> 2015 年度解析学*B* (工学部*7*組*8*組, 赤間担当) 期末試験の数式処理ソフト*Maple*による解

```
> StringTools:-FormatTime( )
```
"2016-02-15" (1)

赤間 陽二

問題1

```
> with(VectorCalculus) :
```
$x = a\cdot u + b\cdot v, y = c\cdot u + d\cdot v$の$u, v$に関するヤコビアンは、

```
> Jacobian([a·u + b·v, c·u + d·v], [u, v], determinant)
```
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a\,d - b\,c \qquad (1.1)$$

列の２番目がヤコビアンである。

```
> (1.1)[2]
```
$$a\,d - b\,c \qquad (1.2)$$

```
> Jacobian([r·cosh(t), r·sinh(t)], [r, t], determinant)
```
$$\begin{bmatrix} \cosh(t) & r\sinh(t) \\ \sinh(t) & r\cosh(t) \end{bmatrix}, \cosh(t)^2\,r - r\sinh(t)^2 \qquad (1.3)$$

ヤコビアンを簡略化する。

```
> simplify((1.3)[2])
```
$$r \qquad (1.4)$$

問題2

```
> with(Student[MultivariateCalculus])
```
[`.`, Angle, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, AreOrthogonal, AreParallel, AreSkew, CenterOfMass, ChangeOfVariables, Contains, CrossSection, CrossSectionTutor, Del, DirectionalDerivative, DirectionalDerivativeTutor, Distance, Equal, FunctionAverage, GetDimension, GetDirection, GetIntersection, GetNormal, GetPlot, GetPoint, GetRepresentation, Gradient, GradientTutor, Intersects, Jacobian, LagrangeMultipliers, Line, MultiInt, Nabla, Plane, Projection, Revert, SecondDerivativeTest, SurfaceArea, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor] (2.1)

```
> f := (x, y) → e^x·sin(y)
```
$$f := (x, y) \to e^x \sin(y) \qquad (2.2)$$

> $f(0, 0)$

$$0 \tag{2.3}$$

> $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$$e^{x} \sin(y) \tag{2.4}$$

> $subs\left(x = 0, y = 0, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)$

$$e^{0} \sin(0) \tag{2.5}$$

> $simplify(\textbf{(2.5)})$

$$0 \tag{2.6}$$

> $simplify\left(subs\left(x = 0, y = 0, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)\right)$

$$1 \tag{2.7}$$

> $simplify\left(subs\left(x = 0, y = 0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)\right)\right)$

$$0 \tag{2.8}$$

> $simplify\left(subs\left(x = 0, y = 0, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)\right)\right)$

$$1 \tag{2.9}$$

> $simplify\left(subs\left(x = 0, y = 0, \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)\right)\right)$

$$0 \tag{2.10}$$

従って

> $f(0, 0) + \frac{1}{1!}(0 \cdot h + 1 \cdot k) + \frac{1}{2!}\left(0 \cdot h^2 + 2 \cdot 1 \cdot h \cdot k + 0 \cdot k^2\right)$

$$h k + k \tag{2.11}$$

3次のLagrangeの剰余項を求める.

> $subs\left(x = \theta \cdot h, y = \theta \cdot k, \frac{1}{3!}\left(h^3 \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, y) + 3 \cdot h^2 \cdot k \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x, y) + 3 \cdot h \cdot k^2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x, y) + k^3 \cdot \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x, y)\right)\right)$

$$\frac{1}{6} h^3 e^{\theta h} \sin(\theta k) + \frac{1}{2} h^2 k e^{\theta h} \cos(\theta k) - \frac{1}{2} h k^2 e^{\theta h} \sin(\theta k) - \frac{1}{6} k^3 e^{\theta h} \cos(\theta k) \tag{2.12}$$

