T}$  に対して、 $i(a_1, a_2) \neq 0$  となる  $[a_2] \in \mathcal{T}$  が存在する。
- (2) 異なる  $[a_1], [a_2] \in \mathcal{T}$  に対して  $i(a_1, a_3) \neq i(a_2, a_3)$  となる  $[a_3] \in \mathcal{T}$  が存在する。

証明.  $[a_1] \neq [a_2] \in \mathcal{T}$  に対して、 $0 = i(a_1, b) \neq i(a_2, b)$  となる  $[b] \in \mathcal{T}$  が存在することを言えば十分。

$[a_1] \neq [a_2]$  と仮定する。もし  $i(a_1, a_2) \neq 0$  ならば、 $a_1 = b$  とおけばよい。もし  $i(a_1, a_2) = 0$  ならば、 $[a_1] = [a_2]$  である。なぜならば、 $\mathcal{T}$  の元は全て端点を共有するので、交点数が0になるのは、自分自身の場合に限られるからである。これは  $[a_1] \neq [a_2]$  と仮定したことに矛盾する。□

交点数  $i$  は2つの単純弧に対して定義されたが、実際はそのイソトピー類に対して定義されている。すなわち、 $\mathcal{T}$  の記号を使うと、交点数  $i$  は

$$i : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

という形の関数とみなすことができる．以後，イソトピー類を表す記号  $[a]$  と，その元である  $a$  は混同して使う．

定義 3.15.

$$i_* : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$$

を  $i_*(c)(\cdot) := i(c, \cdot)$  で定義する．ここで， $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$  は  $\mathcal{T}$  上の関数全体の集合を表す． $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$  には直積位相を入れる．

命題 3.14 の主張を  $i_*$  について書き直すと，以下のようになる．

命題 3.16.

- (1)  $0 \notin i_*(\mathcal{T})$ .
- (2)  $i_*$  は単射．

ここで， $0$  は全ての元に対して値  $0$  を返す定値写像を表す．

定義 3.17.  $f, f' \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} - \{0\}$  に対して， $f = cf'$  となる実数  $c \neq 0$  が存在するとき， $f \sim f'$  と定義する． $\sim$  は同値関係．また， $P(\mathbb{R}^{\mathcal{T}}) := \mathbb{R}^{\mathcal{T}} - \{0\} / \sim$  とし， $\pi : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{T}})$  を同値類への写像とする． $P(\mathbb{R}^{\mathcal{T}})$  には商位相を入れる．

今，命題 3.16 から，以下のような図式を考えることができる：

$$\mathcal{T} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^{\mathcal{T}} - \{0\} \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}^{\mathcal{T}}).$$

定義 3.18.  $\pi(i_*(\mathcal{T})) \subset P(\mathbb{R}^{\mathcal{T}})$  の閉包  $\overline{\pi(i_*(\mathcal{T}))}$  を  $\overline{\mathcal{T}}$  で表す．

## 4 3つ穴あき球面上の弧

以下では，円板を3つ取り除いた球面の  $\overline{\mathcal{T}}$  を求める．この章では，特に，弧の2つの端点が一致する場合について考える．

$M_{0,3}$  の3つの境界を  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  とする． $\partial_1$  上の1点  $x_1$  を固定する． $M = (M, x_1, x_1)$  とする．

命題 4.1.  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(M)$  は  $\mathbb{Z}$  と集合として同型．さらに， $\mathbb{Z}$  の  $n \mapsto n+1$  に対応する操作を  $\mathcal{T}$  上に定義することができる．

