

土橋カスプ特異点 2018 (ver. 1.0)

東北大学大学院理学研究科（名誉教授） 石田 正典

2025 年 5 月 31 日

1 土橋カスプ特異点 2018 の詳しい構成

これは土橋が 2018 年の論文で与えた 4 次元カスプ特異点の不変量などの研究なので、まずはこの特異点の詳しい構成法について説明する．なお土橋の論文 [T2] ではベクトルなどの番号付けを 1, 2, 3, 4 としているが、計算機プログラム化を容易にするため、番号付けを 0, 1, 2, 3 に変えた．

最初に 4 つのコクセターグラフについて対応するコクセター群を土橋の論文に従って線形群として具体的に与える．そのうちで最も重要な最初の群は距離空間としての鏡映群ではない．行列のとり方により 2 通りあるので、それらを A 型および B 型として区別する．



A 型 : $W = \langle s_0, s_1, s_2, s_3 \rangle$

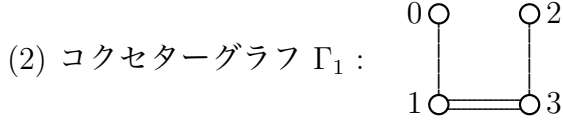
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_0 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ s_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ s_i(\mathbf{e}_j) &= \begin{cases} \mathbf{e}_j & j \neq i \\ \mathbf{u}_j & j = i \end{cases} \end{aligned}$$

W は無限群

B 型では

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で, 他は同じとする.

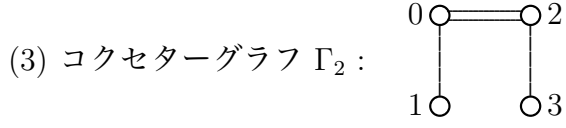


土橋の論文では Γ_1, Γ_2 のコクセター群 W_1, W_2 を (2), (3) のように表現しているが, ここでは直接には使わない. どちらも土橋の論文の後半で使われている正 24 面体群としての直交群表現を使い, それぞれ W', W'' と記述する.

$$W_1 = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_0 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ x_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ x_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ x_i(\mathbf{e}_j) &= \begin{cases} \mathbf{e}_j & j \neq i \\ \mathbf{v}_j & j = i \end{cases} \end{aligned}$$

W_1 は (3, 4, 3) 型 4 次元正多面体 (24-Cell) の自己同型群で位数は 1152



$$W_2 = \langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle$$

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

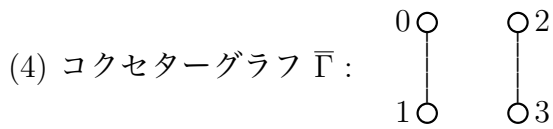
$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y_i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} \mathbf{e}_j & j \neq i \\ \mathbf{w}_j & j = i \end{cases}$$

W_2 は (3, 4, 3) 型 4 次元正多面体 (24-Cell) の自己同型群で位数は 1152



$$\bar{W} = \langle z_0, z_1, z_2, z_3 \rangle$$

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_0 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
z_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
z_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
z_i(\mathbf{e}_j) &= \begin{cases} \mathbf{e}_j & j \neq i \\ \mathbf{t}_j & j = i \end{cases}
\end{aligned}$$

$\overline{W}$ は位数 6 の 2 面体群 D_6 の直積 $D_6 \times D_6$ に同型で、位数は 36 である. . 左の D_6 は $\langle z_0, z_1 \rangle$, 右の D_6 は $\langle z_2, z_3 \rangle$ と同型である. $z_0 z_1$ と $z_2 z_3$ はそれぞれ位数 3 で $b = z_0 z_1 z_2 z_3$ は $\overline{W}$ で位数 3 となる. したがって $B = \{1, b, b^2\}$ は $\overline{W}$ の位数 3 の部分群となる.

2 Sage プログラムのための連動コクセター群

土橋の論文では明確には使われていないが、ここでは群の作用の固定点を調べるためコクセター複体を用いる ([H] 参照). 一般に d 個の変換 $s_0, \dots, s_{d-1}$ で生成されるコクセター群 W について、その**コクセター複体**と呼ばれる単体的複体が次のように定義される.