> $simplify(\textbf{(2.12)})$

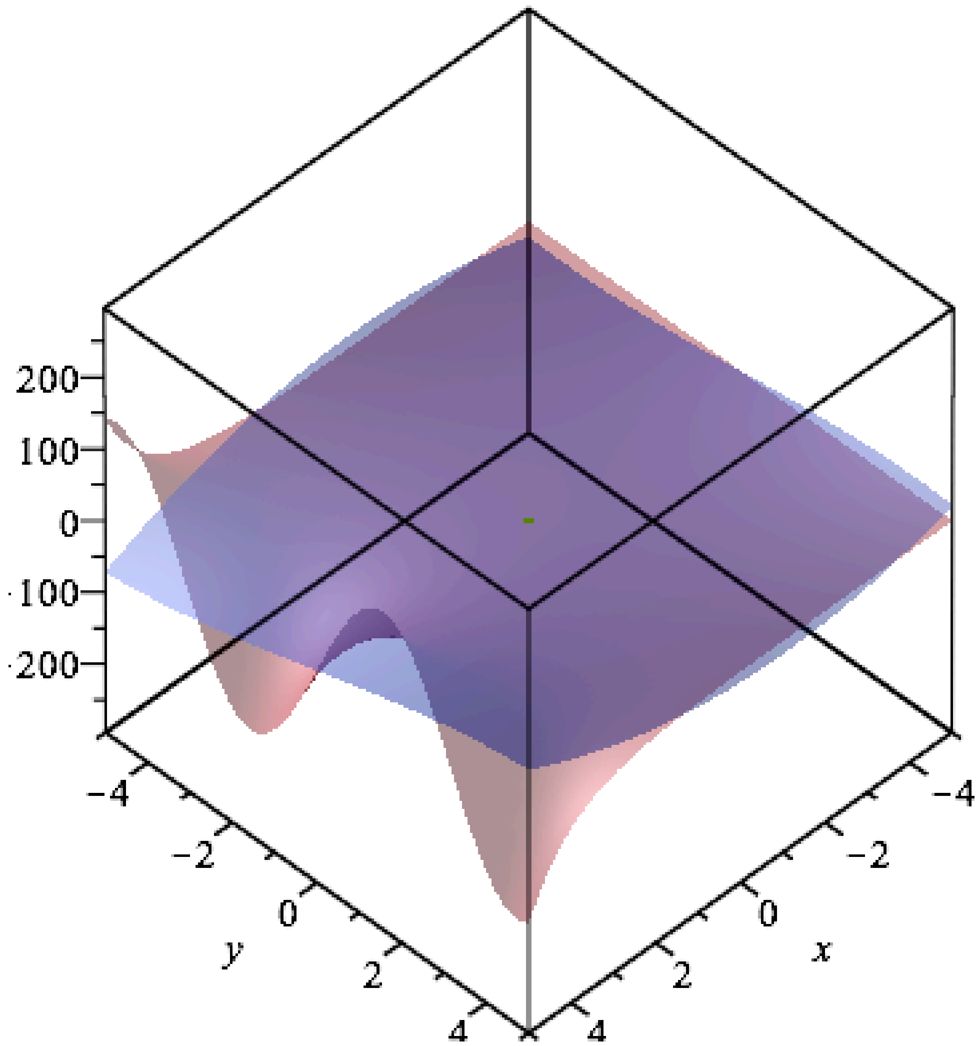
$$\frac{1}{6} e^{\theta h} \left(\sin(\theta k) h^3 - 3 \sin(\theta k) h k^2 + 3 \cos(\theta k) h^2 k - \cos(\theta k) k^3\right) \tag{2.13}$$

従って

> $\textbf{(2.11)} + \textbf{(2.13)}$

$$h k + k + \frac{1}{6} e^{\theta h} \left(\sin(\theta k) h^3 - 3 \sin(\theta k) h k^2 + 3 \cos(\theta k) h^2 k - \cos(\theta k) k^3\right) \tag{2.14}$$

