第 31 回発展方程式若手セミナー プログラム

日程 2009 年 8 月 31 日 (月) 〜 2009 年 9 月 3 日 (木)

会場 独立行政法人 国立女性教育会館

住所　〒 355-0292
埼玉県比企郡嵐山町菅谷 728 番地
TEL　0493-62-6711 (代表)
URL　http://www.nwec.jp/

すべてのセッションと特別講演は大会議室で実施します.

幹事 赤木 剛朗 (芝浦工業大学 システム理工学部)　g-akagi@sic.shibaura-it.ac.jp
松浦 啓 (早稲田大学 理工学研究所)

URL http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~g-akagi/wakate31/

---

8 月 31 日 (月)

13:30 – 14:00 開会挨拶・自己紹介 (大会議室)

セッション 1 座長: 眞崎 聡 (東北大学)

14:10 – 14:35 **菅 徹 (東北大学)**
細い領域における半線形楕円型方程式の解の分岐

14:40 – 15:05 **前田 昌也 (京都大学)**
Instability of bound states of nonlinear Schrödinger equations

15:10 – 15:35 **岡部　考宏 (東北大学)**
非斉次境界問題における Navier-Stokes 方程式の時間周期解について

セッション 2 座長: 深尾 武史 (京都教育大学)

15:50 – 16:15 **水野 将司 (東北大学)**
Porous Media 型非線形拡散方程式の解のヘルダー連続性について

16:20 – 16:45 **村瀬 勇介 (広島修道大学)**
単調型作用素に対する楕円型仮似変分不等式

16:50 – 17:15 **上田 好寛 (東北大学)**
Convergence rate to the nonlinear waves for viscous conservation laws on the half space

18:00 – 19:00 **夕食 (カフェテリア形式)**

19:00 – 21:00 **ショートコミュニケーション (研修棟 101 号室)**
座長: 川上 竜樹 (東北大学)・上田 好寛 (東北大学)

9 月 1 日 (火)

7:30 – 8:30 **朝食 (カフェテリア形式)**

セッション 3 座長: 宮本 安人 (東京工業大学)

9:00 – 9:25 **生駒 典久 (早稲田大学)**
非線型 Schrödinger 方程式の正値解の一意性について

9:30 – 9:55 **熊崎 耕太 (名古屋工業大学)**
Penrose-Fife 型の相転移モデルに対する可解性について

10:00 – 10:25 **川上 竜樹 (東北大学)**
半空間における非線形境界条件付き熱方程式の大域解の分類

特別講演 (その 1) 座長: 白川 健 (神戸大学)

10:40 – 12:10 **北 直泰 (宮崎大学)**
非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動について

12:10 – 13:00 **昼食 (カフェテリア形式)**

セッション 4 座長: 久保 隆徹 (筑波大学)

13:00 – 13:25 **宮本 安人 (東京工業大学)**
活性因子・抑制因子系の漸近挙動について

13:30 – 13:55 **劉 永琴 (九州大学)**
Global existence and asymptotic behavior of solutions for quasi-linear dissipative plate equation

14:00 – 14:25 **中村 能久 (熊本大学)**
シュレディンガー方程式の解の平滑化効果について

セッション 5 座長: 横田 智巳 (東京理科大学)

14:40 – 15:05 **竹田 寛志 (東北大学)**
連立非線形消散型波動方程式の時間大域解の臨界指数について

15:10 – 15:35 **加藤 孝盛 (名古屋大学)**
Wellposedness of the fifth order KdV equation

15:40 – 16:05 **渡邉 紘 (中央大学)**
非局所的移流項を持つ強退化拡散方程式系の可解性

セッション 6 座長; 五十嵐 威文 (日本大学)

16:20 – 16:45 **深尾 武史 (京都教育大学)**
熱水力学に現れる障害物問題の大域的アトラクターについて

16:50 – 17:15 **黒田 紘敏 (北海道大学)**
非斉次項をもつ特異拡散方程式の近似問題

18:00 – 19:00 **夕食 (カフェテリア形式)**

9 月 2 日 (水)

7:30 – 8:30 **朝食 (カフェテリア形式)**

セッション 7 座長: 久藤 衡介 (福岡工業大学)

9:00 – 9:25 **猪奥 倫左 (東北大学)**
放物型方程式における最大正則性と指数可積分性について

9:30 – 9:55 **眞崎 聡 (東北大学)**
2 次元全空間における Schrödinger-Poisson 方程式の時間局所解の一意存在について

10:00 – 10:25 **中川 和重 (埼玉大学)**
ABP type estimates for nonlinear elliptic systems

特別講演 (その 2) 座長: 白川 健 (神戸大学)

10:40 – 12:10 **北 直泰 (宮崎大学)**
非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動について

12:10 – 13:00 **昼食 (カフェテリア形式)**

13:00 – 13:30 **(国立女性教育会館)**

セッション 8 座長: 黒田 紘敏 (北海道大学)

13:30 – 13:55 **山本 征法 (東北大学)**
移流拡散方程式の解の漸近展開について

14:00 – 14:25 **浅井 智朗 (東京大学)**
On smoothing effect for higher order curvature flow equations

セッション 9 座長: 上田 好寛 (東北大学)

14:40 – 15:05 **平山 浩之 (名古屋大学)**
トーラス上の高階次分散型方程式の時間局所適切性

15:10 – 15:35 **原田 潤一 (早稲田大学)**
非線形境界条件をもつ放物型方程式の解の爆発について

15:40 – 16:05 **ダルマワルダネ マヘシ (九州大学)**
Decay property for second order hyperbolic systems of viscoelastic materials

セッション 10 座長: 松浦 啓 (早稲田大学)

16:20 – 16:45 **岩渕 司 (東北大学)**
Modulation 空間における Navier-Stokes 方程式の解の存在定理について

16:50 – 17:15 **増田 茂 (首都大学東京)**
The two constants and tensors of the original Navier-Stokes equations

18:00 – 20:00 **懇親会**

9 月 3 日 (木)

7:30 – 8:30 **朝食 (カフェテリア形式)**

セッション 11 座長: 松浦 啓 (早稲田大学)

9:00 – 9:25 **加納 理成 (近畿大学)**
仮似変分不等式論による癌浸潤モデルの局所可解性について

9:30 – 9:55 **五十嵐 威文 (日本大学)**
cone 領域における反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

10:00 – 10:25 **村井 宗二郎 (東海大学)**
Strichartz estimates for wave equations with a potential in an exterior domain

10:30 – 10:55 **石本 登志男 (九州大学)**
双安定反応拡散系における 2 次元スパイラルパターン

11:00 – 11:30 **来年度について・閉会のあいさつ**

非線形 Schrödinger 方程式の解の挙動について

北　直泰（宮崎大学　教育文化学部）

1　序文

この講演では，主に空間 1 次元の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題：

$$\text{(NLS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u + \lambda \mathcal{N}(u), \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

を取り扱う．ここで，$(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ であり，未知関数 $u(t,x)$ は複素数の値をとるものとする．i は虚数単位を表す．また，非線形項 $\lambda\mathcal{N}(u)$ は p 次のベキ型で次のような形を持つものとする．

$$\lambda \in \mathbf{R}, \quad \mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u \quad (1 < p)$$

この非線形項については，u にゲージ変換を施したもの $e^{i\theta}u$ (ただし，$\theta \in \mathbf{R}$) を当てはめると

$$\mathcal{N}(e^{i\theta}u) = e^{i\theta}\mathcal{N}(u) \tag{1.1}$$

という性質がある．性質 (1.1) のお陰で，ひとたび $u(t,x)$ が (NLS) の解であることがわかると，$e^{i\theta}u(t,x)$（ただし, θ は定数）もまた (NLS) の解になっていることがわかる．従って，性質 (1.1) を**「ゲージ不変性」**と呼ぶ.

次に方程式 (NLS) の物理的な背景について紹介する．非線形 Schrödinger 方程式は，$p=3$（たまに $p=5$）の場合が物理学で登場し，流体中の渦糸の運動や光ファイバー内部を伝播する光信号（＝電磁波）の振る舞いを近似的に記述している．この講演では聴講者がイメージを伴って解 $u(t,x)$ を把握できるようにしたいので，光ファイバーの話題と絡めながら話を進めていく．光ファイバーモデルの場合，t はファイバーに沿った “ 位置 ” を表しており，x は波形を記述する “ 時刻 ” パラメータを表している．数学における t, x の役割とは逆だが，混乱のないようにお願いしたい．この講演では，発展方程式論的な取り扱いの方を尊重して, t を時刻パラメー

タ，x を位置パラメータと呼ぶことにする．また，解 $u(t,x)$ に対して，その絶対値 $|u(t,x)|$ は激しく振動する電場の包絡線を表している．そして，非線形項 $\lambda\mathcal{N}(u)$ は，ガラスの屈折率が電場の強さに非線形的に依存する効果（非線形 Kerr 効果）を表現しており，λ はこの効果の度合を表している [1].

さて，(NLS) の数学的な研究では，数多くの研究者によって，

- 時間局所解の適切性と非適切性
- 時間大域解の存在と非存在
- 時間大域解の漸近挙動・ソリトン解など特殊解の安定性と不安定性

などの問題が盛んに調べられている．この講演では時間の制約と講演者の力量を鑑みて，上記すべての事柄について丁寧に紹介することは難しいであろう．そこで, 特に「時間局所解の適切性と非適切性」･「時間大域解の存在と非存在」･「解の漸近挙動」に関する話題に焦点を絞る．この講演は 2 日間にわたり前半と後半の 2 部構成になっているが, 前半の講演では時間大域解に関する既知の結果まで解説し, 後半の講演では解の漸近挙動に関する既知の結果について解説する. 時間に余裕があれば, λ が複素数の場合に解の漸近挙動がどうなるのか説明する予定である．なお，非線形 Schrödinger 方程式の入門的な書籍として，[3, 28] を挙げておく．

2　時間局所解および時間大域解

(NLS) の解を構成する際に, まず解が属する関数空間を設定しておかねばならない．我々は初期値問題を解く際にいつも「時間大域解が存在するか否か」という問題意識を持っているので，時間局所解をつないで先へ先へと解を延長できるようにうまく関数空間を準備しておく必要がある．解を延長するには, $u(t,x)$ のノルムが t の経過とともに急激に増えないことが望ましい．そこで利用したいものが**「保存量（t について不変な量）」**である．λ が実数の場合，(NLS) の解 $u(t,x)$ が t,x について滑らかで，$|x|\to\infty$ のときに減衰していることを仮定すれば，次のような保存量を持つことが知られている．

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})} \quad (\text{電荷}), \tag{2.1}$$

$$\|\partial_x u(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})} + \frac{2\lambda}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbf{R})} \quad (\text{エネルギー}) \tag{2.2}$$

これらの量を電荷，エネルギーと呼ぶのは，Schrödinger 方程式が量子力学で登場することの名残であると思われる．これらの保存量を意味のあるものにするために, 関数空間として $H^1(\mathbf{R})$, つまり,

$$H^1(\mathbf{R}) = \{f(x) \in L^2(\mathbf{R}); \|\partial_x f\|_{L^2} < \infty\}$$

を選ぶのがよい．実際，$u(t,\cdot) \in H^1(\mathbf{R})$ のとき，Sobolev の埋め込みを使えば，エネルギーに含まれる $\|u(t)\|_{L^{p+1}}$ は有限の値を取る．

以上の議論から，(NLS) の解として，$H^1(\mathbf{R})$ に値を取る t の関数という枠組みで構成すればよいことがわかった．そして，初期値問題として意味を持つためには，初期データに連続的につながることが必要なので，$u(t,x) \in C(I; H^1(\mathbf{R}))$ の枠組みで解を構成するのがよい．ここで，I は時刻パラメータの区間―例えば，$[-T, T]$―である．さらに，(NLS) に含まれる $\partial_t u$ と $\partial_x^2 u$ が等式を介してうまく意味を持つためには，$u(t,x) \in C^1(I; H^{-1}(\mathbf{R}))$ という条件下で解を見つけるのがよかろう．$H^{-1}(\mathbf{R})$ は $H^1(\mathbf{R})$ の双対空間である．ここで，$u(t,x) \in C(I; H^1(\mathbf{R}))$ のとき，非線形項 $\lambda\mathcal{N}(u) \in C(I; H^1(\mathbf{R})) \subset C(I; H^{-1}(\mathbf{R}))$ であることにも注意しておこう．

Theorem 2.1 (時間局所解：Ginibre-Velo [7]). $u_0 \in H^1(\mathbf{R})$ とする．このとき，ある $T > 0$ が存在して，*(NLS)* の解 $u \in C([-T,T]; H^1(\mathbf{R})) \cap C^1([-T,T]; H^{-1}(\mathbf{R}))$ が唯一つ存在する．

Theorem 2.2 (時間大域解：Ginibre-Velo [7]). $u_0 \in H^1(\mathbf{R})$ とする．また，

- $\lambda > 0$ のとき $1 < p < \infty$,
- $\lambda < 0$ のとき $1 < p < 5$

とする．このとき，*(NLS)* の時間大域解 $u \in C(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R})) \cap C^1(\mathbf{R}; H^{-1}(\mathbf{R}))$ が唯一つ存在する．

《Theorem 2.1 の証明 (概略)》 (NLS) を同値な積分方程式に書き直して，縮小写像の原理を用いる．ここで，同値な積分方程式とは (NLS) に Duhamel の原理を適用して得られるもので，

$$\begin{aligned} u(t) &= \Phi(u) \\ &\equiv U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau))\, d\tau \end{aligned} \tag{2.3}$$

のことである．ただし，$U(t) = \exp(it\partial_x^2)$ は線形 Schrödinger 方程式の解作用素であり，(2.3) の右辺に現れている時間積分 $\displaystyle\int_0^t \cdots\, d\tau$ は，$H^1(\mathbf{R})$ に値を取る関数に対する Bochner 積分である．

$\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R})} \le \rho_0$ とし，区間 $I = [0, T]$ に対して，(2.3) の写像 Φ が，$L^\infty(I; H^1(\mathbf{R}))$ の閉集合

$$\overline{B}_{2\rho_0} = \{u; \|u\|_{L^\infty(I;H^1(\mathbf{R}))} \le 2\rho_0\}$$

