テンソル積（代数学概論 B, 2011/7/7, 石田）

ここでは可換環上の加群に限ってそれらのテンソル積について解説する（一般の環上のテンソル積については森田康夫著「代数概論」p. 112 等を参照）.

R を可換環とする.

R 加群 M, N の直積 $M \times N$ から R 加群 L への写像 $f : M \times N \to L$ は次の条件を満たすとき，**双 1 次写像**という.

(1) 任意の $x, x' \in M$ と $y \in N$ について $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ を満たす.

(2) 任意の $x \in M$ と $y, y' \in N$ について $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$ を満たす.

(3) 任意の $x \in M$, $y \in N$ と $a \in R$ について $f(ax, y) = af(x, y)$ を満たす.

(4) 任意の $x \in M$, $y \in N$ と $b \in R$ について $f(x, by) = bf(x, y)$ を満たす.

定理 1 任意の R 加群 M, N に対して R 加群 $M \otimes_R N$ と双 1 次写像 $\phi : M \times N \to M \otimes_R N$ が存在して次の条件を満たす.

(i) 任意の R 加群 L と双 1 次写像 $f : M \times N \to L$ に対して $g \cdot \phi = f$ を満たす R 準同型写像 $g : M \otimes_R N \to L$ が一意的に存在する.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & M \otimes_R N \\ & {}_f\searrow & \downarrow{}_g \\ & & L \end{array}$$

(ii) またこのような条件を満たす R 加群 $(M \otimes_R N)'$ と双 1 次写像 $\phi' : M \times N \to (M \otimes_R N)'$ が別に存在したとすると，一意的な同型 $\psi : M \otimes_R N \to (M \otimes_R N)'$ が存在して $\phi' = \psi \cdot \phi$ を満たす.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & M \otimes_R N \\ & {}_{\phi'}\searrow & \downarrow\wr\ {}_\psi \\ & & (M \otimes_R N)' \end{array}$$

証明　$\{[x, y] \,;\, (x, y) \in M \times N\}$ を不定元の集合と考え，これを基底とする R 自由加群を F とする．F に含まれる

$$[x + x', y] - [x, y] - [x', y]\ ,\ \ [x, y + y'] - [x, y] - [x, y'],$$

$$[ax, y] - a[x, y]\ ,\ \ [x, by] - b[x, y]$$

の形の元全体で生成される部分 R 加群を K として，$M \otimes_R N = F/K$ と定義する. $M \otimes_R N$ における $[x, y] \in F$ の同値類を $x \otimes y$ と書く．$\phi : M \times N \to M \otimes_R N$ を $\phi(x, y) = x \otimes y$ で定義すれば，これが双 1 次写像となることが，剰余加群を定義した部分 R 加群 K の定義からわかる.

(i) の f に対して，R 準同型 $h : F \to L$ を基底について $h([x,y]) = f(x,y)$ で定義する．このとき，f が双 1 次写像であることから K の生成元がすべて h の核に含まれることがわかる．したがって $K \subset \operatorname{Ker} h$ であり，R 準同型 $g : F/K = M \otimes_R N \to L$ が存在して，すべての $(x,y) \in M \times N$ について $g(x \otimes y) = f(x,y)$ を満たす．すなわち $g \cdot \phi = f$ を満たす．また，同様の条件を満たす R 準同型 g' が別にあったとすると，g' と g はすべての $x \otimes y$ で同じ値を取ることになるが，このような元全体が $M \otimes_R N$ を生成しているので $g' = g$ であり，g は一意的である．

(ii) は (i) を使えば $\phi' = \psi \cdot \phi$ を満たす準同型 ψ の存在はわかり，また $(M \otimes_R N)'$ について (i) を使うと $\phi = \psi' \cdot \phi'$ を満たす $\psi' : (M \otimes_R N)' \to M \otimes_R N$ の存在もわかる．また $\psi' \cdot \psi$ が $M \otimes_R N$ の恒等写像 id であることは，図式

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & M \otimes_R N \\ & {\scriptstyle \phi} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \psi' \cdot \psi} \\ & & M \otimes_R N \end{array}$$