> $TaylorApproximationTutor\left(e^{x}\cdot \sin(y), axes = true\right)$



問題3

> $g := (x, y) \rightarrow x\cdot y + \frac{c}{x} + \frac{c}{y}$

$$g := (x, y) \rightarrow x\,y + c\,\frac{1}{x} + c\,\frac{1}{y} \qquad \textbf{(3.1)}$$

> $solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}\,g(x, y) = 0, \frac{\partial}{\partial y}\,g(x, y) = 0\right\}, \{x, y\}\right)$

$$\{x = RootOf(\_Z^3 - c), y = RootOf(\_Z^3 - c)\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

c≤0のときは解**(3.2)**は与えられた領域に属さない。c>0のときは、ヘッシアンが、**(3.2)**で

> $simplify\left(subs\left(\{x = RootOf(\_Z^3 - c), y = RootOf(\_Z^3 - c)\}, Hessian(g(x, y), [x, y], determinant)[2]\right)\right)$ assuming $c > 0$

$$3 \qquad \textbf{(3.3)}$$

となり、正であるため、極小値をとる。

問題4

> $h := (x, y, \lambda) \rightarrow x^2 \cdot y^2 + \lambda \cdot (x^2 + 2 \cdot y^2 - 1)$

$$h := (x, y, \lambda) \rightarrow x^2\, y^2 + \lambda\, (x^2 + 2\, y^2 + (-1)) \tag{4.1}$$

> $\left[solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial}{\partial \lambda} h(x, y, \lambda) = 0\right\}, \{x, y, \lambda\}\right)\right]$

$$\left[\{\lambda = 0, x = 0, y = RootOf(2\_Z^2 - 1)\}, \{\lambda = 0, x = 1, y = 0\}, \{\lambda = 0, x = -1, y = 0\}, \left\{\lambda = -\frac{1}{4}, x = RootOf(2\_Z^2 - 1), y = \frac{1}{2}\right\}, \left\{\lambda = -\frac{1}{4}, x = RootOf(2\_Z^2 - 1), y = -\frac{1}{2}\right\}\right] \tag{4.2}$$

> **for** *i* **in (4.2) do** *printf*("x=%a,y=%a で極値の候補%f ", *op*(*subs*(*i*, [$x, y, x^2 \cdot y^2$])));
print( );**end do**;