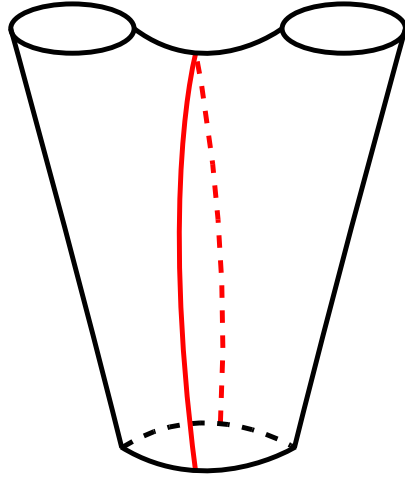


図 17:  $\partial_1$  を出入りする弧

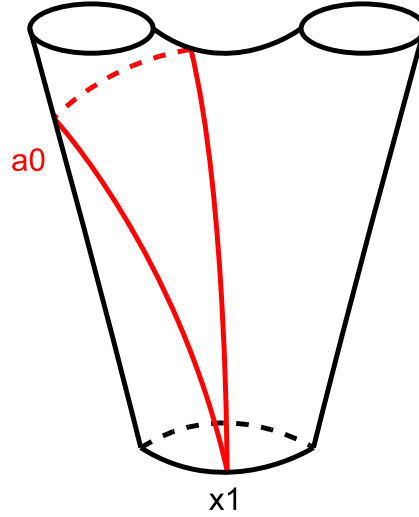


図 18: 端点を  $x_1$  に寄せた弧

証明. 境界  $\partial_1$  から出発して境界  $\partial_1$  に戻ってくる弧は, 境界  $\partial_1$  の周りでの回転を無視すると, 図 17 のようなものに限られる. 2 つの端点を  $x_1$  に寄せた弧を  $a_0$  とする (図 18).

この  $a_0$  に対して, 図 19 のように, 片方の端点を境界に沿って 1 周させる操作を考える. この操作を  $\phi$  と表す.  $a_0$  に操作  $\phi$  を行って作られる弧が図 20 の弧である. これを  $a_1 = \phi(a_0)$  とする. 同様の操作を  $a_1$  にも行う. そうしてできる弧を  $a_2 = \phi(a_1)$  とする (図 21). 以下, 同様に  $a_k$  を定義する. また,  $\phi$  の逆操作  $\phi^{-1}$  も考えることができ, それを  $a_0$  に  $k$  回行ってできる弧を  $a_{-k}$  とする.

$x_1$  を端点とする弧は, 図 17 の弧の端点を境界に沿って  $x_1$  まで動かすことによって得られる. したがって,  $\mathcal{T} = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  である. これが  $\mathbb{Z}$  と同型なことは明らか. ここで,  $\phi$  が  $\mathbb{Z}$  上の  $+1$  の操作に対応している.

□

注 4.2.  $\phi$  は 2 つの境界  $\partial_2, \partial_3$  を入れ替える自己同相写像と考えることができる. また,  $\phi$  を 2 回繰り返す操作  $\phi^2$  は,  $\partial_1$  と平行な単純閉曲線に沿ったデーン捻り (Dehn twist) に対応している.

命題 4.3.  $\mathcal{T}$  の交点数は次の式で決定される:

$$i(a_k, a_l) = 2|k - l|.$$

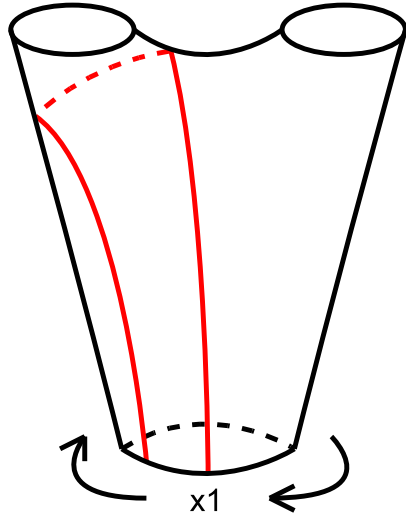


図 19: 端点を 1 周させる操作  $\phi$

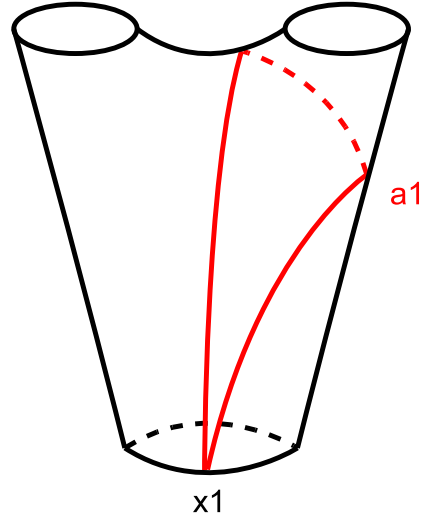


図 20:  $a_1 = \phi(a_0)$

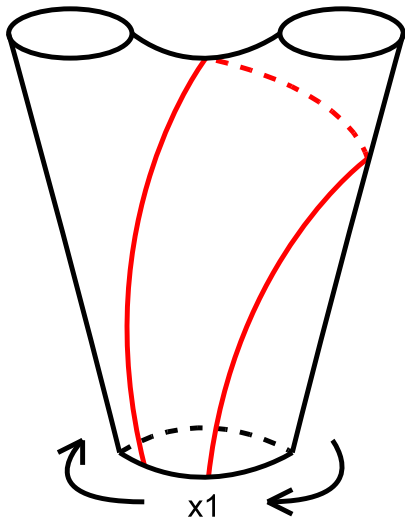


図 21:  $a_2 = \phi(a_1)$

証明. 交点数は  $\phi$  で不変. すなわち,

$$i(\phi(a_k), \phi(a_l)) = i(a_k, a_l).$$

なぜならば,  $\phi$  は自己同相写像だからである. したがって, 弧  $a_0$  ともう 1 つの弧  $a_l$  の交点数について検討すればよい. 弧は自分自身との交点数は 0 なので  $i(a_0, a_0) = 0$ . 図 22 において,  $a_0, a_1$  は点  $x_1$  でのみ交わっている. 重複した基点では 2 回交わると数えるので  $(a_0, a_1) = 2$ .  $a_0, a_2$  の場合, 図 23 から  $(a_0, a_2) = 4$ . 以下,  $\phi$  を  $a_l$  に施す度に  $a_0$  と  $a_l$  交点数が 2 ずつ増えることが帰納的に示される (図 24).  $a_{-l}$  についても同様.  $\square$

交点数の式から, 関数  $i_*(a_0), i_*(a_1)$  は次のようになっていることが分かる.

	$\cdots$	$a_{-2}$	$a_{-1}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$
$i_*(a_0)$	$\cdots$	4	2	0	2	4	$\cdots$
$i_*(a_1)$	$\cdots$	6	4	2	0	2	$\cdots$

この表から, 任意の弧は  $a_0, a_1$  との交点数を調べることによって, どのタイプの弧であるか決定することができる. すなわち, 任意の弧  $a$  に対して,  $s = i(a_0, a)/2$ ,  $t = i(a_1, a)/2$  とおくとき,  $s > t$  ならば,  $a = a_s$  であり,  $s < t$  ならば,  $a = a_{-s}$  である.

この事実は,  $\overline{T}$  を求めるときに, 無限次元空間である  $P(\mathbb{R}^T)$  の中で考える必要は無く, 2次元空間で議論すれば十分であることを意味する. すなわち, 次の補題が成り立つ.

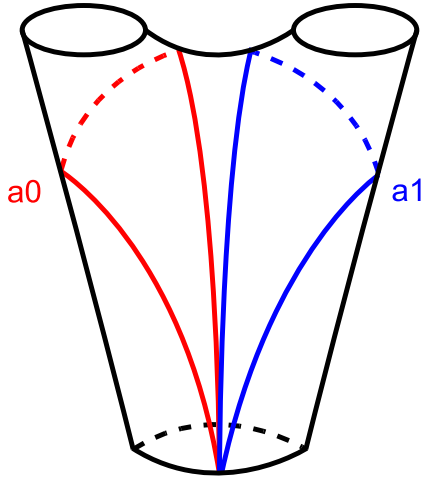
補題 4.4.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^T - \{0\} & \xrightarrow{\pi} & P(\mathbb{R}^T) \\ p \downarrow & & \\ \mathbb{R}^2 - \{0\} & \xrightarrow{\pi'} & P(\mathbb{R}^2) = S^1 \end{array}$$