σ を頂点集合 $v_0, \dots, v_{d-1}$ をもつ $d-1$ 次元単体とする. $I_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$ の空でない各部分集合 I について σ_I を $\{v_i : i \in I\}$ を頂点とする σ の面とし, W_I を $\{s_i \in I_d \setminus I\}$ で生成される W の部分群とする. 特に $\sigma_{I_d} = \sigma$, $W_{I_d} = \{1\}$ である. このときコクセター複体は $d-1$ 次元の単体的複体として

$$K_W = \coprod_I \{(\gamma, \sigma_I) : \gamma \in W/W_I\}$$

で定義される. ここで (γ, σ_I) は σ_I を γ で変換した単体 $\gamma(\sigma_I)$ とみなされ, γ_1, γ_1 が同じ W_I の同じ左剰余類に含まれれば $\gamma_1(\sigma_I)$ と $\gamma_1(\sigma_I)$ は同一視される. $\delta \in W$ と $\gamma(\sigma_I) \in K_W$ に対して

$$\delta(\gamma(\sigma_I)) = (\delta\gamma)(\sigma_I)$$

と定義することによりコクセター群 W は複体 K_W に左から作用する.

$$\delta(\sigma_I) = \delta(1(\sigma_I)) = (\delta, \sigma_I)$$

で, 右辺が $(1, \sigma_I)$ に等しいのは $\delta \in W_I$ の場合であるから, 各 I について W_I は $\sigma_I = (1, \sigma_I)$ の固定群となる. K_W は多面体

$$|K_W| = \bigcup_{(\gamma, \sigma_I) \in K_W} \gamma(\sigma_I)$$

の単体分割と考えられ, W は $|K_W|$ に作用する. ただし, W が無限群の場合は K_W は無限多面体である. すべての $I \neq \emptyset$ について W_I が有限群であれば $|K_W|$ は位相多様体となる. 各 I について

$$(K_W)_I = \{(\gamma, \sigma_I) : \gamma \in W/W_I\}$$

とすれば複体 K_W は $\{(K_W)_I : I \subset I_d, I \neq \emptyset\}$ に分割されるが, これは W の作用による K_W の軌道分解である.

補題 2.1 $\delta \in W$ が $|K_W|$ に固定点を持たない必要十分条件は, 任意の $i \in I_d$ について δ が軌道 $(K_W)_{\{i\}}$ に固定点を持たないことである.

証明 必要性は $\delta(\gamma(\{v_i\})) = \gamma(\{v_i\})$ であれば $|K_W|$ で $\delta(\gamma(v_i)) = \gamma(v_i)$ であるからわかる. ある $x \in |K_W|$ について $\delta(x) = x$ であれば x を含む最小の $\gamma(\sigma_I)$ について $\delta(\gamma(\sigma_I)) = \gamma(\sigma_I)$ となるので $i \in I$ について $\delta(\gamma(\{v_i\})) = \gamma(\{v_i\})$ となり十分条件でもある. 証明終わり

プログラム化して計算するため, 4 つのコクセター群の連動を考える. s_0, s_1, s_2, s_3 を各 $i = 0, 1, 2, 3$ について

$$s_i = (s_i[0], s_i[1], s_i[2], s_i[3])$$

として, すべての i について共通に

$$s_0[i]^2 = s_1[i]^2 = s_2[i]^2 = s_3[i]^2 = 1$$

$$(s_0[i]s_1[i])^3 = (s_2[i]s_3[i])^3 = 1$$

$$(s_0[i]s_3[i])^2 = (s_1[i]s_2[i])^2 = 1$$

とするほか, 各 i ごとに

$$(s_0[0]s_2[0])^4 = (s_1[0]s_3[0])^4 = 1$$

$$(s_0[1]s_2[1])^2 = (s_1[1]s_3[1])^4 = 1$$

$$(s_0[2]s_2[2])^4 = (s_1[2]s_3[2])^2 = 1$$

$$(s_0[3]s_2[3])^2 = (s_1[3]s_3[3])^2 = 1$$

を基本関係式として定義する．組 $x = (x[0], x[1], x[2], x[3])$, $y = (y[0], y[1], y[2], y[3])$ の積を

$$xy = (x[0]y[0], x[1]y[1], x[2]y[2], x[3]y[3])$$

と定義するなかで，単位元 $1 = (1, 1, 1, 1)$ に s_0, s_1, s_2, s_3 を重複を許して左から任意の順に積をとったものの全体を $\mathcal{W}$ とする．また

$$\{s_0[0], s_1[0], s_2[0], s_3[0]\}$$

によるコクセター群を W ,

$$\{s_0[1], s_1[1], s_2[1], s_3[1]\}, \{s_0[2], s_1[2], s_2[2], s_3[2]\}$$

によるコクセター群をそれぞれ W', W'' とし，さらに

$$\{s_0[3], s_1[3], s_2[3], s_3[3]\}$$

によるコクセター群を $\overline{W}$ とする． W は無限群， W' と W'' は位数 1152 で 4 次元空間の正 24 面体の裏返しも含む直交変換による自己同型群に同型である． $\overline{W}$ は位数 6 の二面体群（正三角形の二面体群であり，ここでは D_6 と書く）2 つの直積に同型で位数 36 である．ここで 1 つの D_6 は $s_0[3], s_1[3]$ で生成され，他方は $s_2[3], s_3[3]$ で生成される．積 $s_0[3]s_1[3]$ と $s_2[3]s_3[3]$ はそれぞれ三角形の 3 分の 1 の回転である．