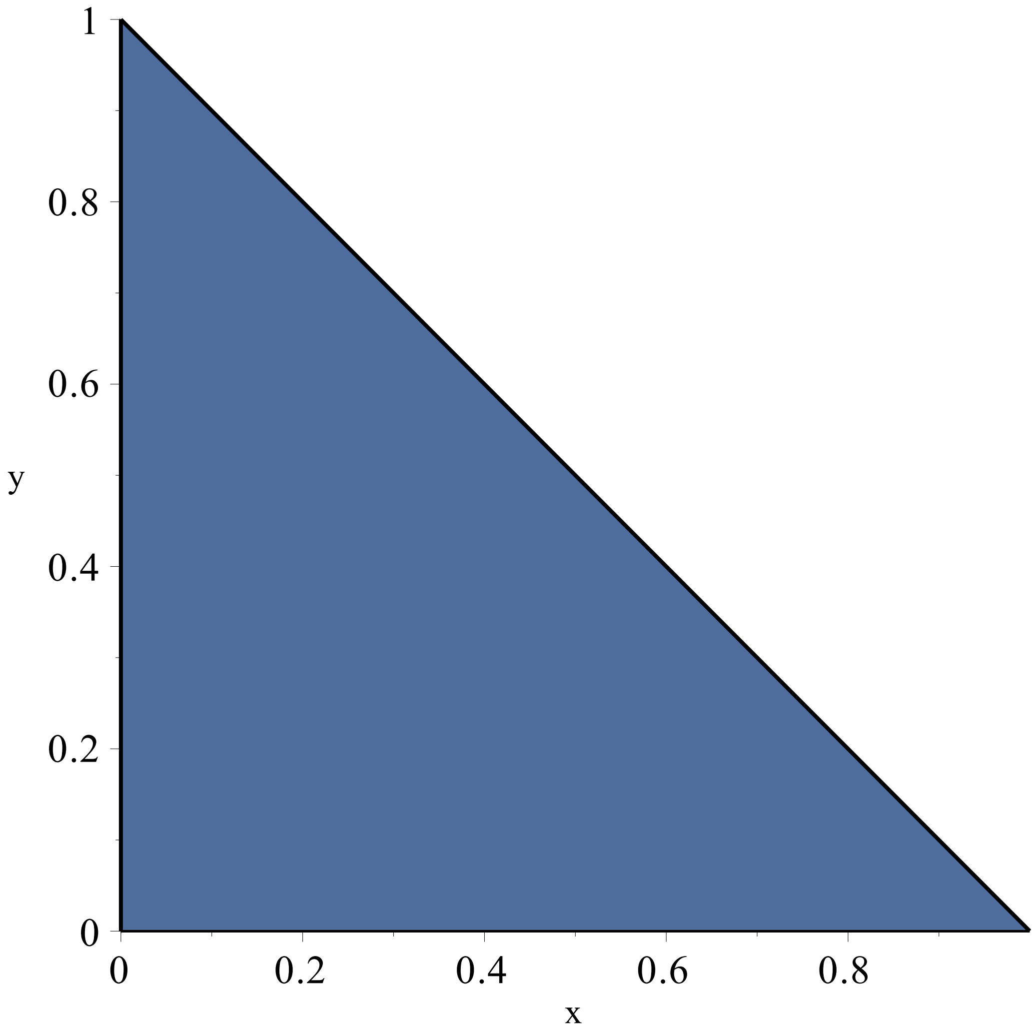
```
x=0,y=RootOf(2*_Z^2-1) で極値の候補0.000000

x=1,y=0 で極値の候補0.000000

x=-1,y=0 で極値の候補0.000000

x=RootOf(2*_Z^2-1),y=1/2 で極値の候補0.125000

x=RootOf(2*_Z^2-1),y=-1/2 で極値の候補0.125000
```

(4.3)

問題5

> $D = \{(x, y) \mid 0 < x + y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

> *with*(*plots*) :
inequal($\{0 < x + y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}, x = 0..0.9999, y = 0..1$)



での重積分

> $\iint (x+y)^a \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

はx=u, y=v-uとおくとヤコビアンは

> $Jacobian([u, v-u], [u, v], determinant)$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right], 1 \qquad \textbf{(5.1)}$$

となり、x+y=vとなり、E={(u,v) | 0<v≤1, 0≤u≤1}

> $\iint_D (x+y)^a \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_E \mathrm{v}^a \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$