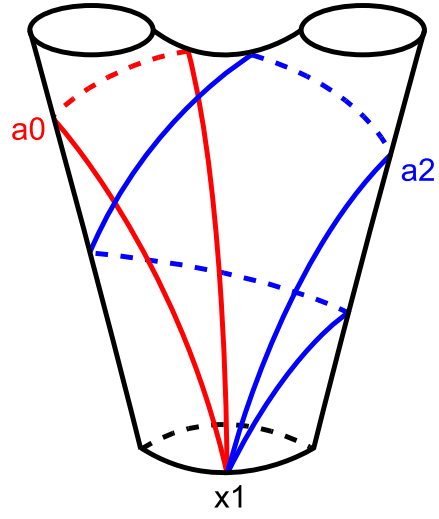
とする. ただし,

$$\begin{aligned} p(\cdots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots) &= (\lambda_0, \lambda_1), \\ \pi'(\lambda_0, \lambda_1) &= [\lambda_0 : \lambda_1] \end{aligned}$$

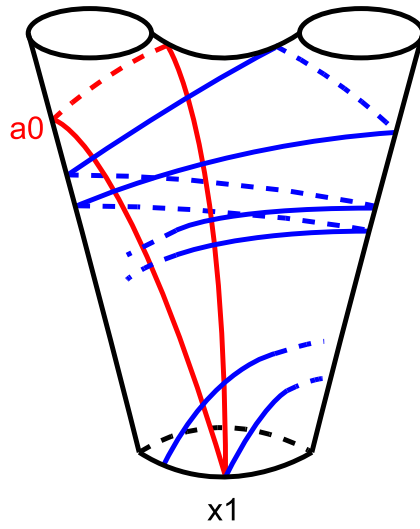
である. このとき,  $\overline{\pi(i_*(T))}$  と  $\overline{\pi'(p(i_*(T)))}$  は同相である.



☒ 22:  $(a_0, a_1) = 2$



☒ 23:  $(a_0, a_2) = 4$



☒ 24:  $i(a_0, \phi(a_1)) = i(a_0, a_1) + 2$

注 4.5. 注 2.12 において,  $\mathbb{R}^S$  の元を  $f = \sum_{c \in S} \lambda_c f_c$  と表現した. 同様の表記が  $\mathbb{R}^T$  でも可能で, 今回は,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{a_k \in T} \lambda_{a_k} f_{a_k} = (\cdots, \lambda_{a_{-1}}, \lambda_{a_0}, \lambda_{a_1}, \cdots) \\ &=: (\cdots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots) \end{aligned}$$

と表すことができる. 補題 4.4 で  $\mathbb{R}^T - \{0\}$  の元を  $(\cdots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots)$  と表記したのは, このような考察に基づく.

補題 4.4 証明には, 次の一般位相の基本的な知識を使う.

定義 4.6.  $X_1, X_2$  を位相空間とし,  $f: X_1 \rightarrow X_2$  とする. 点  $x \in X_1$  に収束する任意の点列  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  に対して,  $X_2$  の点列  $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  が常に  $f(x)$  に収束するとき, 写像  $f$  は点  $x$  において点列連続であるという.

定理 4.7.  $X_1, X_2$  を位相空間とし,  $f: X_1 \rightarrow X_2$  とする. このとき, 写像  $f$  について, 以下が成り立つ.