上で縮小写像になることを示す．ただし，ベキ p が 1 付近になると非線形項 $\mathcal{N}(u)$ が $u=0$ で特異なものになるので，閉集合 $\overline{B}_{2\rho_0}$ には弱い空間 $L^\infty(\mathbf{R};L^2(\mathbf{R}))$ の距離を入れる．$U(t)$ が $L^2(\mathbf{R})$ でユニタリーであることと, 非線形項の評価で Sobolev の埋め込み $H^1(\mathbf{R})\subset L^\infty(\mathbf{R})$ を使うと，

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L^\infty(I;H^1(\mathbf{R}))} &\leq \rho_0 + CT(2\rho_0)^p \\
&\leq 2\rho_0 \quad (\leftarrow T \text{ を十分小さくした})
\end{aligned}
$$

および,

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(u_1)-\Phi(u_2)\|_{L^\infty(I;L^2(\mathbf{R}))} \\
&\quad\leq CT\rho_0^{p-1}\|u_1-u_2\|_{L^\infty(I;L^2(\mathbf{R}))} \\
&\quad\leq \frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_{L^\infty(I;L^2(\mathbf{R}))} \quad (\leftarrow T \text{ を十分小さくした}) \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかる．従って，Φ は縮小写像になっている．これから，$C(I;L^2(\mathbf{R}))\cap L^\infty(I;H^1(\mathbf{R}))$ に属する (2.3) の解 u の存在がわかる．実は (2.3) の右辺は $C(I;H^1(\mathbf{R}))$ に属するので，結局 $u\in C(I;H^1(\mathbf{R}))$ となる．一意性については，(2.4) を導くのと同じ評価をすれば容易に示せる．なお，区間 $I'=[-T,0]$ における解の存在・一意性についても同様に示すことができる．□

《Theorem 2.2 の証明（概略）》 $\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R})}$ が有限時刻で正の∞に発散しないことを示せばよい．そうすれば，時間局所解をどんどんつないで（初期データをそのつど取り替えて）いかなる時刻においても解が存在することを示せる．

$I=(-T,T)$ とおく．解 $u\in C(I;H^1(\mathbf{R}))\cap C^1(I;H^{-1}(\mathbf{R}))$ に対して (2.1) と (2.2) が保存することを厳密に示すためには，空間方向の cut-off $\chi_\nu(x)=\chi(\nu x)$ と軟化子 $\eta_\varepsilon(t), \eta_\varepsilon(x)$ を用いる．$u_{\nu,\varepsilon}\equiv\eta_\varepsilon(t)*\eta_\varepsilon(x)*(\chi_\nu u)$ は t,x について滑らかで，$|x|\to\infty$ のとき減衰することに注意．そして，$u_{\nu,\varepsilon}$ は次の関係式を満たす．

$$
i\partial_t u_{\nu,\varepsilon} = -\partial_x^2 u_{\nu,\varepsilon} + \lambda\mathcal{N}(u_{\nu,\varepsilon}) + \mathrm{error}_{\nu,\varepsilon} \qquad (2.5)
$$

ただし，$\mathrm{error}_{\nu,\varepsilon}$ は $\nu\to 0$, $\varepsilon\to 0$ の順番で極限をとると $L^\infty_{loc}(I;L^2(\mathbf{R}))$ の位相で 0 になる．(2.5) の両辺に $\overline{u}_{\nu,\varepsilon}$ を掛けて，x について積分し，ついで虚部をとる．すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u_{\nu,\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \mathrm{Im}(\mathrm{error}_{\nu,\varepsilon}, u_{\nu,\varepsilon}(t)) \\
\Longrightarrow\quad &\|u_{\nu,\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \|u_{\nu,\varepsilon}(0)\|^2_{L^2(\mathbf{R})} + \int_0^t \mathrm{Im}(\mathrm{error}_{\nu,\varepsilon}, u_{\nu,\varepsilon}(\tau))\,d\tau
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\nu\to 0, \varepsilon\to 0$ とすれば，L^2 ノルムの保存を示すことができる．エネルギー (2.2) の保存につては，(2.5) の両辺に $\overline{\partial_t u_{\nu,\varepsilon}}$ を掛けて，x について積分し，実部を取ることで同様に示すことができる．

さて，$\lambda > 0$ のとき，電荷とエネルギーの保存から，$\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R})} \le C$ となることがわかる．従って，時間局所解をつなげて大域解を構成することができる．次に，$\lambda < 0$ のとき，エネルギーの非線形部分に Gagliardo-Nirenberg の不等式を用いると，

$$\|\partial_x u\|^2_{L^2(\mathbf{R})} - C\|u\|^{\alpha}_{L^2(\mathbf{R})}\|\partial_x u\|^{\beta}_{L^2(\mathbf{R})} \le C \tag{2.6}$$

となる．ここで，$\alpha = 1 + (p+1)/2$, $\beta = (p+1)/2 - 1$ である．今，仮定から $1 < p < 5$ なので，$\beta < 2$ であることに注意．故に，(2.6) に Young の不等式を用いれば，$\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R})} < C$ を示すことができて，時間大域解の存在を導くことができる．□

補足 2.1　Theorem 2.2 の仮定で $\lambda < 0$ かつ $5 \le p$ であっても，u_0 に $H^1(\mathbf{R})$ の意味で小ささを仮定すると時間大域的な解が存在する．しかし，大きなデータに対しては有限時間のうちに $\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R})}$ が発散することが知られている [8, 22, 27]．光ファイバーの話題に絡めてこの結果を解釈すると，光の強いところは屈折率が大きくなる（非線形 Kerr 効果）ので光波の伝播速度が遅くなり，そこに速く動く弱い光が積み重なることで，光波はだんだん1点に自己収束することになる．この爆発の結果は，定性的な直感に数学的な裏付けを与えたとも言えるであろう．

補足 2.2　保存量を用いて時間大域解を構成することが，当面の目標になっているが，その際に保存量は (2.1), (2.2) の2種類も必要であろうか？解の正則性が少なくて済む保存量 (2.1) だけを用いて時間大域的な解を構成することはできないであろうか？つまり，これは $L^2(\mathbf{R})$ の枠組みで解を構成する問題になる．この問題は，以下の定理に示されているように肯定的に解決されている．

Theorem 2.3 (Y. Tsutsumi [29]). $1 < p < 5$，$u_0 \in L^2(\mathbf{R})$ とする．このとき，積分方程式：

$$u(t) = U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau))\, d\tau \tag{2.7}$$

を満たす解 $u(t,x) \in C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R})) \cap L^r_{loc}(\mathbf{R}; L^{p+1}(\mathbf{R}))$ が唯一つ存在する．ただし，$2/r = 1/2 - 1/(p+1)$ であり，(2.7) の右辺にある時間積分は $H^{-1}(\mathbf{R})$ に値をとる関数に対する *Bochner* 積分である．

Theorem 2.3 の証明の鍵になるものは，Strichartz の不等式 [15, 26, 31]：

$$\begin{aligned} \|U(t)u_0\|_{L^{r_1}(\mathbf{R};L^{q_1}(\mathbf{R}))} &\le C\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}, \\ \|\int_0^t U(t-\tau)F(\tau)\, d\tau\|_{L^{r_1}(\mathbf{R};L^{q_1}(\mathbf{R}))} &\le C\|F\|_{L^{r_2'}(\mathbf{R};L^{q_2'}(\mathbf{R}))} \end{aligned}$$

である．ここで，$0 \leq 2/r_j = 1/2 - 1/q_j < 1$ $(j = 1, 2)$ であり，$1/q_2 + 1/q_2' = 1/r_2 + 1/r_2' = 1$ である．Strichartz の不等式は，時刻が経過すると線形 Schrödinger 方程式の解の正則性が高くなることを表すもので，ラプラシアン $-\partial_x^2$ がもたらす「分散性（波長の短い波ほど早く遠くに飛び去ってしまう性質）」に起因する．

補足 2.3　負の正則性を持つ関数空間で解を構成することは可能であろうか？例えば，$u \in C(I; H^s(\mathbf{R}))$ (ただし，$s < 0$) のような解を構成できるであろうか？実は，負の正則性を持つ関数空間では，仮に解が存在しても一意性が崩れることや，解の安定性（解作用素の広義一様連続性）が破綻することが知られている [4, 16].

3　解の漸近挙動

光ファイバーの中を光信号が伝播するにつれて波形はどのように変化していくのであろうか? 本講演では入門的な内容を取り扱っているので，$t \to \infty$ における解の漸近挙動を比較的楽に求められる題材で議論を進めたい．そのために“小さなデータ”に対する漸近挙動に焦点を絞ろう．大きなデータに対する漸近挙動については，特殊な等式 (pseudo-conformal identity) のほかに様々な道具が必要になる [6, 20, 21] ので，ここでは扱わない．

●　線形 Schrödinger 方程式の解

時刻変数を $t \to \infty$ としたときに，(NLS) の解 $u(t, x)$ はどのような振る舞いをするであろうか．解の L^∞ ノルムが減衰することを期待すると，非線形項 $\mathcal{N}(u)$ の影響がどんどん小さくなっていくので，(NLS) の解は漸近的に線形 Schrödinger 方程式の解に近づくことが予想される．そこで，まず線形 Schrödinger 方程式：

$$\text{(LS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

の解 $U(t)u_0$ が $t \to \infty$ のときにどのような振る舞いをするのか見ておこう．線形 Shrödinger 方程式は量子力学で重要な役割を果たしているが，この講演では光ファイバーの話題に絡めて議論を進めているので，ここではさしずめ非線形 Kerr 効果の無い光ファイバーを伝わる光波の様子を見ていると思ってきただきたい．さて，Fourier 変換 $\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i\xi x} \varphi(x)\, dx$ を用いると, (LS) の解 $u(t, x)$ は次のように表現できる．

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1} \exp(it\xi^2) \mathcal{F} u_0 \\ &= (4\pi i t)^{-1/2} \int \exp(i|x - y|^2/4t) u_0(x)\, dx \end{aligned}$$

この表現から，次のことがわかる．

線形 Schrödinger 方程式の解の性質

- **（$L^{q'}$-L^q 評価）** $2 \le q \le \infty$, $1/q + 1/q' = 1$ とする．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$\|U(t)u_0\|_{L^q(\mathbf{R})} \le Ct^{-(1/2-1/q)}\|u_0\|_{L^{q'}(\mathbf{R})} \tag{3.1}$$

- **（Dollard 分解）** $Mf(x) = \exp(ix^2/4t)f(x)$, $Df(x) = (2it)^{-1/2}f(x/2t)$ とする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$U(t)u_0 = MD\mathcal{F}Mu_0 \tag{3.2}$$

  $t \to \infty$ のとき $M \to 1$ に注意すると，この等式から

$$U(t)u_0 = MD\mathcal{F}u_0 + o(t^{-1/2}) \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}) \text{ as } t \to \infty.$$

  ただし，$u_0 \in L^1(\mathbf{R})$ とする．

● 非線形 Schrödinger 方程式の解の漸近挙動（small data の場合）

次に, $t \to \infty$ において (NLS) の解 $u(t,x)$ がどのように振舞うのかを考えよう．非線形項のベキ p が大きいほど，$\mathcal{N}(u)$ は減衰しやすくなるので，解の漸近挙動を調べやすくなることは容易に推察される．また，非線形 Schrödinger 方程式の場合，熱方程式特有の「比較定理」が成り立たないので，漸近挙動の解析では積分方程式やエネルギー評価式によるアプリオリな議論を用いることになる．以下では，漸近挙動の解析が易しい場合 (super critical case) から考察を始めて，そのつど現れる困難を解決するような流れで物理的に重要な場合 (p=3 : critical case) を取り扱う．

A. 初等的なアイデアによる考察（$4 < p$: super critical case） 非線形項のベキ p が十分大きいとき，(NLS) の解の漸近挙動は以下のとおり．

Theorem 3.1. $4 < p$ とする．また，$u_0 \in H^1(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ は，$\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R})\cap L^1(\mathbf{R})} < \rho_0 \ll 1$ を満たすものとする．このとき，(*NLS*) の時間大域解 u に対して次のことが成り立つ．

(1) $\langle t\rangle = (1+t^2)^{1/2}$ として，$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le C\langle t\rangle^{-1/2}$.

(2) ある $\varphi \in H^1(\mathbf{R})$ が存在して，$u(t) = U(t)\varphi + o(1)$ *in* $L^2(\mathbf{R})$ *as* $t \to \infty$.

《Theorem 3.1 の証明 (概略)》 (1) $C_0 > 0$ に対して，$T^* = \sup\{T; \sup_{0 \le t < T} \langle t\rangle^{1/2}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} < 3C_0\rho_0\}$ とおいて，$T^* = \infty$ になることを示す．$t \in [0, T^*)$ に対して，積分方程式 (2.3) の両辺に L^∞ ノルムをとり，$U(t)$ の $L^1 - L^\infty$ 評価を利用すると，

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \\
&\le C_0\langle t\rangle^{-1/2}\rho_0 + C\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-1/2}\|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{L^1(\mathbf{R})\cap H^1(\mathbf{R})}\, d\tau \\
&\le C_0\langle t\rangle^{-1/2}\rho_0 + C\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-1/2}\|u(\tau)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{p-2}\|u(\tau)\|_{H^1(\mathbf{R})}^2\, d\tau \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

となる．小さいデータの場合，エネルギー保存から (3.3) の右辺にある $\|u(\tau)\|_{H^1(\mathbf{R})}^2$ は定数で抑えられるので，ρ_0 を十分小さく選ぶと，

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} &\le C_0\rho_0\langle t\rangle^{-1/2} + C\rho_0^p\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-1/2}\langle\tau\rangle^{-(p-2)/2}\, d\tau \\
&\le 2C_0\rho_0\langle t\rangle^{-1/2} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

となる．ただし，(3.4) で $4 < p$ のとき，$\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-1/2}\langle\tau\rangle^{-(p-2)/2}\, d\tau \le C\langle t\rangle^{-1/2}$ を使っている．ここで，もし $T^* < \infty$ とすると，不等式 (3.4) の両辺に $\langle t\rangle^{1/2}$ を掛けて $t \to T^*$ の極限をとることで，$3C_0\rho_0 \le 2C_0\rho_0$ という矛盾が生じてしまう．ゆえに $T^* = \infty$.