は、累次積分

> $\int_0^1 \int_0^1 v^a \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$

になる。*a=-1*のときは

> $\int_0^1 \lim_{t \to 0+} [\log|v|]_t^{\,1} \mathrm{d}u$

$$\mathit{undefined} \qquad \textbf{(5.2)}$$

は定義されていない. *a<-1*のときは

> $\int_0^1 \lim_{t \to 0+} \left[\frac{v^{a+1}}{a+1} \right]_t^1 \mathrm{d}u$

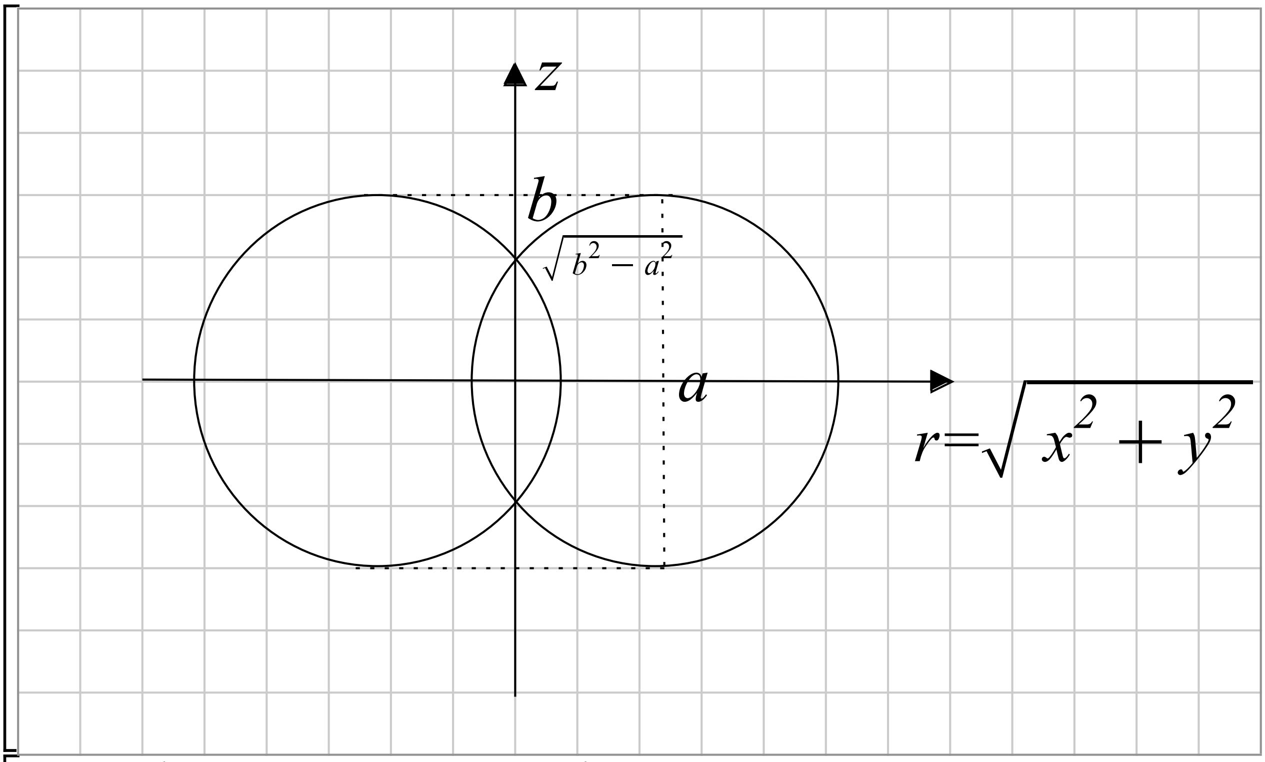
は定義されていない。*a>-1*のときは

> $\int_0^1 \int_0^1 v^a \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$ assuming $a > -1$

$$\frac{1}{a+1} \tag{5.3}$$

となる。

問題6



> $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a + \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z - 2\pi \cdot \int_{\sqrt{b^2 - a^2}}^{b} \left(a - \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z$ assuming $a > b > 0$

$$V = \pi \left(2 a^2 b + a b^2 \pi + \frac{4}{3} b^3\right) - 2\pi \left(\frac{1}{3} \left(-a^2 + b^2\right)^{3/2} - b^2 \sqrt{-a^2 + b^2} + a b^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{-a^2 + b^2}}{b}\right) + \frac{2}{3} b^3 - \frac{1}{2} a b^2 \pi + a^2 b\right) \tag{6.1}$$

$\pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a + \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z - 2\pi \cdot \int_{\sqrt{b^2 - a^2}}^{b} \left(a - \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z$

を解析学*A*で学んだ公式を用いて計算する。

> $\int \sqrt{b^2 - z^2} \, \mathrm{d}z$ assuming $b > 0$

(6.2)

$$\frac{1}{2} z \sqrt{b^2 - z^2} + \frac{1}{2} b^2 \arcsin\left(\frac{z}{b}\right) \qquad \textbf{(6.2)}$$

