7 章の問の解答 2011/1/7（石田）

§3, 問 1 (p.202)

(1) $0 < a < 1$, $D_a = \{(x,y)\ ;\ a \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ として

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_a} \frac{dxdy}{(x+y)^{3/2}} \\
&= \int_a^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+y)^{3/2}} \\
&= \int_a^1 dx \left[-2(x+y)^{-1/2}\right]_0^1 \\
&= \int_a^1 \{2x^{-1/2} - 2(x+1)^{-1/2}\} dx \\
&= \left[4x^{1/2} - 4(x+1)^{1/2}\right]_a^1 \\
&= 4 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{a} + 4\sqrt{1+a}
\end{aligned}$$

より，$a \to 0$ による極限 $8 - 4\sqrt{2}$ が D_a の極限 D での積分の値となる．

(2)

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{-y+\cos^2 x}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos^2 x} \frac{dy}{\sqrt{-y+\cos^2 x}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[-2\sqrt{-y+\cos^2 x}\right]_0^{\cos^2 x} \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\cos x\, dx \\
&= 2
\end{aligned}$$

なお，y についての積分は広義積分であるが，定符号の積分であり，x について有限で連続な積分値を持つのでこの計算でよい．

(3) $0 < b < 1$, $D_b = \{(x,y)\ ;\ b \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq y\}$ とする．$\alpha = 1$ の場合は

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_b} \frac{x\, dxdy}{x^2+y^2} \\
&= \int_b^1 dy \int_0^y \frac{x\, dx}{x^2+y^2} \\
&= \int_b^1 dy \left[(1/2)\log(x^2+y^2)\right]_0^y \\
&= \int_b^1 ((\log 2)/2) dy \\
&= (1-b)\log 2/2
\end{aligned}$$

の $b \to 0$ での極限なので $(\log 2)/2$ が積分値となる．

$\alpha \neq 1$ とする．

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_b} \frac{x\, dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} \\
&= \int_b^1 dy \int_0^y x(x^2+y^2)^{-\alpha} dx \\
&= \int_b^1 dy \left[\frac{(x^2+y^2)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\right]_0^y \\
&= \int_b^1 \frac{(2^{1-\alpha}-1)y^{2-2\alpha}}{2(1-\alpha)} dy \\
&= \left[\frac{(2^{1-\alpha}-1)y^{3-2\alpha}}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}\right]_b^1 \\
&= \frac{(2^{1-\alpha}-1)(1-b^{3-2\alpha})}{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}
\end{aligned}$$

となるので $\alpha < 3/2$ であれば $b \to 0$ とした極限は $(2^{1-\alpha}-1)/2(1-\alpha)(3-2\alpha)$ となり，これが積分値である．$\alpha > 3/2$ であれば発散するので積分できない．$\alpha = 3/2$ の場合も $((2^{1-\alpha}-1)/2(1-\alpha))(-\log b)$ の極限をとることになるので，発散して積分できない

(4) $0 < t$, $D_t = \{(x,y)\ ;\ x+y \leqq t\}$ とする．

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_t} \frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha} \\
&= \int_0^t dx \int_0^{t-x} \frac{dy}{(1+x+y)^\alpha} \\
&= \int_0^t dx \left[\frac{(1+x+y)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{t-x} \\
&= \int_0^t \left\{\frac{(1+t)^{1-\alpha} - (1+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\} dx \\
&= \left[\frac{(2-\alpha)x(1+t)^{1-\alpha} - (1+x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\right]_0^t \\
&= \frac{(2-\alpha)t(1+t)^{1-\alpha} - (1+t)^{2-\alpha} + 1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{(\alpha-1)t+1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(1+t)^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

となり，$\alpha > 2$ の条件から $t \to \infty$ での極限は $1/(1-\alpha)(2-\alpha)$ となる．これが求める積分値である．