(2) $U(-t)u(t)$ が $t \to \infty$ のときに $H^1(\mathbf{R})$ の位相である関数に収束することを示せばよい．積分方程式 (2.3) から

$$U(-t)u(t) = u_0 - i\lambda\int_0^t U(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau))\, d\tau$$

であること，および (1) から $\|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{H^1(\mathbf{R})} \le C\langle\tau\rangle^{-(p-1)/2}$ ($(p-1)/2 > 1$ に注意) であることに気をつけると，$\lim_{t\to\infty} U(-t)u(t)$ の存在を示すことができる．□

物理学では, $p = 3$ の場合がよく登場するので，もっと p の値を下げて解の漸近挙動を調べる必要がある．実は，Theorem 3.1 の証明では非線形項の評価が粗いのである．次の考察では，このあたりを改良する．

B. 解の素性を丁寧に見ることによる改良（$3 < p$: **super critical case**）今，(NLS) の解 $u(t)$ は t が大きいと線形 Schrödinger 方程式の解に近づくというイメージのもとで考察を進めている．つまり，$u(t) \sim U(t)\varphi$ もしくは $U(-t)u(t) \sim \varphi$ となること

を期待している．そこで，

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)(U(-t)u(t)) \\ &\equiv U(t)v(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

と書き換えて非線形項を評価してみよう．すると，Theorem 3.1 の場合よりも非線形項のベキをもう少し下げることができる．

Theorem 3.2. $3 < p$ とする．また，$u_0 \in H^1(\mathbf{R})$ かつ $xu_0 \in L^2(\mathbf{R})$ とし，$\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R})} + \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R})} < \rho_0 \ll 1$ を満たすものとする．このとき，(*NLS*) の時間大域解 $u \in C(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R})) \cap C^1(\mathbf{R}; H^{-1}(\mathbf{R}))$ が唯一つ存在して，$xu \in C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}))$ を満たし，*Theorem 3.1* と同様の結論が成り立つ.

《Theorem 3.2 の証明（概略）》 $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = \|U(t)v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le Ct^{-1/2}\|v(t)\|_{L^1(\mathbf{R})}$ なので，$\|v(t)\|_{L^1(\mathbf{R})}$ が定数で抑えられることを示せばよい．ただし，L^1 ノルムは Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と相性が悪いので, $\|v(t)\|_{L^1(\mathbf{R})} \le C(\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|xv(t)\|_{L^2(\mathbf{R})})$ のように L^2 ベースのノルムで押さえ込み, $\|xv(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$ が定数で抑えられることを示す.

ここで, 作用素 $J = U(t)xU(-t) = x + 2it\partial_x = M(2it\partial_x)\overline{M}$ を導入する.

$$\begin{aligned} \|xv\|_{L^2(\mathbf{R})} &= \|Ju\|_{L^2(\mathbf{R})}, \\ J\mathcal{N}(u) &= \frac{p+1}{2}|u|^{p-1}Ju - \frac{p-1}{2}|u|^{p-3}u^2\overline{Ju} \end{aligned}$$

が成り立つことに注意．あとは積分方程式 (2.3) に縮小写像の原理を適用すればよい．その際,

$$\begin{aligned} &\|J\Phi(u)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\quad\le \rho_0 + C\int_0^t \|u(\tau)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{p-1}\|Ju(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R})}\,d\tau \\ &\quad\le \rho_0 + C\int_0^t \langle\tau\rangle^{-(p-1)/2}(\|u(\tau)\|_{H^1(\mathbf{R})} + \|Ju(\tau)\|_{L^2(\mathbf{R})})^p\,d\tau \end{aligned} \tag{3.6}$$

となることに注意．$3 < p$ のときに $\langle\tau\rangle^{-(p-1)/2}$ が積分可能な程度に減衰していることから，$\|Ju(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$ の時間大域的な評価が得られる．□

C. より丁寧に解の素性を見ることによる改良（$p = 3$ ： **critical case**）さて，最後に物理学でよく登場する $p = 3$ の場合で，解の漸近挙動を調べる．この場合，Theorem 3.2 の証明と同じ議論は使えない．なぜなら，(3.6) の被積分関数に見られる $\langle\tau\rangle^{-(p-1)/2} = \langle\tau\rangle^{-1}$ の減衰が弱いために，τ による積分が有限の値にならないか

らである．結論を先に述べると，$u(t)$ は線形 Schrödinger 方程式の解に近づかないことが知られている．これが，$p=3$ を「臨界指数」と呼ぶ由縁である．

Theorem 3.3 (Hayashi-Naumkin [10]). $p=3$ とする．また，$u_0 \in H^1(\mathbf{R})$ かつ $xu_0 \in L^2(\mathbf{R})$ とし，$\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R})} + \|xu_0\|_{L^2(\mathbf{R})} < \rho_0 \ll 1$ を満たすものとする．このとき，(NLS) の時間大域解 $u \in C(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R})) \cap C^1(\mathbf{R}; H^{-1}(\mathbf{R}))$ が唯一つ存在して，$xu \in C(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}))$ を満たし，次のことが成り立つ．

(1) $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le C\langle t\rangle^{-1/2}$.

(2) $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ かつ $\mathcal{F}\varphi \in L^\infty(\mathbf{R})$ を満たす関数 φ が存在して，

$$u(t) = U(t)\mathcal{F}^{-1}\exp\left(-i(\lambda/2)|\mathcal{F}\varphi|^2\log t\right)\mathcal{F}\varphi + o(1) \quad \textit{in } L^2(\mathbf{R}) \textit{ as } t\to\infty.$$

注意 Theorem 3.3 の (2) を見ると，解の漸近形に $\mathcal{F}^{-1}\exp\left(-i(\lambda/2)|\mathcal{F}\varphi|^2\log t\right)\mathcal{F}$ で表される修正が入っている．これは臨界ベキ特有の効果である．

《Theorem 3.3 の証明（概略）》 解の漸近形を決める手立てのみ紹介しよう．鍵は，非線形項から減衰の弱い部分を抜き出すところにある．(NLS) から，$v(t)=U(-t)u(t)$ が満たす関係式を導き，Dollard 分解 $U(t)=MD\mathcal{F}M$ を用いると，

$$\begin{aligned} i\partial_t v &= \lambda U(-t)\mathcal{N}(U(t)v) \\ &= \lambda\overline{M}\mathcal{F}^{-1}D^{-1}\overline{M}\mathcal{N}(MD\mathcal{F}Mv) \\ &= \lambda|2t|^{-1}\overline{M}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{N}(\mathcal{F}Mv) \end{aligned}$$

となる．ここで，$t\to\infty$ のとき $M\to 1$ に注意すると，

$$i\partial_t\mathcal{F}v = \lambda|2t|^{-1}\mathcal{N}(\mathcal{F}v) + R(t) \tag{3.7}$$

と書ける．ここで，$R(t) = \lambda|2t|^{-1}(\mathcal{F}\overline{M}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{N}(\mathcal{F}Mv) - \mathcal{N}(\mathcal{F}v))$ は早く減衰することが期待される誤差項である．(3.7) の右辺にある $\lambda|2t|^{-1}\mathcal{N}(\mathcal{F}v)$ が減衰の悪さを生み出す元凶なので，これを左辺に移して整理すると，

$$\partial_t e^{i\lambda\Phi}\mathcal{F}v = -ie^{i\lambda\Phi}R(t) \tag{3.8}$$

となる．ここで，$\Phi = \displaystyle\int_1^t |2\tau|^{-1}|\mathcal{F}v(\tau)|^2\,d\tau$ である．(3.8) の右辺は十分早く減衰することが期待できるので，$e^{i\lambda\Phi}\mathcal{F}v$ は $t\to\infty$ のときに何かしらの関数に収束する．これから，$u(t)$ の漸近形を決定することができる．

ここまでの議論では，誤差項 $R(t)$ が早く減衰することを認めていたが，

$$\|R(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le Ct^{-5/4}(\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|Ju(t)\|_{L^2(\mathbf{R})})^3$$

という不等式を導けるので，結局 $\|Ju(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$ の時間大域的な評価がこの証明でもっとも精力を費やさねばならないところになる．じつは，$\|Ju(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$ は初期データのサイズに応じたオーダーで増大することがアプリオリ評価から出せる．□

補足 3.1　以上では非線形項の係数 λ が実数の場合を扱ってきたが，$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ (λ_1, λ_2 は実数) のように λ が複素数になっても解の漸近挙動が調べられている．虚部 $\lambda_2(<0)$ は，光ファイバー内に混在している不純物によるエネルギー損失（非線形 Ohm の法則）の度合いを表している．Shimomura [25] によると，$p = 3, \lambda_2 < 0$ のときに小さなデータに対して，

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le C\langle t\rangle^{-1/2}(\log(2+t))^{-1/2} \quad (\text{ただし，} t \ge 0) \tag{3.9}$$

という減衰を示すことが証明されている．これは，λ に負の虚部が入ると減衰オーダーに非線形項の影響が現れることを意味する．また，Kita-Shimomura [17] によると，$p = 3, \lambda_2 < 0$ かつ $|\lambda_1| \le \sqrt{3}|\lambda_2|$ の条件を課せば，大きなデータに対しても解の L^∞ ノルムが (3.9) と同じオーダーで減衰することがわかっている．ここで，$|\lambda_1| \le \sqrt{3}|\lambda_2|$ という付加条件は $\frac{d}{dt}\|Ju(t)\|^2_{L^2(\mathbf{R})} \le 0$ (Liskevich-Pelermuter の不等式 [19]) を示す際に用いられ，複素 Ginzburg-Lndau 方程式の時間大域的な解の解析でよく利用されている [23].

参考文献

[1] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, Inc. (1995).

[2] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics **10**, American Mathematical Society (2003).

[3] T. Cazenave and A. Haraux, An introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford Science Publications (1998).

[4] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, *Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations*, Amer. J. Math. **125** (2003), 1235–1293.

[5] J. Ginibre, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, in “Nonlinear Waves,” (R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa, Eds.), GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications **10** (1997), 85–133.

[6] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrodinger equations. II. Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33–71.

[7] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrodinger equations. I. The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32.

[8] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), 1794–1797.

[9] N. Hayashi, E. Kaikina and P. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999), 93–106.

[10] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–645.

[11] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Modified wave operator for Schrödinger type equations with subcritical dissipative nonlinearities*, Inverse Problems and Imaging **1** (2007), 391-398.

[12] N. Hayashi and M. Tsutsumi, $L^\infty(R^n)$*-decay of classical solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **104** (1986), 309–327.

[13] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, in "Schrödinger Operators," (H. Holden and A. Jensen Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer-Verlag (1989), 218–263.

[14] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **46**(1986), 113–129.

[15] M. Keel and T. Tao, Endpoint Strichartz estimates, Amer. J. Math., **120** (1998), 955–980.

[16] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, Duke Math. J., **106**(2001), 627–633.

[17] N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrodinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 39–64.

[18] N. Kita and A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with a subcritical dissipative nonlinearity*, J. Differential Equations **242** (2007), 192–210.

[19] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, *Analyticity of submarkovian semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097–1104.

[20] K. Nakanishi, *Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrodinger equations in spatial dimensions* 1 *and* 2, J. Funct. Anal. **169** (1999), 201–225.

[21] K. Nakanishi and T. Ozawa, *Remarks on scattering for nonlinear Schrodinger equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **9** (2002), 45–68.

[22] H. Nawa and M. Tsutsumi, *On blow-up for the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation*, Funkcial. Ekvac. **32** (1989), 417–428.

[23] N. Okazawa and T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian*, J. Differential Equations **182** (2002), 541–576.

[24] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[25] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. P. D. E. **31** (2006), 1407–1423.

[26] R. S. Strichartz, Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of wave equation, Duke Math. J., **44**(1977), 705–714.

[27] M. Tsutsumi, *Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrodinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 357–366.

[28] 堤誉志雄, 偏微分方程式論, 倍風館 (2004).

[29] Y. Tsutumi, *L^2 solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funk. Ekva., **30**(1987), 115–125.

[30] Y. Tsutsumi, *Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. TMA, **11**(1987), 1143–1154.

[31] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys., **110**(1987), 415–426.

細い領域における半線形楕円型方程式の解の分岐

菅 徹 (かん とおる)

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻

E-mail: sa7m08@math.tohoku.ac.jp

1 導入

本講演では, 空間多次元の細い領域における半線型楕円型方程式の解の分岐の構造が, 関連する空間 1 次元の微分方程式のそれによってどの程度決定されるのかを考察する.

Hale-Raugel [1], Raugel [2] の枠組みに沿って細い領域の設定をする. ε_0 を (小さい) 正の数, $g \in C^2([0,1])$ を正の値を取る関数とし, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ に対して, 細い領域 $Q_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ を,

$$Q_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < \varepsilon g(x),\ 0 < x < 1\}$$

と定義する. この領域上で次の半線型楕円型方程式を考える:

$$(\tilde{\mathrm{P}})_\varepsilon \begin{cases} \Delta u + f(u,\lambda) = 0 & \text{in } Q_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_\varepsilon} = 0 & \text{on } \partial Q_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで λ は実数の分岐パラメータ, ν_ϵ は ∂Q_ε の外向き単位法線ベクトルである. また, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^3 級関数であり, その 3 階までのすべての偏導関数が第 1 変数に関して多項式増大度しか持たないとし, また $f(0,\lambda) \equiv 0$ であるとする.

変数変換 $Q := (0,1) \times (0,1) \ni (x,y) \mapsto (x, \varepsilon g(x) y) \in Q_\varepsilon$ によって方程式 $(\tilde{\mathrm{P}})_\varepsilon$ は,

$$(\mathrm{P})_\varepsilon \begin{cases} L_\varepsilon u + f(u,\lambda) = 0 & \text{in } Q, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_{B_\varepsilon}} := B_\varepsilon u \cdot \nu = 0 & \text{on } \partial Q \end{cases}$$

と変換される. ここで,

$$L_\varepsilon := \frac{1}{g}\mathrm{div} B_\varepsilon, \quad B_\varepsilon := \begin{pmatrix} g\dfrac{\partial}{\partial x} - g_x y \dfrac{\partial}{\partial y} \\ -g_x y \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{g}\Big\{\dfrac{1}{\varepsilon^2} + (g_x y)^2\Big\}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

であり, ν は ∂Q の外向き単位法線ベクトルである.