が可換であることと，$L = M \otimes_R N$ の場合についての (i) で示した一意性を適用すると $\psi' \cdot \psi = \mathrm{id}$ がわかる．同様に $\psi \cdot \psi'$ と $(M \otimes_R N)'$ の恒等写像も等しいので，ψ が同型であることがわかる．　証明終わり

R 加群 $M \otimes_R N$ を M と N の R 上の**テンソル積**という．

定理の証明の中でも定義しているが，各 $x \in M, y \in N$ について，写像 $\phi : M \times N \to M \otimes_R N$ による像 $\phi(x,y)$ を $x \otimes y$ と書く．テンソル積 $M \otimes_R N$ の構成に用いた F は $[x,y]$ 全体で生成されるので，その剰余 R 加群である $M \otimes_R N$ は $x \otimes y$ 全体で生成される．すなわち，$M \otimes_R N$ の元 z はすべて有限和 $z = a_1(x_1 \otimes y_1) + \cdots + a_n(x_n \otimes y_n)$ の形に表される．ここで $a_1, \ldots, a_n \in R$ であるが，$a_i(x_i \otimes y_i) = (a_i x_i) \otimes y_i$ に注意すれば，$a_i x_i$ を x_i と置き直すことにより $z = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n$ の形に書けることもわかる．ここで，$M \otimes_R N$ の元 z がすべて $z = x \otimes y$ と表されるわけではないことに注意が必要である．実際，この誤解をする人は非常に多い．

すべての加群は $\mathbf{Z}$ 加群と考えられ，M, N が加群であれば $\mathbf{Z}$ 加群のテンソル積 $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$ が考えられるが，これを 単に $M \otimes N$ と書く場合がある．

例 2 M と N が有限生成 R 自由加群の場合，すなわち $M = Ru_1 \oplus \cdots \oplus Ru_m$, $N = Rv_1 \oplus \cdots \oplus Rv_n$ の場合には，$M \otimes_R N$ は不定元の集合 $\{w_{i,j} ; i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ を基底とする階数 mn の R 自由加群となる．実際，この加群を E として $\phi : M \times N \to E$ を

$$\phi(\sum_i a_i u_i, \sum_j b_j v_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j w_{i,j}$$

で定めれば双 1 次写像で，しかも E は ϕ の像で生成されており，R 加群 L に双 1 次写像 $f: M \times N \to L$ があれば

$$g(\sum_{i,j} c_{ij} w_{i,j}) = \sum_{i,j} c_{ij} f(u_i, v_j)$$

で R 準同型 $g: E \to L$ を定義すれば $g \cdot \phi = f$ となる．なお，各 $w_{i,j}$ は結果として $u_i \otimes v_j$ となる．

特殊な場合として，V, W が体 K 上の m 次元と n 次元のベクトル空間とすると，$V \otimes_K W$ は mn 次元のベクトル空間となる．

例 3 M と N が一般の R 自由加群の場合，すなわち

$$M = \bigoplus_{\delta \in \Delta} R u_\delta\ ,\ \ N = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R v_\lambda$$

の場合には，$M \otimes_R N$ は $\{u_\delta \otimes v_\lambda \mid (\delta, \lambda) \in \Delta \times \Lambda\}$ を基底とする R 自由加群となる．実際，この加群を E として $\phi: M \times N \to E$ を

$$\phi(\sum_\delta a_\delta u_\delta, \sum_\lambda b_\lambda v_\lambda) = \sum_{\delta, \lambda} a_\delta b_\lambda (u_\delta \otimes v_\lambda)$$

で定めれば双 1 次写像で，しかも E は ϕ の像で生成されており，R 加群 L に双 1 次写像 $f: M \times N \to L$ があれば

$$g(\sum_{\delta, \lambda} c_{\delta,\lambda} (u_\delta \otimes v_\lambda)) = \sum_{\delta, \lambda} c_{\delta,\lambda} f(u_\delta, v_\lambda)$$

