7 章の問題の解答 2010/12/17（石田）

1. (1)

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y\,dxdy &= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x^2y\,dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2x-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2(2x-x^2)}{2}dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{10} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\iint_D \log\frac{x}{y^2}dxdy &= \int_1^2 dx\int_1^x(\log x-2\log y)dy \\ &= \int_1^2 \left[y\log x-2y\log y+2y\right]_1^x dx \\ &= \int_1^2(-x\log x-\log x+2x-2)dx \\ &= \left[-\frac{x^2\log x}{2}+\frac{x^2}{4}-x\log x-x+x^2\right]_0^2 \\ &= -2\log 2+1-2\log 2-2+4-\frac{1}{4}+1-1 = \frac{11}{4}-4\log 2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy \\ &= \int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx \\ &= \int_0^1\left(-\frac{4x^3}{3}+2x^2-x+\frac{1}{3}\right)dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

(4)

$$\iint_D\sqrt{4x^2-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}dy$$

であるので，まず $\displaystyle\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}dy$ を求める．$t=\dfrac{y}{2x}$ とおけば

$$\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}dy=\int_0^{1/2}2x\sqrt{4x^2-4x^2t^2}dt=4x^2\int_0^{1/2}\sqrt{1-t^2}dt=4x^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}dxdy &= \int_0^1 \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^2dx \\
&= \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}
$$

(5) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ により極座標に変換して積分する．領域 E は $r^2 \leqq \cos 2\theta$ となる．$0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ に制限して計算して 4 倍する．途中で

$$
\int \frac{d\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{-1}{\tan(\theta+\pi/4)+1}
$$

を使う．

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} &= 4\iint_E \frac{rd\theta dr}{(1+r^2)^2} \\
&= 4\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{rdr}{(1+r^2)^2} \\
&= 4\int_0^{\pi/4} \left[\frac{-1}{2(1+r^2)}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+\cos 2\theta)}\right) d\theta \\
&= 4\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\tan(\theta+\pi/4)+1}\right]_0^{\pi/4} \;=\; 4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) \;=\; \frac{\pi}{2}-1
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\iint_D e^{\frac{y}{x}}dxdy &= \int_1^2 dx \int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}}dy \\
&= \int_0^1 \left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^3} dx \\
&= \int_0^1 \left(xe^{x^2}-x\right)dx \\
&= \left[\frac{e^{x^2}}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \frac{e^4}{2}-2-\frac{e}{2}+\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}(e^4-e-3)
\end{aligned}
$$

(7) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ により極座標に変換して積分する．領域 E は $a \leqq r \leqq b$ となる．まずは $\alpha \neq 1$ を仮定して

$$
\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint_E \frac{rd\theta dr}{r^{2\alpha}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^{1-2\alpha} dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_a^b d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{b^{2-2\alpha} - a^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} d\theta \\
&= 2\pi \frac{b^{2-2\alpha} - a^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \quad = \quad \frac{(b^{2-2\alpha} - a^{2-2\alpha})\pi}{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

となる．$\alpha = 1$ の場合は

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} &= \iint_E \frac{rd\theta dr}{r^2} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^{-1} dr \\
&= \int_0^{2\pi} [\log r]_a^b \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \log \frac{b}{a} d\theta \quad = \quad 2\pi \log \frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\iiint_K (x^2+y^2+z^2) dxdydz = \iiint_K x^2 dxdydz + \iiint_K y^2 dxdydz + \iiint_K z^2 dxdydz
$$

であるから右辺のそれぞれの項を計算すればよい．

$$
\begin{aligned}
\iiint_K x^2 dxdydz &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} x^2 dz \\
&= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \left[x^2 z\right]_0^{a-x-y} x^2 dz \\
&= \int_0^a dx \int_0^{a-x} x^2(a-x-y) dy \\
&= \int_0^a dx \left[ax^2 - x^3 - x^2 y\right]_0^{a-x} x^2(a-x-y) dy \\
&= \int_0^a \left(ax^2(a-x) - x^3(a-x) - \frac{x^2(x-a)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^a \left(\frac{x^4}{2} - ax^3 + \frac{a^2x^2}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{10} - \frac{ax^4}{6} + \frac{a^2x^3}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{a^5}{10} - \frac{a^5}{6} + \frac{a^5}{6} \quad = \quad \frac{a^5}{60}
\end{aligned}
$$

となる．他の項も積分の順序を変えた同様の計算で $\dfrac{a^5}{60}$ となるので

$$
\iiint_K (x^2+y^2+z^2) dxdydz = \frac{a^5}{60} + \frac{a^5}{60} + \frac{a^5}{60} \quad = \quad \frac{a^5}{20}
$$