$\varepsilon = 0$ における $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の極限の方程式は次のようになる:

$$(\mathrm{P})_0 \begin{cases} \dfrac{1}{g(x)}(g(x) v_x)_x + f(v,\lambda) = 0 & \text{in } (0,1), \\ v_x(0) = v_x(1) = 0. \end{cases}$$

このような特異な領域変形に対する方程式の解の構造変化に関する研究として, [1] では細い領域上の反応拡散方程式の大域的アトラクタが, 関連する空間 1 次元の反応拡散方程式のそれに上半連続であることを示している. 本講演では $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の分岐構造が $(\mathrm{P})_0$ のそれによってどの程度近似されるのかを考察する. 具体的には, $(\mathrm{P})_0$ の正則な解 (その解の周りでの線形化作用素が 0 を固有値に持たないような解) の近傍に $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の正則な解が存在すること, 及び $(\mathrm{P})_0$ がサドルノード分岐, 自明解 (恒等的に 0 である解) からの分岐を起こした時に, その近傍で $(\mathrm{P})_\varepsilon$ も同様の分岐を起こすことを見る.

2　主結果

以下では分岐パラメータである λ も未知であると考え, $(\mathrm{P})_\varepsilon$, $(\mathrm{P})_0$ を満たす関数 u もしくは v と実数 λ の組をその方程式の解とみなす. また $\|\cdot\|$ は $\|u\| := \left(\|u\|^2_{H^1(Q)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$ で定義される $H^1(Q)$ 上のノルムであるとする.

まず正則な解の枝 (特に分岐を起こさない場合) に関して次のことが得られる.

定理 2.1. $I \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間, $\{(v(\lambda),\lambda) \in H^1(0,1)\times\mathbb{R}; \lambda \in I\}$ を $(\mathrm{P})_0$ の正則な解の枝であるとする. このとき, ある正の数 θ_1, C_1 および $\varepsilon_1 (0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ に対して, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の正則な解の枝 $\{(u_\varepsilon(\lambda),\lambda) \in H^1(Q)\times\mathbb{R}; \lambda \in I\}$ が存在して,

$$\max_{\lambda\in I}\|u_\varepsilon(\lambda) - v(\lambda)\| \le C_1\varepsilon$$

が成り立つ. さらに $\{(u,\lambda) \in H^1(Q)\times\mathbb{R}; \|u - v(\lambda)\| \le \theta_1, \lambda \in I\}$ 内にある $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解は上で得られたものに限る.

次にサドルノード分岐に関して次のことが得られる.

定理 2.2. $(v_0,\lambda_0) \in H^1(0,1)\times\mathbb{R}$ を $(\mathrm{P})_0$ の返り点とする (従って特に $(\mathrm{P})_0$ の解の枝 $\{(v(s),\lambda(s)) \in H^1(0,1)\times\mathbb{R}; s \in [-s_0,s_0]\}$ で $(v(0),\lambda(0)) = (v_0,\lambda_0)$ および $\frac{dv}{ds}(0) \ne 0, \frac{d\lambda}{ds}(0) = 0, \frac{d^2\lambda}{ds^2}(0) \ne 0$ となるものが存在する). このとき, ある正の数 θ_2, C_2 および $\varepsilon_2 (0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_0)$ が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ に対して, ある $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の枝 $\{(u_\varepsilon(s),\mu_\varepsilon(s)) \in H^1(Q)\times\mathbb{R}; s \in [-s_0,s_0]\}$ が存在して,

$$\sum_{j=0,1,2}\max_{-s_0\le s\le s_0}\left\{\left\|\frac{d^j}{ds^j}\left(u_\varepsilon(s) - v(s)\right)\right\| + \left|\frac{d^j}{ds^j}\left(\mu_\varepsilon(s) - \lambda(s)\right)\right|\right\} \le C_2\varepsilon$$

が成り立つ. 特にある $-s_0 < \tau_\varepsilon < s_0$ が唯一つ存在して, $(u_\varepsilon(\tau_\varepsilon),\mu_\varepsilon(\tau_\varepsilon))$ は $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の返り点になる. 加えて $\{(u,\lambda) \in H^1(Q)\times\mathbb{R}; \|u - v_0\| + |\lambda - \lambda_0| \le \theta_2\}$ 内における $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解は上で得られたものに限る.

自明解からの分岐に関しては次のことが得られる.

定理 2.3. $(0,\lambda_0)$ を $(\mathrm{P})_0$ の単純分岐点とする (従って特に $(\mathrm{P})_0$ の解の枝 $\{(tv(t),\lambda(t)) \in H^1(0,1)\times\mathbb{R}; t \in [-t_0,t_0]\}$ で $\lambda(0) = \lambda_0$ およびすべての $t \in [-t_0,t_0]$ に対して $v(t) \ne 0$ となるものが存在する). このとき, ある正の数 θ_3, C_3 および $\varepsilon_3 (0 < \varepsilon_3 \le \varepsilon_0)$ が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_3$ に対して, ある $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の枝 $\{(tu_\varepsilon(t),\mu_\varepsilon(t)) \in H^1(Q)\times\mathbb{R}; t \in [-t_0,t_0]\}$ が存在して,

$$\max_{-t_0\le t\le t_0}\left(\|u_\varepsilon(t) - v(t)\| + |\mu_\varepsilon(t) - \lambda(t)|\right) \le C_3\varepsilon$$

が成り立つ. 特に $(0,\mu_\varepsilon(0))$ は $(\mathrm{P})_\varepsilon$ は単純分岐点になる. 加えて $\{(u,\lambda) \in H^1(Q)\backslash\{0\}\times\mathbb{R}; \|u\| + |\lambda - \lambda_0| \le \theta_3\}$ 内における $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解は上で得られたものに限る.

参考文献

[1] J. K. Hale, G. Raugel, *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures Appl., **71** (1992), 33-95.

[2] G.Raugel, *Dynamics of partial differential equations on thin domains*, Lecture Notes in Math., **1609** (1994), 208-315, Springer-Verlag.

Instability of bound states of nonlinear Schrödinger equations

前田 昌也 (まえだ まさや)

京都大学大学院 理学研究科 数学数理解析専攻

E-mail: maeda@math.kyoto-u.ac.jp

1 導入

次の非線形 Schrödinger 方程式

$$iu_t = -\Delta u + f(x, |u|^2)u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+N} \tag{1}$$

を考える. ここで $f(x,s) \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ は任意の $u \in H^1$ に対して $|\int_{\mathbb{R}^N} F(x,|u|^2)\,dx| < \infty$ を満たしているとする. ただし, $F(x,s) = \int_0^\tau f(x,\tau)\,d\tau$.

非線形 Schrödinger 方程式 (1) の解で $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ という形をしているものを定在波解と呼ぶ. $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ が (1) の解であるとき ϕ_ω は次の定常問題の解となっている.

$$-\Delta\phi_\omega + \omega\phi_\omega + f(x, |\phi_\omega|^2)\phi_\omega = 0.$$

ここでは定在波解の安定性について考える.

定義 1.1. 定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が安定であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して $\inf_{s\in\mathbb{R}} ||u_0 - e^{is}\phi_\omega||_{H^1} < \delta$ を満たす任意の $u_0 \in H^1$ に対して

$$\sup_{t>0} \inf_{s\in\mathbb{R}} ||u(t) - e^{is}\phi_\omega||_{H^1} < \varepsilon.$$

が成立することを言う. ただし, u は u_0 を初期値とする (1) の解である. また定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が安定でないとき不安定であるという.

非線形 Schrödinger 方程式 (1) は形式的に次の量を保存する.

$$\begin{aligned} E(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} F(x,|u|^2)\,dx, \\ Q(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx. \end{aligned}$$

仮定 1.2. 非線形 Schrödinger 方程式 (1) は時間局所適切であり, E, Q を保存する. さらに, ある ω_1, ω_2 があって $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ のとき定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が存在し, 対応 $\omega \mapsto \phi_\omega$ は C^1.

作用 S_ω を $S_\omega(u) = E(u) + \omega Q(u)$ で定義する.

仮定 1.3. $S''_\omega(\phi_\omega)$ の正のスペクトルは 0 から離れているとする. さらに $\mathrm{Ker}S''_\omega(\phi_\omega) = \mathrm{span}(i\phi_\omega)$ であり, $S''_\omega(\phi_\omega)$ の負のスペクトルは固有値であり高々有限個であるとする. $n(S''_\omega(\phi_\omega))$ を $S''_\omega(\phi_\omega)$ の負のスペクトルの個数であるとする.

$d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega)$ と定義する.
$S''_\omega(\phi_\omega)$ の負の固有値が一つである場合は次の結果が知られている.

定理 1.4 ([2])**.** $n(S''_\omega(\phi_\omega)) = 1$ とする. このとき, $d''(\omega) > 0$ ならば定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は安定であり, $d''(\omega) < 0$ ならば定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は不安定.

線形化不安定性に関しては次の結果が知られている.

定理 1.5 ([3]). $n(S''_\omega(\phi_\omega))$ は偶数かつ $d''(\omega) > 0$, または $n(S''_\omega(\phi_\omega))$ は奇数かつ $d''(\omega) < 0$ であるとする. このとき定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の線形化作用素は正の固有値をもつ. さらに, 非線形項が

$$\begin{aligned} ||g_{\phi_\omega}(x,\rho)||_{H^1} &\leq C||\rho||_{H^1}^{1+\alpha}, \ \alpha > 0. \\ g_{\phi_\omega}(x,\rho) &= f(x,|\phi_\omega+\rho|^2)(\phi_\omega+\rho) - f(x,|\phi_\omega|^2)\phi_\omega \\ &\quad -f(x,|\phi_\omega|^2)\rho - 2i\partial_s f(x,|\phi_\omega|^2)\mathrm{Re}(\phi_\omega\overline{\rho})\phi_\omega. \end{aligned} \tag{2}$$

を満たせば定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は不安定となる.

注意 1.6. べき乗型の非線形項 $f(x,s) = s^\alpha$, $\alpha > 0$ の場合, 評価 (2) は 1 次元の場合に示すことができるが高次元の場合では難しい. 2 次元及び 3 次元の場合では H^2 ノルムを使うことによって Colin-Colin-Ohta [1] が線形化不安定性から軌道不安定性を導いている.

我々の結果は以下である.

定理 1.7. $n(S''_\omega(\phi_\omega)) = 2$ とする. さらに $S''_\omega(\phi_\omega)$ の二つの負の固有値のどちらか一方の固有関数が ϕ_ω と直交しているとする. このとき, $d''(\omega) > 0$ ならば定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は不安定.

注意 1.8. 我々の定理の仮定は $n(S''_\omega(\phi_\omega)) = 2$: 偶数, $d''(\omega) > 0$ なので定理 1.5 に含まれている. しかし, 定理 1.7 では非線形項の評価 (2) を必要としない. これにより 4 次元以上での高次元でも軌道不安定性を示すことができる.

2 応用

次の 3 波相互作用方程式を考える.

$$\begin{aligned} i\partial_t u_1 &= -\Delta u_1 - |u_1|^{2\alpha}u_1 - \gamma\overline{u_2}u_3, \\ i\partial_t u_2 &= -\Delta u_2 - |u_2|^{2\alpha}u_2 - \gamma\overline{u_1}u_3, \\ i\partial_t u_3 &= -\Delta u_3 - |u_3|^{2\alpha}u_3 - \gamma u_1 u_2. \end{aligned}$$

ただし, $1 \leq N \leq 5$, $\alpha \in (0, 2/N)$. このとき, 定在波解 $\Phi_\omega = (0, 0, e^{i\omega t}\phi)$ の軌道安定性を考える. ただし, ϕ は

$$0 = -\Delta\phi + \omega\phi - \phi^{2\alpha+1}$$

の唯一つの正値球対称解とする.

定理 2.1. ある $0 < \gamma_1(\omega) < \gamma_2(\omega)$ が存在して $\gamma(\omega) < \gamma < \gamma_2(\omega)$ について $n(S''_\omega(\phi_\omega)) = 2$.

注意 2.2. $d''(\omega) > 0$ はスケーリングによりすぐわかるので定理 1.7, 2.1 により, Φ_ω の軌道不安定性がわかる. ただし 3 次元までの場合は [1] により $\gamma_1(\omega) < \gamma$ での軌道不安定性がすでにわかっている.

参考文献

[1] Mathieu Colin, Thierry Colin, and Masahito Ohta, Instability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction. preprint.

[2] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, and Walter Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. J. Funct. Anal., **74** (1987), no. 1, 160–197.

[3] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, and Walter Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II. J. Funct. Anal., **94** (1990), no. 2, 308–348.

非斉次境界問題における Navier-Stokes 方程式の時間周期解について

岡部 考宏 (おかべ たかひろ)
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
E-mail: sa6m08@math.tohoku.ac.jp

1 導入

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ は

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^{L} \Gamma_j$$

を満たすとする．ここで $\Gamma_0, \dots, \Gamma_L$ は互いに素な C^∞-surfaces で $\Gamma_1, \dots \Gamma_L$ は Γ_0 の内側に位置し, 互いに外側の位置にあるとする．

非斉次境界条件を課した Navier-Stokes 方程式において時間周期解の存在について考察する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div} u = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u|_{\partial\Omega} = \beta, \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = a, \quad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{N-S}$$

ここに $u = u(x,t)$, $p = p(x,t)$ は流体の速度ベクトル及び圧力項を表し，$f = f(x,t)$, $\beta = \beta(x)$ と $a = a(x)$ を与えられた外力項，境界値及び初期速度とする．ここで境界値 β の条件を考察すると，境界値 β は非圧縮条件と境界条件による適合条件である general flux condition :

$$\sum_{j=0}^{L} \int_{\Gamma_j} \beta \cdot \nu dS = 0, \tag{G.F.}$$

を満たすことが必要である．

調和ベクトル場空間 $V_{har}(\Omega)$ を

$$V_{har}(\Omega) := \{h \in C^\infty(\Omega)\,;\, \operatorname{div} h = 0,\, \operatorname{rot} h = 0 \text{ in } \Omega,\, h \times \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

とする．[3] により $\dim V_{har}(\Omega) = L$ であり $V_{har}(\Omega) = \operatorname{span}\{\psi_1, \dots, \psi_L\}$ とすれば $\{\psi_j\}_{j=1}^L$ は Ω のみによって決まる．更に特に, $V_{har}(\Omega) = \operatorname{span}\{\nabla q_1, \dots, \nabla q_L\}$ が成り立つ．ここに, $\{\nabla q_j\}_{j=1}^L$ は Ω 上の調和関数であり $q_j|_{\Gamma_0} = 0$ かつ $q_j|_{\Gamma_i} = \delta_{ij}$ を満たすものととれる．

また, [3] により，任意のソレノイダルベクトル場は調和なベクトル場と回転により表わされるベクトル場とに一意的に分解できることが示された.

