

以前, 3 変数で 4 つの単項式の和で定義された代数曲面を [I] に従って調べるための C プログラム DELS.c を作りましたが, 今回これを Web ブラウザで実行できるように JavaScript で書き直して HTML ファイルに作り直しました. 基礎体は代数的閉体として, 標数が正の場合は条件 [I, Assumption 3.2] が付きます. 以下, このプログラムの使い方の説明です.

例として

$$2Z + 5X^2Y + X^4YZ - XY^2Z^2 = 0$$

について説明する. 左辺の 4 つの単項式をそれぞれ a, b, c, d とし, 各単項式について 0 でない定数である係数は無視して

(X の指数), (Y の指数), (Z の指数)

をスペースを置いて並べたものをメモしておく. この例の場合

```
a: 0 0 1
b: 2 1 0
c: 4 1 1
d: 1 2 2
```

である. ただし一般にはこれらを座標とする $\mathbf{R}^3$ の 4 点が同一平面に無いという条件がつく. さらに正標数の場合は四面体の体積に条件がつく. 指数は負のものがあったとしても良く -30 から 30 ぐらいまで計算可能である. しかし非特異有理曲線の列が長くなるので ± 20 ぐらいまでが適当である.

HTML ファイルを Web ブラウザで起動すると a, b, c, d の入力欄が表示されるので

```
a: 0 0 1
```

などと d まで入れて右の「実行」をクリックすると結果が CANVAS に表示される (図 1).

「実行」のボタンが赤に変わるとともに $4\ 1\ 1$ と記入した c が $1\ 2\ 2$ になり, d がその逆になっていることに気づく. これはこれら 4 点を頂点とする 4 面体の向きづけを揃えるため 2 つの単項式を便宜上入れ替えたことを示している. この交換は入れるデータにより起こらない場合もある.

CANVAS に表示された A, B, C, D は [I, Figure 1] にある非特異化された代数曲面の 4 つの非特異既約曲線 $\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ を表している. その右にこれらの曲線の種数と自己交点数が書かれている.

これら 4 つの曲線から選んだ 2 つの曲線について, これらをつなぐ非特異有理曲線のチェーンが存在する. CANVAS の下の部分にはこれらの曲線の自己交点数が,

Delsarte 曲面 (ver. 1.0)

チェーン: 現在ファイル読み込み機能はなし

a: b: c: d:

p q r: 方程式 $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$

CANVAS 数値は半角でスペースを入れて並べる. 実行すると canvas に結果が表示される

genus and self-intersection number			red: fixed components of the canonical system	
A	0	-2	minimal surface	
B	0	-2	geometric genus = 2	
C	0	-2	interior points = 2	
D	1	0	$K^2 = 0$	number of chains
A	(2 2 2 2 2 2 2 2)		B	[1]
A	(2 2 2 2 2 2 2 2)		C	[1]
A	(3)		D	[1]
B	(2 2 2 2 2 2 2 2)		C	[1]
B	(3)		D	[1]
C	(3)		D	[1]

図 1: 楕円曲面

デフォルトでは -1 倍にして, 横に並べて書かれている. 交点はすべて通常 2 重点である. このチェーンは 2 次元トーリック特異点, すなわち巡回商特異点の非特異化として現れるので, 自己交点数は常に -2 以下の整数である. 2 つの曲線をつなぐチェーンは同じ数字列のものが複数本現れうるが, その本数が右のかっこの中に書かれている. チェインは長さが 0 の場合もあって, その場合は 2 つの曲線が直接かっこ内の数の点で交わっている. 自己交点数は左上の「チェーン」のところのメニューから「通常表示」を選んで「更新」ボタンを押すとマイナス符号つきで表示される.

CANVAS 上部にはこの曲面の幾何種数と標準因子の自己交点数が書かれている. ただしこの曲面は非特異ではあるが一般には極小とは限らない. 幾何種数が 0 の時は (canonical divisor is not effective), 幾何種数が正で第一種例外曲線を含まないときは (minimal surface), 第一種例外曲線を含むときは (not minimal surface), と右に表示される. 図 1 の場合は A, B, C を含む 27 個の -2 曲線のサイクルを含む $K^2 = 0$, $p_g = 2$ の極小曲面であり, このサイクルと曲線 D とファイバーとする射影直線上の楕円曲面である.