(9) 領域 K は z を固定すると，原点を中心とする半径 $\sqrt{3-z^2}$ と半径 $z^2/2$ の円の小さい方の内部となっている．

$$z^4/4-(3-z^2)=\frac{1}{4}(z^2+6)(z^2-2)$$

であるから $0 \leqq z \leqq \sqrt{2}$ では $z^2/2 \leqq \sqrt{3-z^2}$ であって半径 $z^2/2$ の円，$\sqrt{2} \leqq z$ では $z^2/2 \geqq 3-z^2$ であって半径 $\sqrt{3-z^2}$ の円となっている．もとめる 3 重積分は K の体積であるから

$$\begin{aligned}\iiint_K dxdydz &= 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\pi z^4 dz}{4} + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \pi(3-z^2)dz \\ &= \left[\frac{\pi z^5}{10}\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[6\pi z - \frac{2\pi z^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} + 6\sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi - 6\sqrt{2}\pi + \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \quad = \quad \left(4\sqrt{3} - \frac{64\sqrt{2}}{15}\right)\pi\end{aligned}$$

2. a と b および c と d の符号と大小関係によって少しずつ経過が違ってくる．ここでは $0<a<b$ および $0<c<d$ を仮定する．この場合

$$x=\sqrt{\frac{v}{u}}\,,\ \ y=\sqrt{uv}$$

であるから

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{-1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}}\,,\ \ \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}}\,,\ \ \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}\,,\ \ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\,,$$

となり

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2u}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{uv}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2u}$$

となる．

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \iint_E \left(\frac{v}{u}+uv\right)\frac{1}{2u}dudv \\ &= \int_a^b du \int_c^d \left(\frac{v}{2u^2}+\frac{v}{2}\right)dv \\ &= \int_a^b \left[\frac{v^2}{4u^2}+\frac{v^2}{4}\right]_c^d du \\ &= \int_a^b \left(\frac{d^2-c^2}{4u^2}+\frac{d^2-c^2}{4}\right)du \\ &= \left[\frac{-(d^2-c^2)}{4u}+\frac{(d^2-c^2)u}{4}\right]_a^b \\ &= \frac{(d^2-c^2)(b-a)}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)\end{aligned}$$

3. (1) 累次積分の途中で $x = \sin t$ と置いて，t について 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで積分する．

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-xy}} &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-xy}} \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-2\sqrt{1-xy}}{x}\right]_0^x dx \\
&= \int_0^1 \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{x} dx \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - \cos^2 t}{\sin t} dt \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos t - 1}{\sin t} + \sin t\right) dt \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left(-\tan\frac{t}{2} + \sin t\right) dt \\
&= 2\left[2\log\cos\frac{t}{2} - \cos t\right]_0^{\pi/2} \quad = \quad 2(2\log\frac{1}{\sqrt{2}} + 1) \quad = \quad 2(1 - \log 2)
\end{aligned}
$$

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により極座標に変換して積分する．領域 E は $0 \leqq r \leqq a$, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となる．

$$
\begin{aligned}
\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x} dxdy &= \iint_E \theta r dr d\theta \\
&= \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} \theta r d\theta \\
&= \int_0^a \left[\frac{\theta^2 r}{2}\right]_0^{\pi/2} dr \\
&= \int_0^a \frac{\pi^2 r}{8} dr \\
&= \left[\frac{\pi^2 r^2}{16}\right]_0^a \quad = \quad \frac{\pi^2 a^2}{16}
\end{aligned}
$$

(3) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により極座標に変換して積分する．領域 E は $0 \leqq r$, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となる．累次積分の途中で $r = \tan t$ と置いて，t について 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで積分する．

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(1+x^2+y^2)^3} dxdy &= \iint_E \frac{r^2}{(1+r^2)^3} dr d\theta \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{(1+r^2)^3} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^3} dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt \quad = \quad \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4} \quad = \quad \frac{\pi^2}{32}
\end{aligned}
$$

(4) これだけが定符号でない関数の重積分となるが，分母の増大が大きいので絶対収束する．したがって，累次積分を行えばよい．

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{1-xy}{(1+x+y)^5}dxdy &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{1-xy}{(1+x+y)^5}dy \\
&= \int_0^\infty dx \int_0^\infty \left(\frac{-x}{(1+x+y)^4} + \frac{1+x+x^2}{(1+x+y)^5} \right) dy \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{x}{3(1+x+y)^3} - \frac{1+x+x^2}{4(1+x+y)^4} \right]_0^\infty dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{-x}{3(1+x)^3} + \frac{1+x+x^2}{4(1+x)^4} \right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{-1}{12(1+x)^2} + \frac{1}{12(1+x)^3} + \frac{1}{4(1+x)^4} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{12(1+x)} - \frac{1}{24(1+x)^2} - \frac{1}{12(1+x)^3} \right]_0^\infty \\
&= \frac{-1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} \quad = \quad \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