2 主結果

以下の定理が成立する.

まず, (N-S) の弱解の存在を示す.

定理 2.1. $a \in L^2_\sigma$, $f \in L^2_{loc}([0,\infty); L^2)$ とする．$\beta \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ を (G.F.) を満たし, かつ

$$\left\| \sum_{k=1}^{L} \Big(\int_{\Gamma_k} \beta \cdot \nu dS \Big) \psi_k \right\|_3 < \frac{1}{4C_s}, \tag{1}$$

を満たすとする． ここに $C_s = 3^{-1/2}2^{2/3}\pi^{-2/3}$ は $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ に関する Sobolev の埋蔵定理の最良定数とする．このとき $u \in L^\infty_{loc}([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}([0,\infty); H^1(\Omega))$ なる $(0,T)$ 上の (N-S) の弱解が存在する．

次に (N-S) を満たす弱解が時間周期性の一般化である reproduct property を持つことを示す．

定理 2.2. f と β は定理 2.1 の仮定を満たすとする． 任意の $0 < T_* < \infty$ に対して，初期速度 $a \in L^2_\sigma$ と $(0,T)$ 上の（ただし $T_* < T$）(N-S) の弱解 u が存在して $u(T_*) = u(0) = a$ を L^2 で満たす．

証明. 証明は, 与えられた境界値 β のソレノイダル拡張 b, 即ち領域 Ω 上で $\operatorname{div} b = 0$ かつ $b|_{\partial\Omega} = \beta$ となるものを用い, 斉次境界条件に直した問題を考え, Galerkin 法により弱解を構成する． □

一方, 時間周期解は，外力 f と境界値 β に適切な小ささを要求した上で，(N-S) の解 u を非斉次境界問題の定常解からの初期擾乱として捉え，線形摂動作用素が生成する有界解析的半群の L^p-L^q 型評価を与えることで構成することができる．

定理 2.3. $1 < l < \infty$, $1 < p < 3/2$ に対して, 以下の性質を持つ定数 $\delta = \delta(l,p) > 0$ が存在する． $\beta \in W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)$ とする． $f \in BC(\mathbb{R}; L^l)$ は周期 T_* をもつ時間周期関数とする, 即ち, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $f(t) = f(t+T_*)$ を満たすとする．また f は L^3 に値をとる関数として $\mathbb{R}$ 上 Hölder 連続とする．もし β と f が

$$\|\beta\|_{W^{1-1/p^*,p^*}(\partial\Omega)} + \sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s)\|_l < \delta, \qquad p^* = \frac{3p}{3-p},$$

満たすならば，(N-S) の時間周期的な強解 $u \in BC(\mathbb{R}; L^3_\sigma)$ が存在する．即ち，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u(t) = u(t+T_*)$ が成り立つ．

注意 2.4. (i) 2 **次元では, 与えられた外力** f **が時間周期的なとき，Navier-Stokes 方程式における初期値問題の一意性により** reproduct property **をもつ弱解は時間周期的になることがわかる． 従って,** 2 **次元のとき, 境界値** β **に小ささを課すことなく時間周期解の存在を示すことができる.**

(ii) 3 **次元以上では外力** f **や境界値** β **に適切なノルムの小ささを課すことにより時間周期的な解を構成することができる.**

参考文献

[1] H.Kozono, M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2), **48** (1996), 33–50,

[2] H. Kozono, M. Yamazaki, *On a larger class of stable solutions to the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Z., **228**, (1998), 751–785.

[3] H. Kozono, T. Yanagisawa, *Leray's problem for the stationary Navier-Stokes equations and the harmonic vector fields I*, Math. Z., **262** (2009), 27–39

[4] T. Miyakawa, Y. Teramoto, *Existence and periodicity of weak solutions of the Navier-Stokes equations in a time dependent domain*, Hiroshima Math. J., **12** (1982), 513–528

[5] M. Yamazaki, *The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force*, Math. Ann., **317** (2000), 635–675.

POROUS MEDIUM 型非線形拡散方程式の解のヘルダー連続性について

水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科 D3)

次の非線形拡散方程式の弱解について考える:

$$
\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = -\mathrm{div} f(t,x,u) \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}
$$

ただし, $\alpha > 1$ とし, $f = f(t,x,z) : (0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は既知関数とする.

この方程式 (1) は, 拡散係数 $\alpha u^{\alpha-1}$ が $u = 0$ のときに 0 になる, 退化した方程式である. 拡散係数が消える点においては, 放物型方程式が持つ平滑化効果が得られないため, 解の滑らかさが失われることが知られている. 実際, $f \equiv 0$ のとき, 次の Barenblatt 解 $\mathscr{U}$ は (1) の第一式を (弱解の意味で) 満たす:

$$
\mathscr{U}(t,x) = t^{-\gamma}(C - kt^{-\frac{2\gamma}{n}}|x|^2)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \gamma = \frac{n}{n(\alpha-1)+2}, \quad k = \frac{\gamma(\alpha-1)}{2\alpha n},
$$

ただし, $C > 0$ は任意定数, $a_+ := \max\{a, 0\}$ とする.

$\mathscr{U}$ のレベル集合 $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, C - kt^{-\frac{2\gamma}{n}}|x|^2 = 0\}$ の近傍では Barenblatt 解 $\mathscr{U}$ は滑らかにならないことがわかる. このことから $\alpha = 1$ の場合である熱方程式とは異なり, (1) の弱解が滑らかになることは一般に期待できない. そこで, 弱解が Hölder 連続になるか, さらに Hölder ノルムに対してどのような評価が得られるかを問題とする.

$f \equiv 0$ に対する Hölder 連続性は, Caffarelli-Friedman [1] によってはじめて証明された. 彼らは, $\varepsilon > 0$ に対し, (1) の近似方程式 $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon^\alpha = 0$, $u_\varepsilon(0,x) = u_0(x) + \varepsilon$ を考え, Aronson-Benilan 評価

$$
\Delta u_\varepsilon^{\alpha-1} \geq -\frac{C(n,\alpha)}{t}, \quad \partial_t u_\varepsilon \geq -\frac{C(n,\alpha)}{t} u_\varepsilon
$$

と比較原理を用いることで, 解 u_ε の ε に依らない Hölder 連続性を導出することにより, 解 u の Hölder 連続性を導出した. 彼らの証明には, Aronson-Benilan 評価と比較原理が証明の鍵となっているため, 比較原理の成り立たない方程式 (例えば, f に u の非局所項が含まれている場合など) には適用が難しいと思われる.

他方, DiBenedetto-Friedman [2] は, $p > 2$ に対し, 次の p-Laplace 発展方程式

$$
\partial_t v - \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0 \tag{2}
$$

の弱解の勾配が Hölder 連続になることを示した. 彼らの証明の鍵は, 解の局所的な性質をスケール変換を用いて考察する際に, 解の局所的な振動の情報をスケール変換に取り入れたことである. さらに, De Giorgi の繰り返し法を, 解の情報の入ったスケール変換に対しても機能することを示した.

ところで, 空間 1 次元に対する (2) の解 v に対して, $|\nabla v|^2$ は $f \equiv 0$ に対する (1) の解となることがわかる. このことから, $f \equiv 0$ に対する (1) の解に対しても DiBenedetto-Friedman の手法を用いて, 解の Hölder 連続性を導出できるのでは, と推測できる. 実際に, DiBenedetto-Friedman は, [2] において, $f \equiv 0$ に対する (1) の解の Hölder 連続性が導出できると言及して

いるが, 外力がついた方程式の弱解に対する Hölder 連続性の証明は与えておらず, Hölder ノルムに対する評価も与えられてはいない. そこで, 彼らの証明を修正し, 外力項 f が適当な可積分条件を満たせば, (1) の解が Hölder 連続になることを示すとともに, 解 u の Hölder ノルムの陽的な表示を得た.

Theorem 1. *Let u be a bounded non-negative weak solution of* (1)*. Let us assume*

$$f(t,x,u) \in L^\infty(0,\infty\,;\,L^p(\mathbb{R}^n))$$

for some $p > n$ and let $\frac{1}{p_*} = \frac{1}{n} - \frac{1}{p}$. Then u is uniformly Hölder continuous and

$$|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \le C\|u^\alpha\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p_*}{n}\sigma}\|f\|_{L^\infty(0,\infty\,;\,L^p(\mathbb{R}^n))}^{\frac{p_*}{n}\sigma}(\|u\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma)$$

for $(t,x)\,,\,(s,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, where the constant $0<\sigma<1$ and $C>0$ are depending only on n,α and p.

定理の証明で最も困難な点は, 解 u の等高面 $u=0$ の近傍での振動の評価である. しかし, u が小さいと (1) の拡散係数 $\alpha u^{\alpha-1}$ も小さくなるため, 方程式が持つ平滑化効果も小さくなる. 従って, 方程式が持つ平滑化効果が解 u の値に応じて一様ではないため, 解の振動の評価も解 u の値に対して一様には得られない. そこで, (1) の左辺を不変にする, 時間方向と解の高さに関するスケール変換

$$\tilde{u}(s,x) = M^{-1}u(t,x) \quad t = M^{\alpha\beta}s\,,\, \beta = 1-\frac{1}{\alpha}$$

に注目して, 二つのパラメータに依存する放物型円筒

$$Q_{\rho,M} = Q_{\rho,M}(t_0,x_0) = (t_0,x_0) + \left(-\frac{\rho^2}{M^\beta}, 0\right)\times B_\rho, \quad \rho, M > 0$$

を導入する. パラメータ $M>0$ を解 u の高さに応じてコントロールすることによって, 方程式が持つ平滑化効果を一様とみなすことができ, 次の補題が得られる.

Lemma 2. *Let $\rho_0 > 0$ enough small depending only on $n,\alpha,p,\|u\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}$ and f. Then there exist $0<c<1$ and $0<\eta<1$ depending only on n,α,p such that*

$$\sup_{Q_{\rho_j,M_j}} u^\alpha \le M_j\,,\ \operatorname*{osc}_{Q_{\rho_j,M_j}} u^\alpha = \sup_{Q_{\rho_j,M_j}} u^\alpha - \inf_{Q_{\rho_j,M_j}} u^\alpha \le \eta^j\|u^\alpha\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \text{ and } \rho_j = c^j\rho_0$$

for all $j\in\mathbb{N}$, where $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ is some monotone decreasing sequence depending on n,α,p and u.

補題の証明は, De Giorgi の繰り返し法を, u の高さに依存する変数変換 M_j を用いて機能させることによる. また, ρ_0 は, $\|f\|_{L^\infty((0,\infty)\,;\,L^p(\mathbb{R}^n))}$ と $\|u\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}$ について陽的に取れる. このことから, $\sigma\log c = \log\eta$ ととることにより, 解の Hölder 連続性と Hölder ノルムに関する評価が得られる (cf. Ladyženskaja-Solonnikov-Ural'ceva [3, pp. 96, Lemma 5.8]).

REFERENCES

[1] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., Indiana Univ. Math. J., **29**(1980), 361–391.

[2] DiBenedetto, E. and Friedman, A., J. Reine Angew. Math., **357**(1985), 1–22.

[3] Ladyženskaja, O. A. and Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., *"Linear and quasilinear equations of parabolic type,"* American Mathematical Society, 1967.

[4] Porzio, M. M. and Vespri, V., J. Differential Equations, **103**(1993), 146–178.

単調型作用素に対する楕円型仮似変分不等式

村瀬 勇介 (むらせ ゆうすけ)

広島修道大学　経済科学部

E-mail: `ymurase@shudo-u.ac.jp`

1　研究の主題

本研究では、以下の仮似変分不等式型の方程式系に対する最適制御問題と最適制御生成アルゴリズムの開発を目的としている。

$$\text{Find}\ \ (\theta,u)\in H_0^1(\Omega)\times\left(H^1(\Omega)\right)^2\quad \text{s.t.}\quad \begin{cases} -\kappa\triangle\theta+h(\theta,u)=f & \text{in}\ \ \Omega\\ \theta=0 & \text{on}\ \ \partial\Omega\\ u\in K(\theta)\quad \text{a.e. in}\ \ \Omega & \\ \nu\displaystyle\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(u-z)dx+\int_\Omega (g(u)-\ell)\cdot(u-z)\le 0 & \\ \qquad \text{for}\ \ {}^\forall z\in(H^1(\Omega))^2,\ \ z\in K(\theta)\ \ \text{a.e. in}\ \ \Omega & \end{cases}$$

仮似変分不等式の解の存在性には、[3], [4] の抽象論を用いている。このとき [5] の場合と同様に解には一意性がないため、通常の議論で最適制御問題とアルゴリズムの構築を行うのは困難である。本公演では、この問題に対する現在までの取り組みについて報告する。

2　仮似変分不等式一般論と解の存在

X は回帰的実 Banach 空間, X^* は X の共役空間とし, X, X^* は共に狭義凸であるとする。
A は X から X^* への (一般的には多価の) 作用素である。また, $|\cdot|_X$ でノルムを, $<\cdot,\cdot>$ で X^* と X の duality pairing を表すとする。

定義 2.1.　$\widetilde{A}:X\times X\to X^*$ は次の *(SM1)* 及び *(SM2)* を満たすとする。

$$\begin{array}{ll} \textit{(SM1)} & \widetilde{A}(v,\cdot)\ \textit{;maximal monotone}\ ,\ D(\widetilde{A}(v,\cdot))=X\quad \textit{for}\ \ {}^\forall v\in X\\ \textit{(SM2)} & \{v_n\}\subset X,\ \ v_n\to v\ \ \textit{weakly in}\ X\\ & \qquad\Longrightarrow\ \ {}^\forall u^*\in\widetilde{A}(v,u)\ ,\ {}^\exists u_n^*\in\widetilde{A}(v_n,u)\ \ \textit{s.t.}\quad u_n^*\to u^*\ \ \textit{in}\ \ X^* \end{array}$$