で R 準同型 $g: E \to L$ を定義すれば $g \cdot \phi = f$ となる．

$f: M_1 \to M_2$ と $g: N_1 \to N_2$ を R 加群の準同型とする．このとき R 準同型 $f \otimes g: M_1 \otimes_R N_1 \to M_2 \otimes_R N_2$ が次のように定義される．$h: M_1 \times N_1 \to M_2 \otimes_R N_2$ を $h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$ で定義する．このとき

$$h(x + x', y) = f(x + x') \otimes g(y) = (f(x) + f(x')) \otimes g(y) = h(x, y) + h(x', y)\ ,$$

$$h(x, y + y') = f(x) \otimes g(y + y') = f(x) \otimes (g(y) + g(y')) = h(x, y) + h(x, y')\ ,$$

$$h(ax, y) = f(ax) \otimes g(y) = (af(x)) \otimes g(y) = a(f(x) \otimes g(y)) = ah(x, y)\ ,$$

$$h(x, by) = f(x) \otimes g(by) = f(x) \otimes (bg(y)) = b(f(x) \otimes g(y)) = bh(x, y)$$

より h が双 1 次写像であることがわかる．したがって，$\phi: M_1 \times N_1 \to M_1 \otimes_R N_1$ を自然な双 1 次写像とすると，R 準同型 $\psi: M_1 \otimes_R N_1 \to M_2 \otimes_R N_2$ で $h = \psi \cdot \phi$ を満たすものが一意的に存在するので $f \otimes g = \psi$ と定義する．

$\lambda: R \to S$ を可換環の準同型とする．$a \in R$ と $x \in S$ に対して $ax = \lambda(a)x$ と定義することにより，S は R 加群の構造を持つ．

M を R 加群とする．このとき R 加群のテンソル積 $S \otimes_R M$ が考えられるが，これには次のように S 加群の構造が入る．各 $b \in S$ に対して $\phi_b : S \to S$ を $\phi_b(x) = bx$ で定義すると，これは R 準同型である．そこで M の恒等写像 id_M とのテンソル積 $\phi_b \otimes \mathrm{id}_M : S \otimes_R M \to S \otimes_R M$ を b 倍の写像と定義することにより $S \otimes_R M$ は S 加群となる．ただし，S 加群であることを示すのは，難しくはないが手間がかかる．

このほかテンソル積については多くの基本的な同型あるいは等式などがある．そのうちいくつかを証明なしに書いておく．自然な同型は等式で書くことにする．

(1) L, M, N を R 加群とすると $(L \otimes_R M) \otimes_R N = L \otimes_R (M \otimes_R N)$ となる．

(2) $f : L_1 \to L_2$, $g : M_1 \to M_2$, $h : N_1 \to N_2$ を R 準同型とすると $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$ となる．

(3) $R \to S$, $S \to T$ を可換環の準同型，M を R 加群とすると $T \otimes_S (S \otimes_R M) = T \otimes_R M$ となる．ここで右辺は合成写像 $R \to S \to T$ により T を R 加群と考えてテンソル積をとったものである．

(4) $R \to S$, $R \to T$ を可換環の準同型とするとテンソル積 $S \otimes_R T$ には可換環の構造が入る．積は

$$(\sum_i x_i \otimes u_i)(\sum_j y_j \otimes v_j) = \sum_i \sum_j (x_i y_j) \otimes (u_i v_j)$$

となる．

(5) $R \to S$ を可換環の準同型，$I \subset R$ をイデアルとすると，$(R/I) \otimes_R S = S/IS$ となる．ここで IS は I の像で生成される S のイデアルである．

(6) I, J を R のイデアルとすると $(R/I) \otimes_R (R/J) = R/(I + J)$ となる．

(7) $R \to S$ を可換環の準同型とすると，多項式環 $R[x_1, \ldots, x_n]$ について

$$S \otimes_R R[x_1, \ldots, x_n] = S[x_1, \ldots, x_n]$$

となる．

(8) 多項式環のテンソル積については

$$R[x_1, \ldots, x_m] \otimes_R R[y_1, \ldots, y_n] = R[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$$

が成り立つ．