モティーフ層 (底多様体の上のモティーフ) の理論

花村昌樹

体 k 上の純モティーフの理論 (Chow モティーフおよび homological モティーフ) があった。その発展として、混合モティーフ理論が考えられる。別の方向の発展として代数多様体上のモティーフ層の理論を考える。

Grothendieck の理論：

homological モティーフ: 代数的サイクルの **homology** 同値類のなす群を使って、加法圏 $\mathfrak{M}(k)$ を構成した。非特異射影代数多様体 X に $\mathfrak{M}(k)$ の対象 $H(X)$ — X のモティーフとよぶ — が対応し、X のコホモロジー群 (特異コホモロジー、 ℓ 進コホモロジー、**de Rham** コホモロジー) を統一した概念と見ることができる。圏 $\mathfrak{M}(k)$ はいろいろのコホモロジー群の振る舞いを記述する。

この圏 $\mathfrak{M}(k)$ の性質について、彼の標準予想に基づいた考察をおこなった。

Chow モティーフ:　　同様に代数的サイクルの有理同値類のなす群 (**Chow 群**) を使って、加法圏 $\boldsymbol{CH}\mathcal{M}(k)$ を構成できる (その対象を **Chow モティーフ**という)。

自然な関手 $\boldsymbol{CH}\mathcal{M}(k) \to \mathcal{M}(k)$ がある。

これらの二つのモティーフの圏は、混合モティーフ理論のなかでも明確な役割をもつ。

混合モティーフ理論:

混合モティーフのなす三角圏 $\mathcal{D}(k)$ を高次 **Chow 群** (≈ 代数的 K 理論) を用いて構成できる。そこでは (非特異と限らない) 準射影代数多様体のコホモロジー群を扱える。

k を体、S を k 上の準射影代数多様体とする。Chow モティーフのなす圏 $\mathcal{CHM}(S)$ の性質:

1. k 上の非特異代数多様体 X、固有写像 $p : X \to S$ と $r \in \mathbb{Z}$ に対しこの圏の対象 $h(X/S)(r)$ が対応する。

2.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{CHM}(S)}(h(X/S)(r), h(Y/S)(s)) = \mathrm{CH}_{\dim Y - s + r}(X \times_S Y)$$

である。ここで $\mathrm{CH}_s(V)$ は Chow 群 (代数多様体 V の次元 s のサイクルの有理同値類のなす群)。

3. さらに $\mathcal{CHM}(k)$ は準アーベル圏である。

(写像の合成の定義に Fulton -MacPherson の交叉理論をつかう)。

4. $k = \mathbb{C}$ のとき cohomology 実現関手

$$\rho : CHM(S) \to D_c^b(S) \ ,$$

$$h(X/S)(r) \mapsto \mathbb{R}p_* \mathbb{Q}_X [2r]$$

が存在する。ここで $D_c^b(S)$ は S 上の $\mathbb{Q}$-加群の構成可能層の導来圏である。

予想 (モティーフ的分解「定理」): 以下では $k = \mathbb{C}$ とする。

固有写像 $p : X \to S$ (ただし X は非特異) が与えられたとき S の stratification(閉集合の減少列である条件をみたすもの)

$$S = S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_d$$

($\dim S_\alpha = \dim S - \alpha$, $d = \dim S$) と、各 stratum $S_\alpha - S_{\alpha+1}$ 上の局所系

$\mathcal{L}_{\alpha}^{j}$ があり、直和分解

$$h(X/S) = \bigoplus_{j,\alpha} h_{\alpha}^{j}(X/S)$$

と $D_{c}^{b}(S)$ における同型

$$\rho\left(h_{\alpha}^{j}(X/S)\right) \cong IC_{S_{\alpha}}(\mathcal{L}_{\alpha}^{j})[-j+\dim S_{\alpha}]$$

が存在する。

ここで $IC_{S_{\alpha}}(\mathcal{L}_{\alpha}^{j})$ は局所系 $\mathcal{L}_{\alpha}^{j}$ の定める交叉複体 (交叉コホモロジーを与える層の複体)。

$S = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ のとき
$h(X) = \oplus h^{j}(X)$ を絶対的なモティーフ的分解とよぶ。これは J.P.Murre 氏が存在を予想したもので Grothendieck の標準予想の部分 ($X \times X$ において対角 Δ_X のコホモロジー類の Künneth 成分

が代数的であること) を強めたものである。

定理 1 (A.Corti 氏との論文 [1]) . Grothendieck の標準予想と Beilinson-Murre の filtration 予想より、モティーフ的分解が常に存在することが従う。

Filtration 予想： k 上の非特異射影多様体 X の Chow 群 $\mathrm{CH}^r(X)$ は減少 filtration $\mathrm{CH}^r(X) = F^0\,\mathrm{CH}^r(X) \supset F^1\,\mathrm{CH}^r(X) \supset \cdots$

をもち、次の性質をみたす。

(1) $F^1\,\mathrm{CH}^r(X) = \mathrm{CH}^r(X)_{hom}(=$ $H^{2r}(X)$ へのサイクル写像の核).