このとき, $\widetilde{A}$ は ***semi-monotone*** であるという。

　この semi-monotone 作用素によって特徴付けられる楕円型抽象仮似変分不等式の解の存在が以下通り知られている。

定理 2.2.　*(Y. M.　[4])*
$\widetilde{A}:D(\widetilde{A})=X\times X\to X^*$*;* 有界,*semi-monotone,*
$Au:=\widetilde{A}(u,u)$ *for* ${}^\forall u\in X$, $g^*\in X^*$,
$K_0\subset X$*;* 有界閉凸集合,
φ:$X\times X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\varphi(v,\cdot)$*;* 適正下半連続凸関数 *for* ${}^\forall v\in X$
$D(\varphi(v,\cdot))\subset K_0$ *for* ${}^\forall v\in K_0$,
さらに, 次の条件 *(K)* を満たすとする。

$$\begin{array}{ll} \textit{(K)} & \{v_n\}\subset K_0,\ \ v_n\to v\ \textit{weakly in}\ X\\ & \Longrightarrow\ \ \varphi(v_n,\cdot)\to\varphi(v,\cdot)\ \ \textit{on}\ X\ \textit{in the sense of Mosco.} \end{array}$$

このとき, 次の仮似変分不等式は少なくとも一つ解 u を持つ。

$$\begin{cases} \varphi(u,u)<\infty,\quad u^*\in Au;\\ <u^*-g^*,u-v>+\varphi(u,u)\leqq\varphi(u,v)\quad \textit{for}\ \ {}^\forall v\in X \end{cases}$$

3　主題へのアプローチ

この問題に対する近似問題として次の問題を取り扱う。

$$\text{Find}\quad (\theta,u)\in H_0^1(\Omega)\times\left(H^1(\Omega)\right)^2\qquad \text{s.t.}\qquad \begin{cases} -\kappa\triangle\theta+h(\theta,u)=f & \text{in}\ \ \Omega\\ \theta=0 & \text{on}\ \ \partial\Omega\\ -\triangle u+g(u)+\partial I_{K(\theta)_\lambda}(u)=\ell & \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\ell\quad \text{on}\ \ \partial\Omega & \end{cases}$$

但し、$\partial I_{K(\theta)_\lambda}(\cdot)$ は $\partial I_{K(\theta)}(\cdot)$ の吉田近似である。元の問題はこの極限問題として取り扱われる。

この問題を考える上では、、仮似変分不等式に現れる semi-monotone 作用素 $A(\cdot,\cdot):X\times X\to X^*:=H^{-1}(\Omega)\times(H^1(\Omega)^*)^2$ を次で定義して考える。

$$[A((\zeta,v),(\theta,u)),(\xi,z)]:=\kappa\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\xi+\int_\Omega h(\theta,v)\xi+\nu\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla z+\int_\Omega g(v)\cdot z$$

ここで、$[\cdot,\cdot]$ は X^* と X の間の duality pairing である。

この問題は上記の作用素といくつかの仮定の下で解が存在することが示される。解の存在に対する証明は [5] と同様の方法によって示される。

最適制御に関して問題になる点として以下が挙げられる。

(1) $f_n\to f$ が何らかの位相で与えられているとき、近似問題の解は下の問題の解に収束するか?

(2) 近似問題の最適制御は存在するか？

(3) 近似問題の最適制御を生成するアルゴリズムを構成できるか？

参考文献

[1] K. H. Hoffmann, M. Kubo, N. Yamazaki, Optimal control problems for elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints; Numer. Funct. Anal. Optim. 27 (2006), no. 3-4, 329–356

[2] N. Kenmochi, Monotoniocity and Compactness methods for Nonlinear Variational Inequalities: *HANDBOOK OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, Stationary Partial Differential Equations*; , **volume 4**, Elsevier B.V., (2008), pp. 203–298.

[3] R. Kano, N. Kenmochi, Y. Murase, Existence theorems for elliptic quasi-variational inequalities in Banach spaces; Recent Advance in Nonlinear Analysis: Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis, (2008), pp. 149-170

[4] Y. Murase, Abstract Quasi-Variational Inequality of Elliptic type and Applications; Banach Center Publications Vol.86 "Nonlocal and abstract parabolic equations and their applications" (2009) pp. 235-246

[5] R. Kano, N. Kenmochi, Y. Murase, Elliptic quasi-variational inequalities and applications; Proceedings of the 7th AIMS conference (to be published)

Convergence rate to the nonlinear waves for viscous conservation laws on the half space

Yoshihiro Ueda

In this talk, we study the convergence rate of solutions to the initial-boundary value problem for scalar viscous conservation laws on the half line:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_-, \quad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = u_+, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Here the flux $f = f(u)$ is a given smooth function of u satisfying $f(0) = f'(0) = 0$ and $u_\pm$ are given constants. In this problem, we assume that the initial function $u_0(x)$ satisfies $u_0(0) = u_-$ and $\lim_{x\to\infty} u_0(x) = u_+$ as the compatibility conditions. Throughout this talk, we impose the following condition on the flux $f(u)$: Either

$$f''(u) > 0 \quad \text{for} \quad u \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

or

$$f''(0) > 0, \qquad f(u) > 0 \quad \text{for} \quad u \in [u_-, 0). \tag{3}$$

It is known that the asymptotic behavior of solutions to (1) is closely related to the solution of the Riemann problem for the corresponding hyperbolic equation:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > -1, \\ u(x,-1) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

In the case where the flux $f(u)$ in (1) satisfies the convexity condition (2) and the Riemann problem (4) has the rarefaction wave solution, Liu-Matsumura-Nishihara [2] showed that the large-time behavior of the solutions depends on the signs of the characteristic speeds $f'(u_\pm)$. More precisely, it is shown that the asymptotic behavior of the solutions in this case is classified into the following three cases: (a) $f'(u_-) < f'(u_+) \le 0$, (b) $0 \le f'(u_-) < f'(u_+)$ and (c) $f'(u_-) < 0 < f'(u_+)$.

In the case (a) where $u_- < u_+ \le 0$, the solutions of (1) converge to the stationary solution. Here the stationary solution $\phi(x)$ is defined by the solution of the stationary problem corresponding to (1):

$$f(\phi) = \phi_x, \qquad \phi(0) = u_-, \qquad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = u_+. \tag{5}$$

In the case (b) where $0 \leq u_- < u_+$, the asymptotic state of the solutions is described by the rarefaction wave. Here the rarefaction wave $\psi^R(x,t)$ is given as the solution of the Riemann problem (4) and is given explicitly for $t > -1$ by

$$\psi^R(x,t) = \begin{cases} u_-, & x \leq f'(u_-)(t+1), \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t+1}\right), & f'(u_-)(t+1) \leq x \leq f'(u_+)(t+1), \\ u_+, & f'(u_+)(t+1) \leq x. \end{cases} \tag{6}$$

In the final case (c) where $u_- < 0 < u_+$, the asymptotic state of the solutions is given by the superposition of the stationary solution $\phi(x)$ satisfying (5) with $u_+ = 0$ and the rarefation wave $\psi^R(x,t)$ given by (6) with $u_- = 0$.

Our first theorem gives the convergence rate in this last case (c) under the convexity assumption (2), and is stated as follows.

Theorem 1. *Suppose that* (2) *and* $u_- < 0 < u_+$ *hold. Assume that* $u_0 - u_+ \in H^1 \cap L^1$. *Then the initial-boundary value problem* (1) *has a unique global solution* $u(x,t)$ *with* $u - u_+ \in C([0,\infty); H^1)$. *Moreover, the solution satisfies*

$$\begin{aligned} &\|(u - \phi - \psi^R)(t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\gamma} \log^2(2+t), \\ &\|(u - \phi - \psi^R)(t)\|_{L^\infty} \leq C_\epsilon (1+t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \end{aligned} \tag{7}$$

for each p *with* $1 \leq p < \infty$ *and any* $\epsilon > 0$, *where* $\gamma = (1/2)(1 - 1/p)$, *and* C *and* C_ϵ *are positive constants;* C_ϵ *is depending on* ϵ. *Here* $\phi(x)$ *is the stationary solution satisfying* (5) *with* $u_+ = 0$ *and* $\psi^R(x,t)$ *is the rarefaction wave given by* (6) *with* $u_- = 0$.

On the other hand, the case (c) has also been studied very recently by Hashimoto-Matsumura [1] when the flux $f(u)$ satisfies the weaker convexity condition (3). They proved the asymptotic stability of the superposition of the stationary solution and the rarefaction wave under the smallness condition both on u_+ and the initial perturbation.

The second purpose of this talk is to get the convergence rate under the weaker convexity condition (3). Namely, we show the following theorem.

Theorem 2. *Assume* (3), $u_- < 0 < u_+$ *and* $u_0 - u_+ \in H^1 \cap L^1$. *Then there is a positive constant* ε_0 *such that, if* $u_+ \leq \varepsilon_0$ *and* $\| u_0 - \phi - \psi^R(\cdot, 0)\|_{H^1} \leq \varepsilon_0$, *then the initial-boundary value problem* (1) *has a unique global solution* $u(x,t)$ *with* $u - u_+ \in C([0,\infty); H^1)$. *Moreover, the solution satisfies the quantitative estimates in* (7).

References

[1] I. Hashimoto and A. Matsumura, *Large time behavior of solutions to an initial boundary value problem on the half line for scalar viscous conservation law*, Methods Appl. Anal., **14** (2007), 45-60.

[2] T.-P. Liu, A. Matsumura and K. Nishihara, *Behaviors of solutions for the Burgers equation with boundary corresponding to rarefaction waves*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 293-308.

非線型 Schrödinger 方程式系の正値解の一意性について

生駒 典久 (いこま のりひさ)

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

E-mail: n.ikoma@suou.waseda.jp

1 導入

次の非線型 Schrödinger 方程式系に対する正値解を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta u_1^2 u_2 + \mu_2 u_2^3 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \quad u_1(x), u_2(x) \to 0 \text{ as } |x| \to \infty. \end{cases} \tag{E}$$

ここで, μ_1, μ_2, β は正定数とし, $N = 1, 2, 3$ とする. また, $u = (u_1, u_2)$ が (E) の正値解であるとは, u が (E) を満たし $u_1(x), u_2(x) > 0$ を満たすものとする.

方程式系 (E) に対する正値解の存在は近年活発に研究されている [1, 4, 6, 7]. 特に, $V_1(x), V_2(x)$ が正定数のときはよく研究されており, 次が成り立つ: 正定数 $0 < \beta_1 < \beta_2$ が存在し, $\beta \in [0, \beta_1) \cup (\beta_2, \infty)$ ならば (E) は正値解を持つ. また, $V_j(x)$ が x に依存するときも, $V_j(x)$ に対するさまざまな条件の下で (E) の正値解が得られている. 一方, (E) の正値解に対する研究はほとんどなく, ここでは $\beta > 0$ をパラメータとしたとき, (E) の正値解の一意性について考える.

以下, $V_j(x)$ は次の条件を満たすとする.

(V1) $V_j(x) = V_j(|x|) = V_j(r), V_j \in C^2([0, \infty))$.

(V2) $0 < \inf V_j(r) \le \sup V_j(r) < \infty$.

(V3) $V_j'(r) \ge 0$ for all $r \ge 0$.

(V4) $N = 3$ のときは次を仮定する:

$$\inf_{r>0} \left\{ V''(r)r^2 + \frac{13}{3}V'(r)r + \frac{8}{3}V(r) \right\} > 0.$$

注意 1.1. (i) $V_j(x) \equiv \text{const.} > 0$ の場合, 上の条件 (V1)–(V4) は満たされる.
(ii) Busca–Sirakov[2] により, 条件 (V1)–(V3) と $\beta > 0$ の下, (E) の正値解は球対称関数になることが知られている: $u(x) = u(|x|) = (u_1(|x|), u_2(|x|))$.

2 主結果

上の条件 (V1)–(V4) の下, 次の定理が成り立つ:

定理 2.1. *$V_j(x)$ が (V1)–(V4) を満たすとする. このとき, ある $\beta_0 > 0$ が存在して, $\beta \in [0, \beta_0)$ であれば (E) の正値球対称解は一意的である.*

注意 1.1 により, 次の系が成り立つ.

系 2.2. *$V_1(x), V_2(x)$ を正定数とする. このとき, $\beta \in [0, \beta_0)$ であれば (E) の正値解は平行移動を除いて一意的である.*

注意 2.3. (i) Wei–Yao[8] により系 2.2 と同様の結果が得られている．
(ii) (E) の一意性は任意の $\beta > 0$ については成り立たない．次の例は [6] による．$V_1(x) = V_2(x) = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \beta = 1$ とし, ω を

$$-\Delta\omega + \omega = \omega^3 \quad \text{in } \mathbf{R}^N$$

の一意正値球対称解とする．このとき, 任意の $\theta \in (0, \pi/2)$ に対して $u = (\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)$ は (E) の正値球対称解.

3 証明の概略

定理 2.1 の証明を次の 4 つの段階に分ける:
Step 1 (E) の正値解のアプリオリ評価
Step 2 $|x| \to \infty$ としたときの正値解の一様減衰評価
Step 3 $\beta = 0$ としたときの (E) の球対称正値解の一意性と非退化性
Step 4 陰関数定理の適用

Step 1 では, パラメータ β が区間 $[0, \beta_0]$ を動くとき, (E) の正値解の一様 L^∞ 評価を導く．証明方法は Brow-up argument と Gidas[3] による結果を使う．Step 2 では，Step 1 と同じくパラメータ β が区間 $[0, \beta_0]$ を動くとき, 正値解の一様指数減衰評価を導く．このとき, Step 1 と比較原理を用いる．Step 3 では, $\beta = 0$ としたときの方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_j + V_j(x)u_j = \mu_j u_j^3 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u_j > 0, \ u_j \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases}$$

の解の一意性と非退化性であることを示す．これは Kabeya–Tanaka[5] で得られている．Step 4 で写像

$$\Phi(\beta, u) = I'_\beta(u),$$
$$I_\beta(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + V_1(x)u_1^2 + V_2(x)u_2^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^N} \mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4 dx$$

に陰関数定理を適用して定理 2.1 を得る.

参考文献

[1] A. Ambrosetti and E. Colorado, Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **75** (2007), 67–82.

[2] J. Busca and B. Sirakov, Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space. *J. Differential Equations*, **163** (2000), 41–56.

[3] B. Gidas, Symmetry and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science (Proc. Conf., Univ. Rhode Island, Kingston, R.I., 1979), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **54** (1980), Dekker, New York, 255–273.

[4] N. Ikoma, Existence of standing waves for coupled nonlinear Schrödinger equations. to appear in *Tokyo J. Math.*.

[5] Y. Kabeya and K. Tanaka, Uniqueness of positive radial solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$ and Séré's non-degeneracy condition. *Comm. Partial Differential Equations*, **24** (1999), 563–598.

[6] B. Sirakov, Least energy solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbf{R}^n$. *Comm. Math. Phys.*, **271** (2007), 199–221.