定義から $\mathcal{W}$ は直積 $W \times W' \times W'' \times \overline{W}$ の部分群である．各 $x \in \mathcal{W}$ から $x[i]$ への対応は射影であり全射準同型である． $\phi: \mathcal{W} \rightarrow W$ の核を H , $\phi': \mathcal{W} \rightarrow W'$ の核を H' , $\phi'': \mathcal{W} \rightarrow W''$ の核を H'' , $\bar{\phi}: \mathcal{W} \rightarrow \overline{W}$ の核を $\overline{H}$ とすれば，各コクセター群の基本関係式から

$$H \subset H', H \subset H'', H' \subset \overline{H}, H'' \subset \overline{H},$$

であり，特に $H = H \cap H' \cap H'' \cap \overline{H} = \{1\}$ で ϕ は同型写像である．以後 ϕ で同一視して $\mathcal{W} = W$, $s_i = s_i[0]$ ($i = 0, 1, 2, 3$) とする．

$|W : H'| = |W'| = 1152$, $|W : H''| = |W''| = 1152$, $|W : \overline{H}| = |\overline{W}| = 36$ であるから

$$|\overline{H} : H'| = |\overline{H} : H''| = 1152/36 = 32$$

である．

補題 2.2 次が成り立つ．

- (1) $\overline{H} = H'H''$,
- (2) $|W : H' \cap H''| = 36864$,
- (3) $\overline{H}/(H' \cap H'') \simeq \overline{H}/H' \times \overline{H}/H''$.

証明 (1) W と $\bar{W}$ の基本関係式を比べれば, $\bar{H}$ は W の正規部分群として 2 つの元 $(s_0 s_2)^2, (s_1 s_3)^2$ で生成されることがわかる. 一方 $H', H'' \subset \bar{H}$ は W の正規部分群であるから $H'H''$ も正規部分群で $\bar{H}$ に含まれる. $(s_0 s_2)^2 \in H', (s_1 s_3)^2 \in H''$ であるから $H'H''$ は $\bar{H}$ に一致する.

群の同型定理により $H'H''/H' \simeq H''/H' \cap H''$ であるから

$$|H'H'' : H'| = |H'' : H' \cap H''|$$

である. よって

$$|W : H' \cap H''| = |W : H''| |H'' : H' \cap H''| = |W : H''| |\bar{H} : H'| = 1152 \cdot 32 = 36864$$

となる.

(3) は 3 つの同型

$$\begin{aligned} H'H''/(H' \cap H'') &\simeq (H''/H' \cap H'') \times (H'/H' \cap H''), \\ H''/H' \cap H'' &\simeq H'H''/H', \\ H'/H' \cap H'' &\simeq H'H''/H'' \end{aligned}$$

と (1) からわかる. どちらも位数 $1024 = 32^2$ の群である.

証明終わり

正 24 面体 R_{24} は 4 次元空間 $\mathbf{R}^4$ の 24 個の点

$$\begin{bmatrix} \pm 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

の凸包として実現できる. R_{24} の 24 個の 3 次元面は座標を (x_0, x_1, x_2, x_3) とすれば

$$\pm x_i + \pm x_j = 2 \quad (0 \leq i < j \leq 3)$$

で定義される. 4 点

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は R_{24} の $x_0 + x_1 = 2$ で定義される 3 次元面 Q の点で, $\mathbf{p}_2$ は Q の頂点, $\mathbf{p}_3$ は $\mathbf{p}_2$ を端点とする Q の一つの辺の中点, $\mathbf{p}_1$ は $\mathbf{p}_2$ と $\mathbf{p}_3$ を含む Q の一つの 2 次元面 (正三角形) の中心, $\mathbf{p}_0$ はこれらを含む正 8 面体 Q の中心となっている.