から導く。Vの第1の定積分の被積分関数を展開すると

> $expand\left(\left(a + \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2\right)$

$$a^2 + 2 a \sqrt{b^2 - z^2} + b^2 - z^2 \qquad \textbf{(6.3)}$$

この原始関数の一つは

> $\int \textbf{(6.3)} \, \mathrm{d}z$ assuming $b > 0$

$$a^2 z + 2 a \left(\frac{1}{2} z \sqrt{b^2 - z^2} + \frac{1}{2} b^2 \arcsin\left(\frac{z}{b}\right)\right) + b^2 z - \frac{1}{3} z^3 \qquad \textbf{(6.4)}$$

原始関数**(6.4)**のzにbを代入したものから, -bを代入したものを引く

> $subs(z = b, \textbf{(6.4)}) - subs(z = -b, \textbf{(6.4)})$

$$2 a^2 b + a b^2 \arcsin(1) + \frac{4}{3} b^3 - a b^2 \arcsin(-1) \qquad \textbf{(6.5)}$$

これを簡略化すると

> $simplify(\textbf{(6.5)})$

$$2 a^2 b + a b^2 \pi + \frac{4}{3} b^3 \qquad \textbf{(6.6)}$$

Vの第2の定積分の被積分関数を展開すると

> $expand\left(\left(a - \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2\right)$

$$a^2 - 2 a \sqrt{b^2 - z^2} + b^2 - z^2 \qquad \textbf{(6.7)}$$

この原始関数の一つは

> $\int \textbf{(6.7)} \, \mathrm{d}z$ assuming $b > 0$

$$a^2 z - 2 a \left(\frac{1}{2} z \sqrt{b^2 - z^2} + \frac{1}{2} b^2 \arcsin\left(\frac{z}{b}\right)\right) + b^2 z - \frac{1}{3} z^3 \qquad \textbf{(6.8)}$$

原始関数**(6.4)**のzにbを代入したものから, $\sqrt{b^2 - a^2}$ を代入したものを引く

> $subs(z = b, \textbf{(6.8)}) - subs\left(z = \sqrt{b^2 - a^2}, \textbf{(6.8)}\right)$

$$a^2 b - a b^2 \arcsin(1) + \frac{2}{3} b^3 - a^2 \sqrt{-a^2 + b^2} + 2 a \left(\frac{1}{2} \sqrt{-a^2 + b^2} \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} b^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{-a^2 + b^2}}{b}\right)\right) - b^2 \sqrt{-a^2 + b^2} + \frac{1}{3} \left(-a^2 + b^2\right)^{3/2} \qquad \textbf{(6.9)}$$

従って、

> $V = simplify(\pi \cdot \textbf{(6.6)} - 2 \pi \cdot \textbf{(6.9)})$ assuming $a > b > 0$

$$V = \frac{2}{3} \pi \left(3 a b^2 \pi - 3 a b^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{-a^2 + b^2}}{b}\right) + a^2 \sqrt{-a^2 + b^2} + 2 b^2 \sqrt{-a^2 + b^2}\right) \qquad \textbf{(6.10)}$$

> $simplify(rhs(\textbf{(6.10)}) - rhs(\textbf{(6.1)}))$

$$0 \qquad \textbf{(6.11)}$$

表面積は

> $simplify\left(expand\left(\frac{d}{db}\,(rhs(\textbf{(6.10)}))\right), symbolic\right)$ assuming $b > 0$ **and** $a > 0$ **and** $b > a$

$$-\frac{4\,\pi\,b\left(a\arcsin\left(\frac{\sqrt{-a^2+b^2}}{b}\right)\sqrt{-a^2+b^2}-a\,\pi\,\sqrt{-a^2+b^2}+a^2-b^2\right)}{\sqrt{-a^2+b^2}} \qquad \textbf{(6.12)}$$

問題7

> $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(7.1)}$$

問題8

> $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(8.1)}$$