- (1)  $f$  が点  $x \in X_1$  で連続ならば,  $f$  は  $x$  で点列連続である.
- (2)  $X_1$  の位相が第 1 可算公理を満たすとき,  $f$  が点  $x \in X_1$  で点列連続ならば,  $f$  は点  $x$  で連続である.

補題 4.4 の証明. 命題 4.3 の交点数の式と注 4.5 から,  $i_*(T)$  の元は

$$(\cdots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots) = (\cdots, 2|k+1|, 2|k|, 2|k-1|, \cdots)$$

と座標表示される. この表示を使うと,

$$p(\cdots, 2|k+1|, 2|k|, 2|k-1|, \cdots) = (2|k|, 2|k-1|)$$

と表される. これを射影化したものとして,  $g$  が自然に定義される. すなわち,

$$g: \pi(i_*(T)) \longrightarrow \pi'(p(i_*(T)))$$

を

$$g([\cdots : 2|k+1| : 2|k| : 2|k-1| : \cdots]) = [2|k| : 2|k-1|]$$

で定義する.  $g$  から,

$$\bar{g}: \overline{\pi(i_*(T))} \longrightarrow \overline{\pi'(p(i_*(T)))}$$

を次のようにして定義する:  $\overline{\pi(i_*(\mathcal{T}))}$  の元  $x$  は触点なので,  $x$  に収束する点列  $\{x_n\}$  が存在する. そこで,

$$\bar{g}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

で  $\bar{g}$  を定義する. ここで,

$$\{x_n\} = \{[\cdots : (2|k+1|)_n : (2|k|)_n : (2|k-1|)_n : \cdots]\}$$

における  $(2|k|)_n$  と  $(2|k-1|)_n$  の比が収束するので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$  は収束する. また,  $\bar{g}$  は well-defined である. すなわち,  $\{x_n\} \neq \{x'_n\}$  であっても,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$$

ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n)$$

となる. よって, この  $\bar{g}$  が同相写像であることを確認すればよい.

$\overline{\pi'(p(i_*(\mathcal{T})))}$  の元  $y$  に収束する点列

$$\{y_n\} = \{[(2|k|)_n : (2|k-1|)_n]\}$$

に対し,  $\pi(i_*(\mathcal{T}))$  の点列

$$\{x_n\} = \{[\cdots : (2|k+1|)_n : (2|k|)_n : (2|k-1|)_n : \cdots]\}$$

が一意的に対応し,  $\{y_n\}$  が収束するとき,  $\{x_n\}$  も収束し, また, その収束先も一意的に定まる. よって  $\bar{g}$  は全射かつ単射である.

注 2.13 から,  $P(\mathbb{R}^T)$  が第 1 可算公理を満たすことが分かる. よって,  $\bar{g}$  と  $\bar{g}^{-1}$  の連続性については, 定理 4.7 から, 点列連続性を確認すればよいことが分かるが, これは全単射のときと同様に確認できる. よって,  $\bar{g}$  は同相写像. したがって,  $\overline{\pi(i_*(\mathcal{T}))}$  と  $\overline{\pi'(p(i_*(\mathcal{T})))}$  は同相.  $\square$

定理 4.8.  $\bar{\mathcal{T}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  である. ただし,  $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  には,  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$  の 1 点コンパクト化  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  からの相対位相が入っているものとする.

証明.  $\mathcal{T}$  の各点を  $(i_*(a_0), i_*(a_1))$ -平面に描くと図 25 のようになる. それらの点を単位円上に射影すると, 傾きが  $0, 1/2, 2/3, \cdots$  という点と,  $\infty, 2, 3/2, \cdots$  という点に対応する. これらの極限は傾き 1 の点であり, この点が  $\infty \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  である.  $\square$

注 4.9. 閉包をとるときに増える元  $\infty$  は図 26 のような lamination に対応している.