[7] G.-M. Wei, Existence and concentration of ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **332** (2007), 846–862.

[8] J. Wei and Yao, Note on uniqueness of positive solutions for some coupled nonlinear Schrödinger equations. to appear in *Methods Anal. Appl.*.

Penrose-Fife 型の相転移モデルに対する可解性について

熊崎 耕太

名古屋工業大学大学院 工学研究科 情報工学専攻

E-mail: k.kumazaki@gmail.com

1　導入

以下の問題 (P) について考える。

$$e_t - \Delta\tilde{\alpha} = f,\ e = u + \lambda(w),\ \tilde{\alpha} \in \alpha(u) \qquad \text{in } (0,T)\times\Omega, \tag{1.1}$$

$$w_t + \partial\psi^t(w) + g(w) - \tilde{\alpha}\lambda'(w) \ni 0 \qquad \text{in } (0,T)\times\Omega, \tag{1.2}$$

$$\tilde{\alpha} = h \qquad \text{on } (0,T)\times\Gamma, \tag{1.3}$$

$$e(0) = e_0, \quad w(0) = w_0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.4}$$

ここで、Ω は $\mathbb{R}^N$ $(1 \le N \le 3)$ の有界領域で滑らかな境界 $\Gamma = \partial\Omega$ を持つものとする。f, h は Ω 上与えられた関数であり、$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は極大単調である。また ψ^t は $L^2(\Omega)$ 上の関数で、$\partial\psi^t$ は ψ^t の劣微分を表す。また $g \in C^1(\mathbb{R})$、$\lambda \in C^2(\mathbb{R})$ である。一般に Hilbert 空間 H において $A : H \to H$ が極大単調であるとは

$$A : \text{単調 かつ } R(I + A) = H \quad (I : H \to H \text{ 恒等作用素})$$

を満たすことであり、また適正下半連続凸関数 $\phi : H \to [-\infty, \infty]$ に対して $\partial\phi : H \to H$ を

$$\partial\phi(z) := \{z^* \in H : (z^*, v - z)_H \le \phi(v) - \phi(z), \quad \forall v \in H\}$$

と定義し、$\partial\phi$ を ϕ の劣微分と呼ぶ。

この問題は、熱の作用を考慮した相転移モデル (具体的には水から氷への変化、またはその逆の変化) の数学的な一般化であり、元々のモデルは 1990 年に O.Penrose と P.C.Fife によって提案された。物理的に e, w, u はそれぞれ内部エネルギー、オーダーパラメータ、絶対温度である。オーダーパラメータは系内の秩序状態を表す変数であり、具体的には $w = 0$ で固体、$w = 1$ で液体とし、

$$0 \le w \le 1$$

の範囲で表す。この問題は秩序非保存系に属し、相転移の一つである相分離現象は秩序保存系に属する。元々の問題では

$$\alpha(u) = -\frac{1}{u}(u > 0), \quad \partial\psi^t(w) = -\kappa\Delta w$$

である。ここで $\kappa > 0$ である。

まず (1.1) 式はエネルギー保存則から導き出される方程式であり、特に $\nabla(\frac{1}{u})$ は熱流を表し、内部エネルギーの空間的移動を起こすものである。(1.2) 式はギンツブルグ-ランダウ型の自由エネルギーを元にして、非平衡系の緩和の考え方に沿って導出される方程式である。g は二重井戸型のポテンシャルを表し、特に $g(w) - (\frac{1}{u})\lambda'(w)$ は熱の作用が相の生成や平衡状態に影響することを表している。また κ は二つの相が変化する境界の厚さを表す。固体固体間の相転移では、質量保存則によって (1.2) 式は 4 階の方程式になることが知られている。(1.2) 式は温度一定の下で、二つの臨界温度があり、したがって三つの定常状態の存在知られているが、温度一定ではない場合のダイナミクスを解析するため多くの数学者がこの問題の数学的考察を行っている。先行研究では、

$$\partial\psi^t(w) = -\kappa\Delta w + \partial I_{[0,1]}w$$

などが扱われている。ここで

$$I_{[0,1]}(z) = \begin{cases} 0 & z \in [0,1] \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。元々のモデルでは $w < 0, w > 1$ の状態を考えられるため、w の値を $[0,1]$ に制限するために自由エネルギーとして $I_{[0,1]}$ を導入した特別なものを用いて考えられた。今回はその数学的な一般化として

$$\partial\psi^t(w) = -\kappa\Delta w + \partial I_{[\sigma_*(t),\ \sigma^*(t)]}w$$

のような時間に依存した区間 (または集合) を考え、(1.4) と (1.5) の条件下での問題 (P) の解の存在と一意性に対する結果を報告する。以下に主結果を述べる。

2 主結果

以下の定理が成立する.

定理 2.1. There exists a unique solution of (P) $(e, w) : [0, T] \to H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ such that the following items are satisfied :

(a) $e \in W^{1,2}(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\sup_{0 \le t \le T} \int_\Omega \hat{\alpha}(u(t))dx < +\infty$ and $w \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

(b) There exists $\tilde{\alpha} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ such that $\tilde{\alpha} \in \alpha(u)$ a.e. in $(0, T) \times \Omega$ and the following evolution equation holds:

$$e'(t) + F(\tilde{\alpha}(t) - h(t)) = f(t) + \Delta h(t) \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

(c) The following evolution equation holds:

$$w'(t) + \partial\psi^t(w(t)) + g(w(t)) - \tilde{\alpha}(t)\lambda'(w(t)) \ni 0 \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

(d) $e(0) = e_0$ and $w(0) = w_0$.

ここで F は $H_0^1(\Omega)$ から $H^{-1}(\Omega)(= \{H_0^1(\Omega)\}^*)$ への共役写像である。またこの問題に対する抽象的な発展方程式とその結果についても紹介したいと考えている。

参考文献

[1] A. Ito and M. Kubo, Well-posedness for an extended Penrose-Fife phase field model with energy balance supplied by Dirichlet boundary conditions, Nonlinear Anal. **9** (2008), 370–383.

[2] N. Kenmochi and M. Niezgódka, Evolution systems of nonlinear variational inequalities arising from phase change problems, Nonlinear Anal. **22** (1994), 1163–1180.

[3] O. Penrose and P.C. Fife, Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions, Phys. D **43** (1990), 44–62.

半空間における非線形境界条件付き熱方程式の大域解の分類

川上 竜樹 (かわかみ たつき)

東北大学大学院理学研究科 研究支援者

E-mail: `sa4m10@math.tohoku.ac.jp`

次の非線形境界条件付き熱方程式の初期境界値問題を考える;

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & x \in \Omega,\ \ t > 0, \\ \partial_\nu u = u^p, & x \in \partial\Omega,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\Omega = \{x = (x', x_N) \in \mathbf{R}^N : x_N > 0\}$, $N \geq 2$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_\nu = -\partial/\partial x_N$ とし,

$$\phi \in X \equiv \left\{ f \in L^\infty(\Omega) \cap L^2\left(\Omega, e^{|x|^2/4}dx\right) \,:\, f \geq 0 \text{ in } \Omega \right\}, \tag{2}$$

$$1 + 1/N < p, \quad (N-2)p < N \tag{3}$$

を仮定する.

非線形放物型問題の正値解の大域挙動についてはこれまでも様々な手法により多くの研究が行われてきた. その中でも全空間の半線形熱方程式

$$\partial_t u = \Delta u + u^p \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times (0,\infty), \quad u(x,0) = \lambda\phi \geq 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N \tag{4}$$

の正値解に対して Kawanago [3] (c.f. Kavian [1]) は次の結果を得ている.

命題 1. *$\lambda > 0$, $\phi \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \cap L^2(\mathbf{R}^N, e^{|x|^2/4}dx)$, $p > 1 + 2/N$, $(N-2)p < N+2$ とする. このとき次を満たす $\lambda_* > 0$ が存在する:*
(i) $\lambda > \lambda_*$ ならば, (4) の解 u は有限時間で爆発する;
(ii) $\lambda = \lambda_*$ ならば, (4) の解 u は時間大域解で, $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \asymp t^{-\frac{1}{p-1}}$ as $t \to \infty$;
(iii) $0 < \lambda < \lambda_*$ ならば, (4) の解 u は時間大域解で, $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \asymp t^{-\frac{N}{2}}$ as $t \to \infty$.

本講演では非線形境界値問題 (1) の正値解に対して命題 1 と同様の結果を得ることを目標とする. 得られた結果を紹介する前に解の定義を以下で与える.

定義 1. 任意の $\tau > 0$ に対して, $\overline{\Omega} \times [0,\tau)$ 上で定義された関数 u が (1) の解であるとは,

$$u \in C(\overline{\Omega} \times (0,\tau)) \cap L^\infty(0,\sigma : L^\infty(\Omega)), \qquad 0 < \sigma < \tau$$

であり, 任意の $(x,t) \in \Omega \times (0,\tau)$ で

$$u(x,t) = \int_\Omega G(x,t,y)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x,y,t-s)u^p(y,s)d\sigma_y ds$$

を満たすことである. ここで

$$G(x,y,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \left[\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{|x-y_*|^2}{4t}\right) \right], \quad x, y \in \Omega,\ t > 0$$

である. また $y = (y', y_N) \in \Omega$ に対して $y_* = (y', -y_N)$ である.

問題 (1) に対して初期値が $\phi \in L^\infty(\Omega)$ ならば, 問題 (1) は古典的な一意解を持つことがわかる. さらに (1) の解 u の最大存在時刻 $T_M(\phi)$ が有限であるとき, $\limsup_{t\to T_M(\phi)-0} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$ が成立し, この $T_M(\phi)$ を blow-up time と呼ぶ. 以後, 簡単のため $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ とする. X のノルムを $\|\cdot\|_X \equiv \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{L^2(\Omega, e^{|x|^2/4}dx)}$ とし,

$$K = \{\phi \in X\,;\, T_M(\phi) = \infty\}, \quad B = X \setminus K = \{\phi \in X\,;\, T_M(\phi) < \infty\},$$

Int (K) を X 上の K の内部, ∂K を X 上の K の境界とする. また解 u のエネルギー汎関数 $F[u](t)$ を

$$F[u](t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\partial\Omega} u^{p+1} d\sigma$$

と定める.

このとき次の結果が得られる.

定理 1. (2) と (3) の仮定の下で問題 (1) を考える. このとき集合 K は $0 \in \mathrm{Int}\,(K)$ となる X 上の非有界な閉凸集合である. さらに初期値を $\phi = \lambda\varphi$ とおくと, 任意の $\varphi \in X \setminus \{0\}$ に対して, ある定数 λ_φ が存在して,

$$\lambda\varphi \in \begin{cases} \mathrm{Int}\,(K) & \textit{if} \quad \lambda \in (0, \lambda_\varphi), \\ \partial K & \textit{if} \quad \lambda = \lambda_\varphi, \\ B & \textit{if} \quad \lambda > \lambda_\varphi \end{cases}$$

を満たす. さらに次が成立する:
(i) $\phi \in \mathrm{Int}(K) \setminus \{0\}$ ならば, 任意の $q \in [1, \infty]$ に対して,

$$\|u(t)\|_q \asymp t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{q})} \quad as \quad t \to \infty$$

が成立する. さらに極限

$$c_* = 2\lim_{t\to\infty}\int_\Omega u(x,t)dx = 2\left(\int_\Omega \phi(x)dx + \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} u^p(x,t)d\sigma dt\right)$$

が存在して,

$$t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{q})}\|u(t) - c_* g(t)\|_q \le Ct^{-\frac{1}{2}} + Ct^{-\frac{N}{2}(p-1-\frac{1}{N})}, \qquad t \ge 1.$$

ここで C は正定数, $g(x,t) = (4\pi t)^{-N/2}\exp(-|x|^2/4t)$;
(ii) $\phi \in \partial K$ ならば, $\|u(t)\|_\infty \asymp t^{-1/2(p-1)} \quad as \quad t \to \infty$;
(iii) $\phi \in B$ ならば, $\lim_{t\to T_M(\phi)-0} F[u](t) = -\infty$ が成立する.

References

[1] O. Kavian, Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4** (1987), 423–452.

[2] T. Kawakami, Global existence of solutions for the heat equation with a nonlinear boundary condition, preprint.

[3] T. Kawanago, Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), 1–15.

Asymptotic behavior of solutions for the shadow reaction-diffusion system with the nonlinearity of the FitzHugh-Nagumo type

Yasuhito Miyamoto *

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, Japan

September 1, 2009

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \{1,2,3\}$) be a bounded domain with smooth boundary, and let $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R};\ t > 0\}$ and $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$. In this article we study the asymptotic behavior of solutions to the shadow reaction-diffusion system

$$u_t = \Delta u + f(u) - \alpha\xi \ \text{ in } \ \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \tau\xi_t = \gamma(u) - \beta\xi \ \text{ in } \ \mathbb{R}_+, \tag{SS}$$

$$\partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad \text{and} \quad (u(x,0), \xi(0)) = (u_0(x), \xi_0)$$

and its reduced system obtained by letting $\tau = 0$ in (SS)

$$u_t = \Delta u + f(u) - \alpha\xi \ \text{ in } \ \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad 0 = \gamma(u) - \beta\xi \ \text{ in } \ \mathbb{R}_+, \tag{RE}$$

$$\partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \quad \text{and} \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Here α, β, τ are positive constants, $\gamma(u) := \int_\Omega u(x,t)dx$, and ∂_ν denotes the outer normal derivative on $\partial\Omega$.

We assume that f satisfies the following (A1) or (A2):

$$\left.\begin{array}{c} f(u) := a_0 u(u - a_1)(a_2 - u), \text{ where } a_0 > 0 \text{ and } a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}, \text{ and} \\ \dfrac{|\Omega|}{\pi}\sqrt{\dfrac{\alpha|\Omega|}{\beta}} \notin \mathbb{N}, \end{array}\right\} \tag{A1}$$

$$\left.\begin{array}{c} f \in C^5, \text{ and there are } p > 1,\ C_0 > 0, \text{ and } C_1 > 0 \text{ such that} \\ f(u) \begin{cases} \le C_0 - C_1 u^p & \text{if } u \ge 0; \\ \ge -C_0 + C_1 |u|^p & \text{if } u \le 0. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{A2}$$

Note that if (A1) holds, then (A2) holds.

