6 章の問題の解答 (2) 2010/12/17（石田）

7. (1) $z_x = 2x + y - 2$, $z_y = x + 2y - 3$ より連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

を解いて $x = 1/3, y = 4/3$ となる．$z_{xx} = 2$, $z_{xy} = 1$, $z_{yy} = 2$ から $\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 3 > 0$ $z_{xx} > 0$ となるので $(x, y) = (1/3, 4/3)$ で極小値 $-7/3$ をとる．

(2) $z_x = 2(1-x)(3y-y^2)$, $z_y = (2x-x^2)(3-2y)$ が共に 0 となるのは，連立方程式

$$\begin{cases} 2(1-x)(3y-y^2) = 0 \\ (2x-x^2)(3-2y) = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x, y) = (0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 3)$, $(1, 3/2)$ の場合である．このうち，$(x, y) = (0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 3)$ では $z = 0$ で，$2x - x^2$ が $x = 0$ で負から正に，$x = 2$ で正から負に変化していて，$3y - y^2$ は $y = 0$ で負から正に，$y = 3$ で正から負に変化しているので，積 $(2x-x^2)(3y-y^2)$ はこれら 4 点の近くでは正の値も負の値もとる．したがって，これら 4 点での値 0 は極大値でも極小値でもない．一方，$2x - x^2$ は $x = 1$ で正で極大，$3y - y^2$ は $y = 3/2$ で正で極大であるから，積 $(2x - x^2)(3y - y^2)$ は $(x, y) = (1, 3/2)$ で極大値 $9/4$ をとる．

(3) $z_x = 2x - 2y^2$, $z_y = -4xy + 4y^3 - 5y^4$ が共に 0 となるのは，$x = y^2$ を $z_y = -4xy + 4y^3 - 5y^4$ の x に代入して $-5y^4 = 0$ より $y = 0, x = 0$ となる．極値の可能性は $(x, y) = (0, 0)$ だけである．$z = (x - y^2)^2 - y^5$ より，関数を $x = y^2$ で定まる放物線に制限すると $z = -y^5$ となり，y が負なら z は正，y が正なら z は負となる．したがって，$(x, y) = (0, 0)$ での値 0 も極値ではない．

(4)

$$z_x = \frac{-x^2 - 2xy + y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, z_y = \frac{x^2 - 2xy - y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

より，$z_x = z_y = 0$ となるのは $-x^2 - 2xy + y^2 + 1 = x^2 - 2xy - y^2 + 1 = 0$ の場合である．これから $2xy = 1$ と $x^2 - y^2 = 0$ が得られる．これを満たすのは $(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ だけである．$(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ での値は $\sqrt{2}/2$ であるから引いてみる．

$$\frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2x + 2y - \sqrt{2}(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2 + 1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\{(x - \sqrt{2}/2)^2 + (y - \sqrt{2}/2)^2\}}{2(x^2 + y^2 + 1)} \leqq 0$$

より，$(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ で最大値 $\sqrt{2}/2$ をとることがわかる．同様の計算で $(x, y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ では最小値 $-\sqrt{2}/2$ をとることがわかる．

(5) 変数 x, y それぞれについて 2π の周期を持つ関数なので $0 \leqq x, y < 2\pi$ の範囲で解を求める．x と y についての偏微分は

$$z_x = \cos x + \cos(x + y) = 2\cos(x + y/2)\cos(y/2)$$

$$z_y = \cos y + \cos(x + y) = 2\cos(y + x/2)\cos(x/2)$$

である．まず $\cos(y/2) = 0$ となるのは $y = \pi$ のときで，$z_y = 2\cos(\pi + x/2)\cos(x/2) = 0$ となるのは $x = \pi$ である．同様に $\cos(x/2) = 0$ と仮定しても $(x, y) = (\pi, \pi)$ となる．この関数を $x = t, y = t$ $(t \in \mathbf{R})$ に制限すると $f(t) = 2\sin t + \sin 2t$ で，微分 $f'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 4\cos 3t/2 \cos t/2$ は $t = \pi$ の近くで $t = \pi$ を除き負である．したがって $f(t)$ は $t = \pi$ の近くで単調減少であり $(x, y) = (\pi, \pi)$ で極値とはならない．

$x \neq \pi, y \neq \pi$ を仮定する．このとき $z_x = z_y = 0$ となるのは $\cos(x + y/2) = \cos(y + x/2) = 0$ の場合である．$x + y/2$ と $y + x/2$ はそれぞれ $\pi/2$, $\pi/2 + \pi = 3\pi/2$, $\pi/2 + 2\pi = 5\pi/2$ の 3 つの値があり得るが，$0 \leqq x, y < 2\pi$ の仮定から