(2) $F^a\,\mathrm{CH}^r(X) \cdot F^b\,\mathrm{CH}^s(X) \subset F^{a+b}\,\mathrm{CH}^{r+s}(X)$.

(3) $F^\bullet \mathrm{CH}^r(X)$ は写像による引き戻し、および順像 (push-forward) により保たれる。

(4) $\nu >> 0$ のとき $F^\nu \mathrm{CH}^r(X) = 0$。

Grothendieck の標準予想:標数 0 では、次の二つである。

1. $X \times X$ において対角 Δ_X のコホモロジー類の Künneth 成分が代数的である。

2. L をアンプル因子の類とするとき、各 $j \leq d = \dim X$ について、同型写像 $L^j : H^j(X) \to H^{2d-j}(X)$ の逆写像は代数的である (代数的サイクル類により引き起こされる)。

S を Hilbert モデュラー多様体の極小 compact 化、

$\mathcal{A} \to S$ をアーベル多様体の普遍族とする。

$\mathcal{A}$ の m 重の S 上の自己直積 $\mathcal{A} \times_S \cdots \times_S \mathcal{A}$ をとり、そのトロイダル compact 化を X とし、

$p : X \to S$ を自然な写像とする。

定理 2 (B. Gordon, J.P. Murre 両氏との論文 [2]). このとき $p : X \to S$ はモティーフ的分解をもつ。

定理 3 (B. Gordon, J.P. Murre 両氏との論文 [3]). 上の X は絶対的モティーフ的分解をもつ。

定理 2 より強くつぎがなりたつ。

一般に、固有写像 $p : X \to S$ について、S の stratification $\{S_\alpha\}$ と、$X \times_S S_\alpha$ の特異点解消 $Y_\alpha \to S_\alpha$ をとり、写像 $Y_\alpha \to S_\alpha$ が $S_\alpha - S_{\alpha+1}$ の上で滑らか (smooth) であるようにする。Y_α の generic fiber を Z_α とする。

定理 4.　Z_α が Grothendieck の標準予想をみたし、直積 $Z_\alpha \times Z_\alpha$ が filtration 予想をみたすとする。このとき $p : X \to S$ はモティーフ的分解をもつ。

以下に、定理 4 の適用例を与える。

S: 射影代数曲面

$S^{[n]}$:長さ n の 0 次元 subscheme の Hilbert scheme (これは非特異)

$S^{(n)}$: n 階対称積 (つまり S^n/Σ_n)

$p : S^{[n]} \to S^{(n)}$ を自然な写像。

定理 (M. de Cataldo, L. Migliorini[8])
　この p はモティーフ的分解をもつ。

これより
$h(S^{[n]}) = \bigoplus_{\nu} \ h(S^{(\nu)})(n - \ell(\nu))$
が導かれる (ここで ν は n の分割をわたり、$\ell(\nu)$ は ν の長さ)。あとの結果は L. Göttsche も得ている。

定理 (cf. P.L. del Angel, S. Müller-Stach[8]) $p : X \to S$ を曲面上の **conic bundle** とする。

(1) p はモティーフ的分解をもつ。

(2) X は絶対的モティーフ的分解をもつ。

定理 4 および、定理 3 の議論により示すこともできる。

1. A. Corti and M. Hanamura : Motivic decomposition and intersection Chow groups, Duke Math. J. 103(2000), 459-522.

2. B. Gordon, M. Hanamura, and J.P. Murre : Relative Chow-Künneth projectors for modular varieties, to appear in J. reine angew. Math.

3. B. Gordon, M. Hanamura, and J.P. Murre : Chow-Künneth projectors for modular varieties, to appear in Comptes Rendues.

4. M. A. de Cataldo and L.Migliorini : The Chow motive of semismall resolutions, arXiv:math.AG0204067.

5. J. P. Murre : On a conjectural filtration on the Chow groups of an

algebraic variety I, Indag. Mathem. 2(1993), 177-188.

6. M. Hanamura : Mixed motives and algebraic cycles I, Math. Res. Lett. 2 (1995), 811-821.

7. S. Kleiman : Motives, In : Algebraic Geometry Oslo 1970, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, p. 53-82.

8. P.L. del Angel and S. Müller-Stach: Motives of uniruled 3-folds, alg-geom/9607023