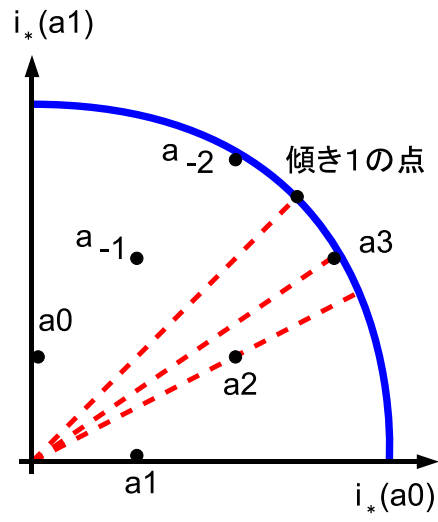


図 25: 傾き 1 の点が  $\infty$  に対応

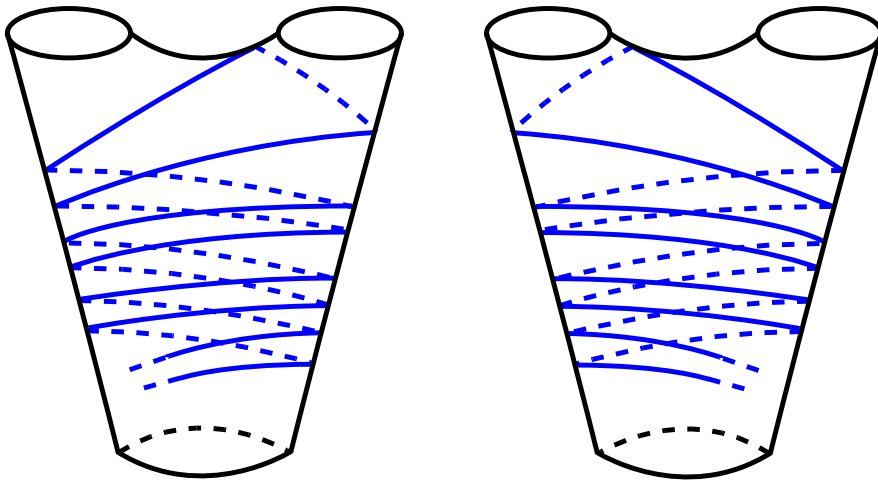


図 26:  $\infty$  に対応する lamination

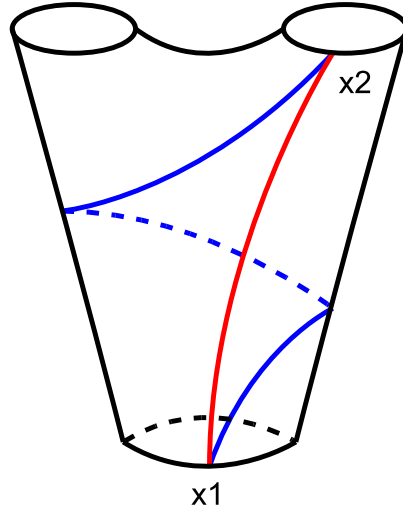


図 27:  $(M_{0,3}, x_1, x_2)$  の弧の例

## 5 今後の課題

### 2つの固定点を持つ3つ穴あき球面

前章では、 $M_{0,3}$  の境界に固定点が1つの場合を考えたので、次は異なる2つの固定点を持つ場合を考えるのが自然な流れであろう。 $x_1, x_2$  が異なる境界成分上にあるとき、 $(M_{0,3}, x_1, x_2)$  の  $\mathcal{T}$  の元は、2つの境界それぞれの周りで、何回巻きついているかで分類される。1つ目の境界に巻きついている回数を  $k$ 、2つ目の境界に巻きついている回数を  $l$  とすると、 $\mathcal{T}$  の元は  $a_{k,l}$  と表すことができる。 $k$  と  $l$  の決定の方法は図 28 を参照。

$(M_{0,3}, x_1, x_2)$  の場合、交差数が複雑である。例として関数  $i_*(a_{0,0})$  が弧  $a_{k,l}$  に対して、どのような値をとるのかを表にすると次の通りである。

$k \setminus l$	...	-2	-1	0	1	2	...
-1	...	3	2	2	3	4	...
0	...	3	2	0	2	3	...
1	...	4	3	2	2	3	...