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

は同じ正 24 面体 R_{24} の点で, $\mathbf{q}_0$ は $x_0 + x_2 = 2$ で定義される 3 次元面の中心で, その他の $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ は $x_0 + x_1 = 2$ で定義される Q の点である. 4 次正方行列を

$$\begin{aligned} P &= [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3], \\ C_0 &= [\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3], \quad C_1 = [\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3], \\ C_2 &= [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_3], \quad C_3 = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3] \end{aligned}$$

で定義し, さらに行列 R_0, R_1, R_2, R_3 を

$$R_0 = C_0 P^{-1}, \quad R_1 = C_1 P^{-1}, \quad R_2 = C_2 P^{-1}, \quad R_3 = C_3 P^{-1}$$

で定義する. これらはユークリッド空間の鏡映変換であり, 特に直交行列である.

$$R_0^2 = R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = 1,$$

$$(R_0 R_1)^3 = 1, \quad (R_2 R_3)^3 = 1, \quad (R_0 R_2)^2 = 1,$$

$$(R_1 R_3)^4 = 1, \quad (R_0 R_3)^2 = 1, \quad (R_1 R_2)^2 = 1$$

が基本関係式として成り立ち, 線形群 $\langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$ は, この正 24 面体の 4 次元裏返しも含む自己同型群となる. 位数は 1152 である. コクセター群 W' と W'' はそれぞれ

$$s_0[1] = R_0, \quad s_1[1] = R_1, \quad s_2[1] = R_2, \quad s_3[1] = R_3$$

$$s_0[2] = R_1, \quad s_1[2] = R_0, \quad s_2[2] = R_3, \quad s_3[2] = R_2$$

と置けば表現される.

$\phi' : W \rightarrow W'$ に付随してコクセター複体の写像

$$\phi' : K_W \rightarrow K_{W'}$$

が $\phi'(\gamma(\sigma_I)) = \phi'(\gamma)(\sigma_I)$ で定義される. ここで記号 σ_I は K_W と $K_{W'}$ で共用している. $\delta \in W$ について

$$\phi'(\delta(\gamma(\sigma_I))) = \phi'(\delta\gamma)(\sigma_I) = \phi'(\delta)(\phi'(\gamma)(\sigma_I)) = \phi'(\delta)(\phi'(\gamma(\sigma_I)))$$

であるから, この写像は W と W' の作用に ϕ' を通して可換である. 同様に ϕ'' と $\bar{\phi}$ についても, 作用と可換なコクセター複体の写像

$$\phi'' : K_W \rightarrow K_{W''}, \quad \bar{\phi} : K_W \rightarrow K_{\bar{W}}$$

が定義される.

これらを用いて W の元による写像が K_W に固定点を持つ条件を与えることが出来る.

補題 2.3 $\delta \in W$ は $\phi'(\delta)$ が $K_{W'}$ に固定点を持たないか, または $\phi''(\delta)$ が $K_{W''}$ に固定点を持たなければ, K_W に固定点を持たない.

証明 ある $\gamma(\sigma_I) \in K_W$ について $\delta(\gamma(\sigma_I)) = \gamma(\sigma_I)$ であれば, 作用の可換性から $\delta(\phi'(\gamma)(\sigma_I)) = \phi'(\gamma)(\sigma_I)$ となる. ϕ'' についても同様である. 証明終わり

補題 2.4 $\overline{H} \setminus (H' \cup H'')$ の元は K_W に固定点を持たない.

証明 $\delta \in \overline{H}$ が固定点 $\delta(\gamma(v_i)) = \gamma(v_i)$ を持てば $\gamma^{-1}\delta\gamma(v_i) = v_i$ となり $\gamma^{-1}\delta\gamma \in W_{\{i\}}$ となる. $i = 0$ または $i = 2$ であれば $W'_{\{i\}} \simeq \overline{W}_{\{i\}}$ であり, $\delta \in \overline{H}$ の仮定から $\bar{\phi}(\delta) = 1$ であるから $\phi'(\delta) = 1$ がわかる. したがって $\gamma^{-1}\delta\gamma \in H'$ となり, H' は正規部分群なので $\delta \in H'$ である. $i = 1$ または $i = 3$ の場合は同様に $\delta \in H''$ がわかる. 証明終わり

補題 2.5 W の部分群 $H' \cap H''$ は K_W に自由に作用する. すなわち $H' \cap H''$ の 1 以外の元は固定点を持たない.