問 2

(1) 定符号でない関数 f の広義積分は $f = f_+ - f_-$ と正符号の関数の差に分解して

$$\iint_D f\, dxdy = \iint_D f_+\, dxdy - \iint_D f_-\, dxdy$$

と定義したが（p.200 参照），他の広義積分可能な正符号関数 g, h により $f = g - h$ となる場合は

$$\iint_D f\,dxdy = \iint_D g\,dxdy - \iint_D h\,dxdy$$

が成り立つ．実際 $u = g - f_+$ とすれば $h = g - f = f_- + u$ となるので

$$\begin{aligned} & \iint_D g\,dxdy - \iint_D h\,dxdy \\ &= \iint_D f_+\,dxdy + \iint_D u\,dxdy \\ &\quad - \iint_D f_-\,dxdy - \iint_D u\,dxdy \\ &= \iint_D f_+\,dxdy - \iint_D f_-\,dxdy \\ &= \iint_D f\,dxdy \end{aligned}$$

となる．この問題の場合

$$\frac{1-x-y}{(1+x+y)^\alpha} = \frac{2}{(1+x+y)^\alpha} - \frac{1}{(1+x+y)^{\alpha-1}}$$

であるから問 1, (4) の結果が使える．

(2) $D = \{(x,y)\,;\, 0 \leqq x \leqq 1\,, x - x^2 \leqq y \leqq x\}$ とする．連続に延長できるので連続関数の積分としてよい．

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{\sin 2\pi\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^x \frac{\sin 2\pi\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}dy \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{\cos 2\pi\sqrt{x-y}}{\pi}\right]_{x-x^2}^x \\ &= \int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi x}{\pi}dx \\ &= \left[\frac{x-(2\pi)^{-1}\sin 2\pi x}{\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

§4, 問 1 (p.206) これは順に解いて p.252 の解と見比べればよい．

問 2　$0 \leqq x^2 + y^2 = \cos\omega \leqq 1$ の範囲なので $D = \{(\theta,\omega)\,;\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq \omega \leqq \pi/2\}$ の範囲で考えればよい．$x_\theta = -\sqrt{\cos\omega}\sin\theta$, $x_\omega = -\sin\omega\cos\theta/2\sqrt{\cos\omega}$, $y_\theta = \sqrt{\cos\omega}\cos\theta$, $y_\omega = -\sin\omega\sin\theta/2\sqrt{\cos\omega}$, より

$$J = x_\theta y_\omega - x_\omega y_\theta = \sin\omega/2 > 0$$

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2\leqq 1} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}\frac{\sin\omega}{2}\,d\omega d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\omega \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\omega}{2}d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \pi(1-\cos\omega)d\omega \\ &= [\pi(\omega-\sin\omega)]_0^{\pi/2} \\ &= \pi(\pi/2-1) \end{aligned}$$

問 3　これは極座標で考える問題ではないと思われる．p.202 問 1, (3) と同様に解くのがよい．

問 4　$\{(u,v)\,;\, 0 \leqq u, v \leqq 1\}$ で u^2v を積分する．

問 5　$x = u^{-2/3}v^{-1/3}$, $y = u^{-1/3}v^{-2/3}$ となるので，$x_u = -2u^{-5/3}v^{-1/3}/3$, $x_v = -u^{-2/3}v^{-4/3}/3$, $y_u = -u^{-4/3}v^{-2/3}/3$, $x_v = -2u^{-1/3}v^{-5/3}/3$ より

$$J = x_u y_v - x_v y_u = 1/3u^2v^2 > 0$$

で (u,v) についての領域は $E = \{(u,v)\,;\, a \leqq u \leqq b, c \leqq v \leqq d\}$ であるから，求める面積は

$$\begin{aligned} & \iint_E (1/3u^2v^2)\,dudv \\ &= \int_a^b du \int_c^d (1/3u^2v^2)\,dv \\ &= \int_a^b du \left[-1/3u^2v\right]_c^d \\ &= \int_a^b (1/c-1/d)(1/3u^2)\,du \\ &= (1/c-1/d)\left[-1/3u\right]_a^b \\ &= (1/a-1/b)(1/c-1/d)/3 \end{aligned}$$

`http://www.math.tohoku.ac.jp/%7Eishida/`
に練習問題 7 の解答例もあります．