Delsarte 曲面 (ver. 1.0)

チェーン: 現在ファイル読み込み機能はなし

a: b: c: d:

pqr: 方程式 $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$

CANVAS 数値は半角でスペースを入れて並べる. 実行すると canvas に結果が表示される

genus and self-intersection number				red: fixed components of the canonical system	
A	0	-2		not minimal surface	
B	0	-1	excep.	geometric genus = 1	
C	0	-1	excep.	interior points = 1	
D	0	-1	excep.	K ² = -8	
					number of chains
A	(-2 -2 -5)			B	[1]
A	(-2 -2 -2 -4)			C	[1]
A	(-2 -3 -3)			D	[1]
B	(-2 -2 -5)			C	[1]
B	(-7 -2)			D	[1]
C	(-2 -7)			D	[1]

図 2: $T_{3,4,5}$

別の例として

$$X^3 + Y^4 + Z^5 - XYZ = 0$$

を「通常表示」でやってみると図 2 となる. B, C, D の所に excep. とついているのは, その曲線が第一種例外曲線であることを示している. また幾何種数が 0 でないとき, 下のチェーンで数字が赤で表示されているのは, 対応する曲線が標準因子の完備線形系の固定成分であることを示している.

ほとんどの場合, 固定成分は例外因子となっている様である. A, B, C, D 以外の曲線は非特異有理曲線であるから, $p_g > 0$ の場合に計算結果から極小曲面を求めるのは容易である. 図 2 の場合も容易に判るように赤で書かれた B, C, D を含む 8 本の曲線は極小曲面への例外因子で, 極小曲面の標準因子の自己交点数は $K^2 = -8$ から 8 増えて 0 である. $p_g = 1$ で不正則数が常に 0 であること [I, p.49] から, この曲面は K3 曲面であることが判る.

もう一つ

$$X^7 + Y^8 + Z^9 - XYZ = 0$$

Delsarte 曲面 (ver. 1.0)

チェイン: 現在ファイル読み込み機能はなし

a: b: c: d:

pqr: 方程式 $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$

CANVAS 数値は半角でスペースを入れて並べる. 実行すると canvas に結果が表示される

genus and self-intersection number				red: fixed components of the canonical system	
A	0	-2		not minimal surface	
B	0	-1	excep.	geometric genus = 43	
C	0	-1	excep.	interior points = 43	
D	0	-1	excep.	K ² = 170	
					number of chains
A	(2 4 45)			B	[1]
A	(2 2 2 2 2 2 2 40)			C	[1]
A	(2 5 35)			D	[1]
B	(2 2 2 2 2 2 3 2 2 2 3 2 3)			C	[1]
B	(10 2 2 2 3 2 2 2 2 2)			D	[1]
C	(2 6 2 2 2 9)			D	[1]

図 3: $T_{7,8,9}$

をやってみると図 3 となる. このような方程式は T_{pqr} 方程式と呼ばれ 2 次元カusp 特異点を与えることが知られている. T_{pqr} 方程式の場合は 1 行下の欄に p, q, r を書き込んで右の「実行」ボタンを押せば同じ結果が CANVAS に表示される. 図 3 の場合は p_g と K^2 が正なので一般型代数曲面である.

幾何種数の下に interior points として表示されている数字は a, b, c, d を頂点とする 4 面体の内部に含まれる格子点 (整数点) の数であり, これら格子点に対応する有理関数が標準因子の完備線形系の基底となっていることから, この数は理論的に p_g に等しい. プログラム内では p_g は得られた非特異曲面にリーマン・ロッホの定理を用いて, これと不正則数が 0 であることから計算されている. 一方, interior points は実際に格子点を数えている. 標準因子の固定因子の計算には求めた内部格子点集合を用いている.

このプログラムは Web ブラウザ上単独の HTML ファイルで動作しているので, ブラウザでソースを保存すれば, オフラインでも実行出来ます. HTML ファイルはエディターなどで内容を見ることが出来ます. google chrome であれば起動中に

(Windows パソコンなら) マウスの右クリック「検証」でプログラムソースが見られます。

参考文献

- [I] M.-N. Ishida, The algebraic surface defined by a sum of four monomials, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*. **40**, (1991), 39-51.