証明 $\delta \in H' \cap H''$ が $\gamma(v_i)$ を固定すれば $\gamma^{-1}\delta\gamma \in W_{\{i\}}$ である. $i = 0$ または $i = 2$ であれば $W_{\{i\}} \simeq W''_{\{i\}}$ で, 正規部分群 H'' は $\gamma^{-1}\delta\gamma$ を含むので $\gamma^{-1}\delta\gamma = 1$ となり $\delta = 1$ である. $i = 1$ または $i = 3$ の場合も同様である. 証明終わり

補題 2.6 $\delta \in W$ は $\bar{\phi}(\gamma)$ が $K_{\overline{W}}$ に固定点を持たなければ, K_W に固定点を持たない. 特に $h = s_0s_1s_2s_3$ とすると $h\overline{H}$ と $h^2\overline{H}$ の元は K_W に固定点を持たない.

証明 前半は補題 2.3 と同様に明らかである. $\bar{\phi}(h) = s_0[3]s_1[3]s_2[3]s_3[3]$ であるが, $s_0[3]s_1[3]$ と $s_2[3]s_3[3]$ はそれぞれ 6 次二面体群の位数 3 の元であり, 多面体の変換としては三角形の回転なので辺と頂点に固定点はない. $K_{\overline{W}}$ はこれらの三角形の連接複体 (ジョイン) であり, これにも固定点はない. 証明終わり

W' の部分群 $\overline{H}/H'$ を K' , W'' の部分群 $\overline{H}/H''$ を K'' と置く. K' と K'' は

$$\pm \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ \epsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 & 0 \\ \epsilon_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

において ϵ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) を $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_3 = 1$ を満たす ± 1 で動かしたものの全体に等しい. これらの行列はすべて 2 乗すると I か $-I$ になる. したがって剰余群 $K'/\{\pm I\}$, $K''/\{\pm I\}$ は位数 2 の巡回群 4 つの直積に同型である.

E' と E'' を 8 個の行列

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

からなる K' と K'' の部分群とする．これらがそれぞれ $K_{W'}$, $K_{W''}$ に自由に作用することは，単体の頂点はすべて $\mathbf{Z}^4$ の点で各行列が $\mathbf{Z}^4$ の自己同型となるので，これらの行列の単位元以外が固有値 1 を持たないことで確認できる．

$W^\# = W/(H' \cap H'')$ と置く． $W^\#$ は位数 $36864 = 3^2 2^{12}$ の群となる．補題 2.2 より $W^\#$ は $K' \times K''$ を正規部分群として含み $W^\#/(K' \times K'') = \overline{W}$ となる．補題 2.5 より $\delta \in W$ の $W^\#$ への像 $\bar{\delta}$ が商複体 $K_W/(H' \cap H'')$ に固定点を持たないことは $(H' \cap H'')\delta$ のすべての元が固定点を持たないことと同値である． $W^\#$ のある指数 48 の部分群が商複体に自由に作用すれば，その引き戻しとして K_W に自由に作用する W の指数 48 の部分群が得られる．

位数 $64 = 2^6$ の部分群 $E' \times E''$ の $W^\#$ での指数は $576 = 3^2 2^6$ である．

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と置く． $\{I_4, D_1, D_2, D_3\}$ はクラインの 4 元群である． $E = E' \times E''$ と位数 4 の部分群

$$\{(I_4, I_4), (D_1, D_1), (D_1, D_2), (D_2, D_1)\} \subset K' \times K''$$

で生成される部分群 L の指数は $144 = 3^2 2^4$ となる． L の作用が自由であることは

$$(D_1, D_1)E, (D_2, D_3)E, (D_3, D_2)E$$

がすべて補題 2.4 の範囲に含まれることからわかる．さらに補題 2.6 の h の $W^\#$ への像

$$\bar{h} = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \right)$$

について

$$\bar{h}^{-1}(D_1, D_1)\bar{h} \in (D_2, D_3)E, \quad \bar{h}^{-1}(D_2, D_3)\bar{h} \in (D_3, D_2)E, \quad \bar{h}^{-1}(D_3, D_2)\bar{h} \in (D_1, D_1)E$$

となるので， $\bar{h}$ は L の正規化群に含まれる． $\bar{h}^3 \in E \subset L$ なので L と $\bar{h}$ で生成される部分群 T の指数が $48 = 3 \cdot 2^4$ となる．補題 2.6 より $\bar{h}L$ と $\bar{h}^2L$ の元に固定点はないので T の商複体への作用は自由である．この $T \subset W^\#$ の W への引き戻し T_{48} が K_W に自由に作用する指数 48 の部分群である．

3 カスプ特異点の Todd 種数とゼータ零値

$r \geq 2$, $N \simeq \mathbf{Z}^r$, $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}^r$ とする. トーリック型カスプ特異点は下記の条件を満たす開凸錐 $C \subset N_{\mathbf{R}}$ と $\text{Aut}(N) \simeq \text{GL}(r, \mathbf{Z})$ の部分群 Γ によって定義される.

