解析学 B レポート問題 （石田） 解説

(2) 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+xy+y^2+1}$$

で定義する．

(b) $z=f(x,y)$ のグラフのような山があったとすると，どの地点をどの方向に歩いたときが最も急な上り坂となるか調べよ．登山ルートではなく地点だけの問題なので，その地点の xy 座標と方向を求めれば良い．

(2)–(b) の解答例

関数 $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での偏微分を $p=f_x(a,b), q=f_y(a,b)$ とする．このとき，$(x,y)=(a,b)$ の地点での水平面で考えて x 軸方向から角度 θ の方向のグラフの傾き，すなわち単位長さあたりの z の増大値は

$$p\cos\theta + q\sin\theta = \sqrt{p^2+q^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha) = \sqrt{p^2+q^2}\cos(\theta-\alpha)$$

となる．α はベクトル (p,q) の向きである．したがって，$(x,y)=(a,b)$ では (p,q) の方向で最大の傾き $\sqrt{p^2+q^2}$ となる．したがって，全平面で $f_x^2+f_y^2$ が最大となる点でのベクトル (f_x,f_y) の向きがこの問題の解となる．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-(2x+y)}{(x^2+xy+y^2+1)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+2y)}{(x^2+xy+y^2+1)^2}$$

より

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{5x^2+8xy+5y^2}{(x^2+xy+y^2+1)^4} \tag{1}$$

となり，これが最大値となる (x,y) を求める必要がある．

$s=x-y, t=x+y$ と置けば，$x^2+y^2=(s^2+t^2)/2$, $xy=(-s^2+t^2)/4$ より (1) は

$$\frac{128(s^2+9t^2)}{(s^2+3t^2+4)^4}$$

に等しい．ここで $u=\sqrt{3}t$ と置けば

$$\frac{128(s^2+3u^2)}{(s^2+u^2+4)^4} \tag{2}$$

となる．(s,u) を座標に取れば分母は原点からの距離で決まる．$s^2+u^2=k$ と置くと，分子は $128(k+2u^2)$ であるから，k が一定なら $s=0, u=\pm\sqrt{k}$ で最大となる．これを (2) に代入すると

$$\frac{384k}{(k+4)^4}$$

となる．ここで k を変化させてこの式がが最大となるのは

$$\left(\frac{384k}{(k+4)^4}\right)' = \frac{384(-3k+4)}{(k+4)^5}$$

より $k=4/3$ のときである．$u=2\sqrt{3}/3$ すなわち $t=2/3$ となり，$s=0$ と合わせて $(x,y)=(1/3,1/3),(-1/3,-1/3)$ が解となる．

$$(f_x(1/3,1/3), f_y(1/3,1/3)) = (-3/16,-3/16),$$

$$(f_x(-1/3,-1/3), f_y(-1/3,-1/3)) = (3/16,3/16)$$

であるので，$(x,y)=(1/3,1/3)$ のときは $(-1,-1)$ の方向，$(x,y)=(-1/3,-1/3)$ のときは $(1,1)$ の方向が最大の上り坂となる．その点での傾きは $\sqrt{(3/16)^2+(3/16)^2}=3\sqrt{2}/16$ である．

2010 年 12 月 10 日