(5) $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ により極座標に変換して積分する．領域 L は $0 \leqq r$, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となる．

$$
\begin{aligned}
\iiint_K \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz &= \iiint_L \frac{r^3\sin\theta}{(1+r^2)^3}drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{r^3\sin\theta}{(1+r^2)^3}d\theta \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{(1+r^2)^3}d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{r^3}{(1+r^2)^3}dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \left(\frac{r}{(1+r^2)^2} - \frac{r}{(1+r^2)^3} \right) dr \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2(1+r^2)} + \frac{1}{4(1+r^2)^2} \right]_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad = \quad \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

4. 略

5. 略

6. (1) 原点で値が不定であるが，有界な領域の有界な関数なので，積分の順序を交換して計算できる．

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos\frac{\pi x}{\sqrt{y}} dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \cos\frac{\pi x}{\sqrt{y}} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{y}}{\pi}\sin\frac{\pi x}{\sqrt{y}}\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-\sqrt{y}}{\pi}\sin \pi y\sqrt{y}\right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3\pi^2}\cos \pi y\sqrt{y}\right]_0^1 = \frac{-4}{3\pi^2}\end{aligned}$$

なお，教科書 p.254 の解答では $\cos\dfrac{\pi x}{\sqrt{y}}$ が $\sin\dfrac{\pi x}{\sqrt{y}}$ に入れ替わっているが，このときの解は

$$\left[\frac{2}{3\pi^2}\sin \pi y\sqrt{y} + \frac{2y\sqrt{y}}{3\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{3\pi}$$

となる．したがって，p.254 の解はいずれにしても正しくない．

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_{(\sin^{-1} x)/2}^{\pi/4} \exp\left(\frac{x}{\cos y}\right) dy &= \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin 2y} \exp\left(\frac{x}{\cos y}\right) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \left[\cos y \exp\left(\frac{x}{\cos y}\right)\right]_0^{\sin 2y} dy \\ &= \int_0^{\pi/4} ((\exp(2\sin y) - 1)\cos y)\, dy \\ &= \left[\frac{\exp(2\sin y)}{2} - \sin y\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}} - \sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

ただし，$\exp(f(x))$ は $e^{f(x)}$ のことである．

7. 略

8. 略

9. (1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，円柱との交わりは $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ となる．(x, y) での z の範囲は $[-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}]$ であるから，体積は $D : x^2 + y^2 \leqq ax$ および $E : 0 \leqq r \leqq a\cos\theta, \dfrac{-\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ として

$$\iint_D 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint_E 2r\sqrt{a^2 - r^2}\,drd\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} 2r\sqrt{a^2-r^2}dr \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \left[\frac{-(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{a^3(1-\sin^3\theta)}{3}\right) d\theta \\
&= 4a^3\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3}-\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{12}\right) d\theta \\
&= 4a^3\left[\frac{\theta}{3}-\frac{-9\cos\theta+\cos 3\theta}{36}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right)a^3
\end{aligned}
$$

となる．表面積は球面の部分と円柱の部分に分けて計算する．球面の部分は $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ として

$$
\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}
$$

となるので，上下合わせた面積は

$$
\begin{aligned}
2\iint_D \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr \\
&= 4a\int_0^{\pi/2} \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta \\
&= 4a^2\int_0^{\pi/2} (1-\sin\theta)d\theta \\
&= 4a^2\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = (2\pi-4)a^2
\end{aligned}
$$

となる．円柱の部分は $\left(\frac{a}{2},0\right)$ を中心とした半径 $\frac{a}{2}$ の円柱で，$\left(\frac{a(1+\cos\theta)}{2},\frac{a\sin\theta}{2}\right)$ での z の範囲は $\left[-a\sin\frac{\theta}{2},a\sin\frac{\theta}{2}\right]$，また θ に対する弧の長さは $\frac{a}{2}\theta$ となるので，面積は

$$
\int_0^{2\pi} \frac{a}{2}\left(2a\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta = a^2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a^2
$$

となる．したがって，全体の表面積は $(2\pi-4)a^2+4a^2=2\pi a^2$ となる．