- (1) C は閉包 $\overline{C}$ が強凸, すなわち $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$ となっている.
- (2) Γ の各元は C を不変に置いて, さらに $(C/\mathbf{R}_+)$ に自由に作用していて商空間 $(C/\mathbf{R}_+)/\Gamma$ がコンパクトである.

このとき $N_{\mathbf{R}}$ の $C \cup \{0\}$ を台とする Γ 不変な非特異扇 Σ が存在する. Σ に対応する非特異トーリック多様体を $Z(\Sigma)$ とすると, $Z(\Sigma)$ は代数的トーラス T_N を開部分多様体して含み, $D(\Sigma) = Z(\Sigma) \setminus T_N$ は無限個の非特異でコンパクトな既約成分からなる余次元 1 の部分多様体である. 基礎体を複素数体として複素解析的に考え, $D(\Sigma)$ の適当な開近傍 U をとると, Γ が U に自由に作用して, 商複素多様体 $\overline{U} = U/\Gamma$ が有限個の既約成分からなる因子 $\overline{D} = D(\Sigma)/\Gamma$ を含む. この因子 $\overline{D}$ が複素解析的に 1 点 p に縮小し得られる孤立特異点 (V, p) がトーリック型カスプ特異点である ([T1] 参照). 作り方から $\overline{U}$ がこの孤立特異点の非特異化であり $\overline{D}$ がその例外因子となる.

2018 年の土橋カスプ特異点は前節のコクセター群 W を用いて次のように構成される. $N = \mathbf{Z}^4$ とし π を $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ で生成される $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^4$ の 4 次元非特異錐とする. 前節のコクセター群 W による線形作用により

$$C_0 = \bigcup_{\gamma \in W} \gamma(\pi)$$

と置けば, $C = C_0 \setminus \{0\}$ は $|K_W| \times \mathbf{R}_+$ に位相同型な開凸錐となる. 部分集合 $I \subset \{0, 1, 2, 3\}$ について π_I を $\{\mathbf{e}_i; i \in I\}$ で生成される π の面とすると

$$\Delta = \{\gamma(\pi_I); I \subset \{0, 1, 2, 3\}, \gamma \in W/W_I\}$$

が非特異扇でその台 $|\Delta|$ は C_0 に等しい. ここでは $I = \emptyset$ の場合は $\pi_I = \{0\}$, $W_I = W$ である. W は C に作用していて W_I ($I \neq \emptyset$) の元などに固定点は多くあるが, 適当な部分群 $\Gamma \subset W$ が C に自由に作用していれば組 (C, Γ) からトーリック型カスプ特異点を得られる. 前節で与えた指数 48 の部分群 T_{48} はその 1 つであり, 土橋カスプ特異点 2018 を与える.

Todd 種数は大域的な多様体についてはヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理の定理により構造層のオイラー数と等しくなる不変量であるが, 土橋カスプ特異点の場合は局所的に計算出来て値は一般に分数となる. 例えば 2 次元の (ヒルベルトモジュラー) カスプ特異点では例外因子は有理曲線のサイクルとなるが, 自己交点数が $a_1, \dots, a_s$ ($s \geq 2$) の場合, Todd 種数は

$$\frac{a_1 + \dots + a_s}{12}$$

である.

T_{48} で定義されるカスプ特異点の場合は例外因子は 4 つの既約因子 D_0, D_1, D_2, D_3 で構成されていて, Todd 種数は交点数として

$$\kappa_4 \left[\prod_{i=0}^3 \frac{D_i}{1 - \exp(-D_i)} \right] = \frac{D_0 D_1 D_2 D_3}{16} + \frac{D_0^2 D_1 D_2 + \cdots + D_1 D_2 D_3^2}{48} \\ + \frac{D_0^2 D_1^2 + \cdots + D_2^2 D_3^2}{144} - \frac{D_0^4 + D_1^4 + D_2^4 + D_3^4}{720}$$

で計算される. 最初の $\kappa_d[f]$ は D_0, D_1, D_2, D_3 を変数とする形式的冪級数の斉次 d 次の成分を表す. 右辺には D_0, D_1, D_2, D_3 の単項式が $1 + 12 + 12 + 4 = 29$ 個あるが, 実際の計算では交わりが多くて連結成分に分かれるので, 連結成分ごとに考えて $48 + 96 \times 3 + 52 \times 2 + 52 + 4 = 496$ 個の交点数を求める必要がある. コクセター群の生成元の s_1, s_3 の取り方には A 型と B 型で違いがあり, それぞれ別の特異点なので交点数も異なる.