交点数を確定させれば、 $\overline{\mathcal{T}}$  を求めるときに、何次元の有限次元空間に射影すればよいのかを調べることができる。 $(M_{0,3}, x_1, x_2)$  の場合は3次元か4次元空間ではないかと予想している。

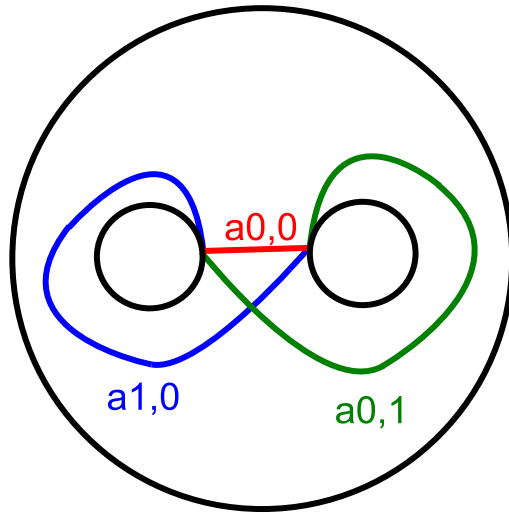


図 28:  $k$  と  $l$  の決定方法

## 1つ穴あきトーラス

1つ穴あきトーラス  $M = M_{1,1}$  についても，同様の問題が残っている (参考: 図 29). すなわち，曲面上の弧に上手く番号を付けた後に交点数を求めたいが，交点数についてはよく分かっていない．交点数が決定されれば，何次元の有限次元空間に射影して  $\bar{T}$  を求めればよいのか調べることができる．

## Right-veering

曲面の境界の各点を固定する自己同相写像の研究手法に right-veering という概念がある ([HKM]). ポアンカレ円板  $\mathbb{H}^2$  上に普遍被覆を持つ境界付き曲面  $M$  を考える．曲面  $M$  の境界に端点を持つ曲線  $c$  の持ち上げを  $\tilde{c}$  とする． $M$  上の自己同相写像の  $\mathbb{H}^2$  への持ち上げが曲線  $\tilde{c}$  を右に動かすとき，その写像は right-veering であるという．

例えば，3つ穴あき球面で端点を回す操作  $\phi$  を 2 回繰り返す  $\phi^2$  は right-veering に対応する． $M$  の自己同相写像から  $\bar{T}$  の自己同相写像が定まるので，これを使って right-veering の特徴づけができないかと考えている．

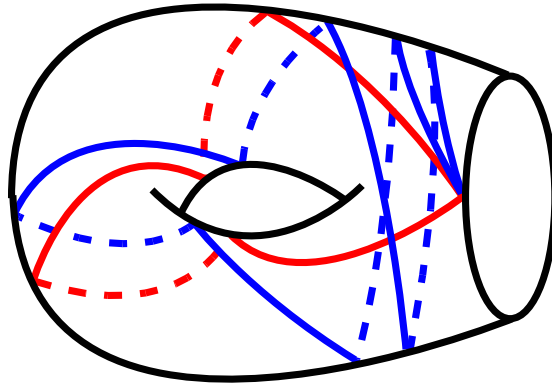


図 29: 円板を 1 つ取り除いたトーラス上の弧

## 参考文献

- [Th] William P. Thurston, *On the Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.
- [CB] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1988.
- [FLP] Albert Fathi, François Laudenbach and Valentin Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Société Mathématique de France, 1979.
- [H] John H. Hubbard, *Teichmüller Theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol.1 Teichmüller Theory*, Matrix Editions, 2006.
- [HKM] Ko Honda, William H. Kazez and Gordana Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary*, Invent. Math. **169** (2007), 427–449.