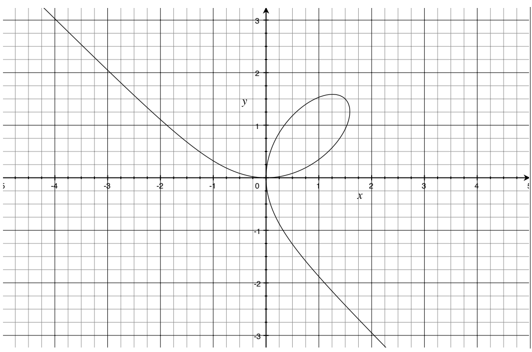
$$|(x + y/2) - (y + x/2)| = |(x - y)/2| < \pi$$

であり，$x+y/2=y+x/2$ すなわち $x=y$ となる．$x\neq\pi$ なので $x=y=\pi/3$ または $x=y=5\pi/3$ となる．

$z_{xx}=-\sin x-\sin(x+y)$, $z_{xy}=-\sin(x+y)$, $z_{yy}=-\sin y-\sin(x+y)$ より $x=y=\pi/3$ なら $\Delta=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})-(-\sqrt{3}/2)^2=9/4>0$ となるので，値 $3\sqrt{3}/2$ が $(x,y)=(\pi/3,\pi/3)$ での極大値となる．また，$x=y=5\pi/3$ なら $\Delta=\sqrt{3}\sqrt{3}-(\sqrt{3}/2)^2=9/4>0$ となるので，値 $-3\sqrt{3}/2$ は $(x,y)=(5\pi/3,5\pi/3)$ での極小値となる．

8. (1) 陰関数を $y=f(x)$ とすると，$f'(x)=-F_x/F_y$ であるから，$F=x^3-3axy+y^3=0$ と $F_x=3x^2-3ay=0$ を連立させて解くと $y=x^2/a$ から $x^3=2a^3$ すなわち $x=\sqrt[3]{2}a$ となる．このときの y の値は $x^2/a=\sqrt[3]{4}a$ である．

$a=1$ の場合の曲線は次のようになる．



これが極大値であることを見る．直線 $y=tx$ とこの曲線の交点は $x^3-3atx^2+t^3x^3=0$ より，$x=0$ の原点以外は

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

となる．y を t の関数として微分すると $y'=-3a(t^3-2)/(1+t^3)^2$ となり $t=\sqrt[3]{2}$ で符号が正から負に変わる．これは $(x,y)=(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a)$ の点なので，陰関数は $x=\sqrt[3]{2}a$ で極大となる．

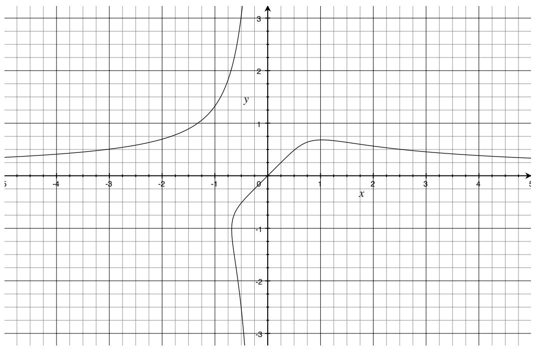
(2) 陰関数を $y=f(x)$ とすると，$f'(x)=-F_x/F_y$ であるから，$F=x^3y^3-x+y=0$ と $F_x=3x^2y^3-1=0$ を連立させて解くと，$y=2x/3$ から $8x^5/9=1$ すなわち $x=\sqrt[5]{9/8}$ となる．このときの y の値は $2x/3=\sqrt[5]{4/27}$ である．

陰関数についての公式 (p.175) から

$$f''(x)=\frac{-F_y^2F_{xx}+2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}}{F_y^3}$$

であるが，この点で $F_x=0$ かつ $F_y>0$ であることに注意すると，符号は $-F_{xx}=-6xy^3$ の符号と同じである．この符号は負なので $x=\sqrt[5]{9/8}$ での値 $\sqrt[5]{4/27}$ は極大値である．

この関数による曲線は次のようになる．



9. (1) $\phi(x,y)=x^2+y^2-1$, $f(x,y)=xy$ と置いて p.183 定理 20 を適用する．連立方程式

$$y+\lambda(2x)=0,\ x+\lambda(2y)=0$$

を満たすのは $\lambda=\pm1/2$ である．$\lambda=1/2$ なら $(x,y)=(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$ で最小値 $-1/2$, $\lambda=-1/2$ なら $(x,y)=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$ で最大値 $1/2$ をとる．

$\phi(x,y)=1$ の曲線は単位円なので，$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$, $xy=\cos\theta\sin\theta=\sin(2\theta)/2$ として最大値と最小値を求めることもできる．

(2) この場合は連立方程式は

$$3x^2+\lambda(2x)=0,\ 3y^2+\lambda(2y)=0$$

となる．これから極値は $x=y$ であることがわかる．(後は省略)