$D_0^4, D_1^4, D_2^4, D_3^4$ の計算が最も複雑であるが計算ソフトの SageMath を用いた計算を行った結果, A 型の場合

$$D_0^4 = -136, \quad D_1^4 = -204, \quad D_2^4 = -184, \quad D_3^4 = -160$$

となり, 他の項も計算して Todd 種数は $\frac{19}{20}$ とわかった.

また, B 型の場合は

$$D_0^4 = -86, \quad D_1^4 = -84, \quad D_2^4 = -176, \quad D_3^4 = -304$$

となり, 同様に他の項も計算して Todd 種数は $\frac{11}{12}$ であった.

次にゼータ零値について説明する. $M = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N)$ として $N_{\mathbf{R}}$ の双対ベクトル空間 $M_{\mathbf{R}} = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ を定義する. $M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}, (y, x) \mapsto \langle y, x \rangle$ を自然な完全双 1 次写像とする. このとき, 開凸錐 C の特性関数 $\phi_C(x)$ が

$$\phi_C(x) = \int_{C^*} \exp(-\langle x^*, x \rangle) dx^*$$

で定義される. ここで, $C^* \subset M_{\mathbf{R}}$ は C の双対開凸錐である. 尾形のゼータ関数 $Z(C, \Gamma; s)$ が $\text{Re } s > 1$ の場合に

$$Z(C, \Gamma; s) = \sum_{x \in (N \cap C)/\Gamma} \phi_C(x)^s$$

で定義され, さらに全複素平面に有理型関数として解析接続される ([O] 参照). また $s = 0$ では正則である. ゼータ零値 $Z(C, \Gamma; 0)$ が有理数であることはわかっている ([I1] 参照). ゼータ零値の積分表示は尾形の論文にあるが, それを発展させて, 扇の群による商をシステム化した T 複体を使ってゼータ零値を計算する方法が [I1] にある.

その方法を簡単に説明すると、まず d 次元非特異錐の原始的な生成元を $x_0, \dots, x_{d-1}$ として d 次斉次多項式

$$\kappa_d \left[\prod_{i=0}^{d-1} \frac{x_i}{\exp(x_i) - 1} \right]$$

を考える.

$$\frac{x}{\exp(x) - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots$$

に注意すると $d = 1, d = 2$ なら

$$-\frac{x_0}{2}, \quad \frac{x_0^2 + x_1^2}{12} + \frac{x_0 x_1}{4},$$

$d = 3$ なら

$$-\frac{x_0^2 x_1 + \dots + x_1 x_2^2}{24} - \frac{x_0 x_1 x_2}{8},$$

$d = 4$ なら

$$-\frac{x_0^4 + \dots + x_3^4}{720} + \frac{x_0^2 x_1^2 + \dots + x_2^2 x_3^2}{144} + \frac{x_0^2 x_1 x_2 + \dots + x_1 x_2 x_3^2}{48} + \frac{x_0 x_1 x_2 x_3}{16}$$

のようになるが、これを T 複体 $(\Delta \setminus \{0\})/T_{48}$ のすべての非特異錐に与えて、それらの多項式を面となる低い次元の錐に順次移す作業をすると、1 次元錐以外は 0 で 1 次元錐では原始生成元を x とすれば x の定数倍に出来る. このとき、ゼータ零値はすべての 1 次元錐での係数の和となる. ただし、各錐ごとに座標系が異なるため、多項式を低い次元の錐に移動させるには逐次座標をそろえる変数変換が必要となる.

この計算を 2018 年の A 型と B 型両方の特異点について SageMath でプログラム化を行ってゼータ零値を求めることが出来た.

A 型の場合：ゼータ零値は $\frac{1}{60}$ となる.

B 型の場合：ゼータ零値は $\frac{1}{12}$ となる.

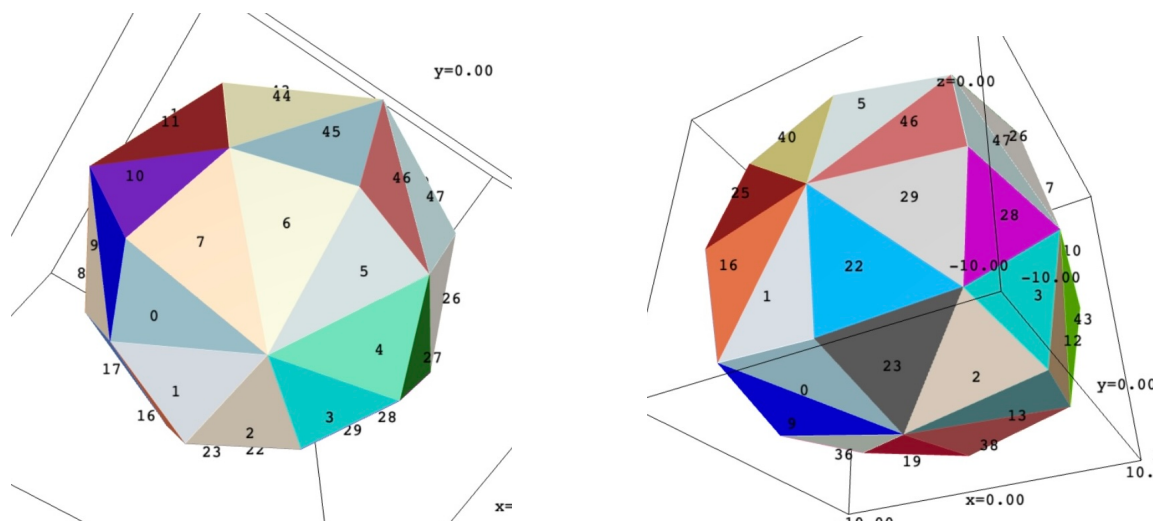
これらの計算に用いた実行可能な SageMath プログラムは東北大学数学教室内の個人のページ

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~ishida.masanori>

で公開する予定である. 計算ソフト SageMath のアドレスは下記である. ここにはオンラインで利用できる SageMathCell もある.

<https://www.sagemath.org>

この特異点の非特異化の例外因子は 4 つの既約因子 D_0, D_1, D_2, D_3 を持ち、これらは 3 次元の非特異トーリック多様体である。例外因子全体はこれらの既約因子の単純正規交叉で 48 個の通常 4 重点を持つという想像しにくい構造をしている。これらの既約因子それぞれに対応する Δ の部分扇の超平面切断として 3 次元凸多面体が得られる。下図は A 型の D_0 と D_1 から得た多面体を 2 次元に射影した図である。



2 つは 4 角形を面とする微妙に違う 24 面体で、0 から 47 の番号の付けられた 48 個の三角形に分割されている。各三角形はそれぞれ D_0, D_1 の特定の点に対応する。他の 2 つも同様で同じ番号の付けられた既約因子の 4 点が集まって例外因子の 4 重点を作っている。この作図にも SageMath を用いた。

多面体の形は A 型と B 型で異なるが、三角形の上に書かれた数字の配置は A 型と B 型で共通である。後ろの 2 ページの図はこの配置を立方体の展開図で記入している。すなわち、4 つの立方体はカスプ特異点の非特異化の因子 D_0, D_1, D_2, D_3 に対応していて、各立方体の三角形は単純正規交叉である例外因子で 4 重点となる点に対応している。同じ番号のついた三角形がそれぞれの立方体に 1 つずつあり、それらに対応する 4 点が集まって例外因子の 4 重点となっている。



Diagram illustrating a 4x4 grid of numbers, labeled D_0 . The grid is divided into four quadrants by a horizontal and vertical line. The numbers are arranged in a specific pattern:

36	35	30	29	20	19	8	15
37	34	31	28	21	18	9	14
38	33	24	27	22	17	10	13
39	32	25	26	23	16	11	12
40	47	46	45	2	1	7	6
41	44	43	42	3	0	4	5





D_2



参考文献

- [C] H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, 3rd edn., Dover, New York, 1973.
- [H] J. E. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge, 1990.
- [I1] M.-N. Ishida, T-complexes and Ogata's zeta zero values, in *Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties* (Y. Namikawa and K. Hashimoto, eds.), Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and Academic Press, Boston, San Diego, New York, Berkeley, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1989, 351-364.
- [I2] M.-N. Ishida, Polyhedral Laurent series and Brion's equalities, International J. Math. **1**, (1990), 251-265.
- [I3] M.-N. Ishida, Cusp singularities given by reflections of stellable cones, International J. Math. **2**, (1991), 635-657.
- [I4] M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **294**, (1992), 81-97.
- [O] S. Ogata, Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. **37**, (1985), 367-384.
- [T1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, (1983), 607-639.
- [T2] H. Tsuchihashi, Examples of four dimensional cusp singularities, J. Math. Soc. Japan **70-3**, (2018), 1047-1062.
- [V] È. B. Vinberg, Discrete linear groups generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **35**, (1971), 1083-1119.