*Email: miyamoto@math.titech.ac.jp

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denote the L^2-inner product, and let $\mathbb{X} := H^2_N \times \mathbb{R}$. We see that (SS) (resp. (RE)) has a unique solution in $C^0([0, +\infty), \mathbb{X})$ (resp. $C^0([0, +\infty), H^2_N)$). Therefore, (SS) (resp. (RE)) generates a global semiflow in $\mathbb{X}$ (resp. H^2_N). By $\Phi^\tau(t)(u_0, \xi_0)$ (resp. $\Psi(t)u_0$) we denote the semiflow generated by (SS) (resp. (RE)). We denote the set consisting of all the equilibrium points of $\Phi^\tau(t)$ (resp. $\Psi(t)$) by $E_{(\mathrm{SS})}$ (resp. $E_{(\mathrm{RE})}$).

We say that $\bar{u}(\in H^2_N)$ is *an exponentially asymptotically stable steady state* of $\Psi(t)$ if $\bar{u} \in E_{(\mathrm{RE})}$ and if $\sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}^0_{\bar{u}})} \mathrm{Re}(\lambda) < 0$, where $\mathcal{L}^0_{\bar{u}}$ denotes the linearized operator of (RE) at $\bar{u}$ and $\sigma(\mathcal{L}^0_{\bar{u}})$ denotes the spectral set.

Theorem A. *Suppose that* $N = 1$ *and that* (A1) *holds.*
(i) *Let* $\tau_* := \beta^2/(\alpha|\Omega|)$. *If* $\tau \in (0, \tau_*)$, *then the* ω*-limit set of* $(u_0, \xi_0) \in H^2_N \times \mathbb{R}$ *for* $\Phi^\tau(t)$, $\omega_{\Phi^\tau}((u_0, \xi_0))$, *is a singleton.*
(ii) *The* ω*-limit set of* $u_0 \in H^2_N$ *for* $\Psi(t)$, $\omega_\Psi(u_0)$, *is a singleton.*

The assumptions of $N = 1$ and (A1) come from the difficulty in proving the non-degeneracy of the solutions to a scalar elliptic equation.

We see that (SS) (resp. (RE)) is a gradient-like system, namely, the ω-limit set of any precompact orbit belongs to $E_{(\mathrm{SS})}$ (resp. $E_{(\mathrm{RE})}$). Therefore, this theorem means that every orbit $\Phi^\tau(t)(u_0, \xi_0)$ (resp. $\Psi(t)u_0$) converges to one of the equilibrium points of (SS) (resp. (RE)) provided that all the assumptions in Theorem A are satisfied.

We define an injective mapping Γ from H^2_N to $\mathbb{X}$ by

$$\Gamma u := \left(u, \frac{1}{\beta}\gamma(u) \right).$$

The functional space to which $\Phi^\tau(t)(u_0, \xi_0)$ belongs is different from one to which $\Psi(t)u_0$ belongs. However, using the mapping Γ, we can measure the distance in $\mathbb{X}$ between $\Phi^\tau(t)(u_0, \xi_0)$ and $\Gamma\Psi(t)u_0$ and show the closeness of the two orbits.

The second result is

Theorem B. *Suppose that* $N \in \{1, 2, 3\}$ *and that* (A2) *holds. Let* $u_0 \in H^2_N$. *Suppose that* $\omega_\Psi(u_0)$ *is an exponentially asymptotically stable steady state. For any* $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, *and* $t_0 > 0$, *there is* $\tau_0 > 0$ *such that if* $\tau \in (0, \tau_0)$, *then*

$$\omega_{\Phi^\tau}((u_0, \xi_0)) = \Gamma\omega_\Psi(u_0),$$

$$\sup_{t > t_0} \|\Phi^\tau(t)(u_0, \xi_0) - \Gamma\Psi(t)u_0\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon,$$

and $\omega_{\Phi^\tau}((u_0, \xi_0))$ *is an exponentially asymptotically stable steady state.*

In particular, for $u_0 \in H^2_N$, *there is* $\tau_1 > 0$ *such that if* $\tau \in (0, \tau_1)$, *then*

$$\omega_{\Phi^\tau}(\Gamma u_0) = \Gamma\omega_\Psi(u_0).$$

Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions for Quasi-linear Dissipative Plate Equation

Y. Liu (劉 永琴), S. Kawashima (川島 秀一)

Faculty of Mathematics, Kyushu University

In this paper we consider the initial value problem of the following quasi-linear dissipative plate equation in multi-dimensional space $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 2$:

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(\partial_x^2 u)_{x_i x_j} + u_t = 0. \tag{1}$$

The initial data are given as

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{2}$$

Here $u = u(x,t)$ is the unknown function of $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ and $t > 0$, and represents the transversal displacement of the plate at the point x and the time t. Also, $b^{ij} = b^{ij}(V)$ are smooth functions of $V = (V_{ij}) \in \mathcal{S}^n$ satisfying the following structural conditions, where $\mathcal{S}^n$ denotes the totality of $n \times n$ real symmetric matrices:

[A1] There exists $\phi = \phi(V)$ such that $b^{ij}(V) = (\partial\phi/\partial V_{ij})(V)$.

[A2] $\sum_{ij}\sum_{\alpha\beta} b^{ij}_{\alpha\beta}(O)\omega_i\omega_j\omega_\alpha\omega_\beta > 0$ for $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in S^{n-1}$.

Here we put

$$b^{ij}_{\alpha\beta}(V) = \frac{\partial b^{ij}}{\partial V_{\alpha\beta}}(V) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial V_{ij}\partial V_{\alpha\beta}}(V), \quad i,j,\alpha,\beta = 1, \cdots, n.$$

For simplicity we consider the case where the functions $b^{ij}_{\alpha\beta}(V)$ verify $b^{ij}_{\alpha\beta}(O) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$.

The equation (1) has the decay property of regularity-loss type, which is indicated by the exponent $\sigma(k,n) = \max\{\sigma_0(k), \sigma_1(k,n)\}$, where

$$\sigma_0(k) = k + [\tfrac{k+1}{2}], \qquad \sigma_1(k,n) = k + [\tfrac{n+2k-1}{4}].$$

For $n \geq 2$, we define $s(n)$ by

$$s(n) = \begin{cases} 8, & n = 2, \\ 6, & n = 3, \\ 3[\frac{n}{4}] + 5, & n \geq 4, \end{cases}$$

which indicates the regularity of the initial data.

Theorem 1. *Suppose that the conditions* [A1] *and* $b^{ij}_{\alpha\beta}(O) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ *are satisfied; the latter implies* [A2]*. Let* $n \geq 2$ *and* $s \geq s(n)$*. Assume that* $u_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *and* $u_1 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$*, and put*

$$E_1 := \|u_0\|_{H^{s+1}} + \|u_1\|_{H^s} + \|(u_0, u_1)\|_{L^1}.$$

Then if E_1 *is suitably small, then the problem* (1), (2) *has a unique global solution* $u(x,t)$ *satisfying the following optimal decay estimates:*

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{H^{s-1-\sigma(k,n)}} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}$$

for k *with* $\sigma(k,n) \leq s-1$*, and*

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-4-\sigma(k,n)}} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-1}$$

for k *with* $\sigma(k,n) \leq s-4$*.*

Theorem 2. *Suppose that* [A1] *and* $b^{ij}_{\alpha\beta}(O) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ *are satisfied. Let* $n \geq 2$ *and* $s \geq s(n)$*. Assume that* $u_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \cap L^1_1(\mathbb{R}^n)$ *and* $u_1 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1_1(\mathbb{R}^n)$*, and put*

$$E_2 := \|u_0\|_{H^{s+1}} + \|u_1\|_{H^s} + \|(u_0, u_1)\|_{L^1_1}.$$

Let $u(x,t)$ *be the global solution to the problem* (1), (2) *which is constructed in Theorem 1. Then we have the following asymptotic relations:*

$$\|\partial_x^k\{u(t) - MG_0(t+1)\}\|_{H^{s-2-\sigma(k,n)}} \leq CE_2(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+1}{4}}$$

for k *with* $\sigma(k,n) \leq s-2$*, and*

$$\|\partial_x^k\partial_t\{u(t) - MG_0(t+1)\}\|_{H^{s-6-\sigma(k,n)}} \leq CE_2(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+5}{4}}$$

for k *with* $\sigma(k,n) \leq s-6$*. Here* M *is a constant given by* $M = \int_{\mathbb{R}^n}(u_0 + u_1)(x)dx$*, and* $G_0(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^4 t}](x)$ *is the fundamental solution to the fourth-order parabolic equation* $u_t + \Delta^2 u = 0$*.*

シュレディンガー方程式の解の平滑化効果について

中村 能久 (なかむら よしひさ)

熊本大学大学院 自然科学研究科 情報電気電子工学専攻 応用数理講座

(熊本大学 工学部 数理工学科)

E-mail: yoshin45@kumamoto-u.ac.jp

1 導入

自由シュレディンガー群 $U(t) = e^{it\Delta}$ に対して積分作用素

$$Gf(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds,\ t \in \mathbf{R}$$

を定義する. 適当な関数空間に属する関数 ϕ, f に対して $u(t) = U(t)\phi$, $v(t) = -iGf(t)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = f, & (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \\ v(0,x) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{2}$$

の解であることに注意する. n は空間次元である.

次のような u, v の平滑化効果に関する結果がよく知られている.

命題 1.1 (Stricharz 評価, [10, 2, 12, 4, 6], etc.). *(i)* ある定数 $C = C(q,n) > 0$ が存在して

$$\|U\phi\|_{L^r(\mathbf{R};L^q(\mathbf{R}^n))} \le C\|\phi\|_2$$

が成り立つ. ここで (q,r) は許容対 *(admissible pair)* と呼ばれる次を満たす実数の組である.

$$\frac{1}{q} + \frac{2}{nr} = \frac{1}{2}, \quad 2 \le q \le \frac{n}{n-2}.$$

(ii) ある定数 $C = C(q_1, q_2, n) > 0$ が存在して

$$\|Gf\|_{L^{r_1}(I;L^{q_1}(\mathbf{R}^n))} \le C\|f\|_{L^{r_2'}(I;L^{q_2'}(\mathbf{R}^n))}$$

が成り立つ. ここで (q_i, r_i), $i = 1,2$ は許容対, また $\dfrac{1}{q_i} + \dfrac{1}{q_i'} = 1$ である. $I = [0,T]$ は区間である.

命題 1.2 (Kato-smoothing, [9, 11, 1, 5], etc.). *(i)* ある定数 $C = C(n) > 0$ が存在して

$$\|\varphi U\phi\|_{L^2(I;H^{1/2}(\mathbf{R}^n))} \le C\|\phi\|_2$$

が成り立つ. ここで $\varphi(x) = \langle x\rangle^{-1/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$. また $I = [0,T]$ は任意の有界区間である.

(ii) ある定数 $C = C(n) > 0$ が存在して

$$\|\varphi Gf\|_{L^2(I;H^{1/2}(\mathbf{R}^n))} \le C\|f\|_{L^1(I;L^2(\mathbf{R}^n))}$$

が成り立つ. $I = [0,T]$ は有界な区間である.

注意 1.3. 命題 *1.1* および *1.2* はシュレディンガー方程式の局所可解性を論じる際に非常に重要な役割を果たす *(*波動方程式など他の方程式に対しても同様な評価が存在する*)*. また命題 *1.2* は分散型方程式に共通の性質で, *[3]* において *KdV* 方程式の解に対して得られた評価に端を発する *([8]* 参照*)*.

2 主結果

次の非線形シュレディンガー方程式を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^{p-1}u, & (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{NLS}$$

ただし $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$.

以下の解の正則性に関する定理が成立する.

定理 2.1 ([1, 7], etc.). $u_0 \in H^1(\mathbf{R})$ を仮定する. 空間次元 $1 \leq n \leq 6$ に対しては $1 < p < p^*(n)$ を, 空間次元 $n \geq 7$ に対しては $1 < p \leq 1 + \dfrac{2}{n-4}$ を仮定する. ただし $p^*(n) = \infty\,(n = 1,2), = 1 + \dfrac{4}{n-2}\,(n \geq 3)$. このとき $u \in C(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R}^n))$ を (NLS) の解とすると, 任意の $T > 0$ に対して $\varphi u \in L^2(0,T; H^{3/2}(\mathbf{R}^n))$ が成立する.

参考文献

[1] Constantin, P. and Saut, J.-C., Local smoothing properties of dispersive equations. J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), 413–439.

[2] Ginibre, J. and Velo, G., The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation revisited. Ann. Inst. Henri Poincaré, analyse non linéaire, **2** (1985), 309–327.

[3] Kato, T., On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. Studies in Applied Math. Adv. Math. Suppl. Studies, **18** (1983), 93–128.

[4] Kato, T., Nonlinear Schrödinger equations. Lecture Notes in Physics, **345** Schrödinger operators, (H. Holden and A. Jensen eds.) Springer-Verlag, Berlin-New York (1989), 218–263.

[5] Kato, T. and Yajima, K., Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect. Rev. Math. Phys., **1** (1989), 481–496.

[6] Keel, M., and Tao, T., Endpoint Strichartz estimate. Amer. J. Math., **120** (1998), 955–980.

[7] Nakamura, Y., Regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations with H^2 initial data. Yokohama Math. J., **47** (1999), 59–73.

[8] Segata, J., Well-posedness for the fourth-order nonlinear Schrodinger-type equation related to the vortex filament. Differential Integral Equations, **16** (2003), 841–864.

[9] Sjölin, P., Regularity of solutions to the Schrödinger equations. Duke Math. J., **55** (1987), 699–715.

[10] Strichartz, R. S., Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. Duke Math. J., **44** (1977), 705–714.

[11] Vega, L., The Schrödinger equation : pointwise convergence to the initial data. Proc. Amer. Math. Soc., **102** (1988), 874–878.

[12] Yajima, K., Existence of solutions for Schrödinger evolution equations. Comm. Math. Phys., **110** (1987), 415–426.

連立非線形消散型波動方程式の時間大域解の臨界指数について

竹田 寛志 (たけだ ひろし)
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
E-mail: `sa5m20@math.tohoku.ac.jp`

1 導入

次の連立非線形消散型波動方程式の初期値問題；

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta u_j + \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} |u_k|^{p_{j,k}}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m), \\ u_j(0,x) = a_j(x), \quad \partial_t u_j(0,x) = b_j(x), & x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m) \end{cases} \tag{1}$$

について考える．ここで, 連立系の成分の個数 m を $m \ge 2$ とし, 非線形項の冪は $p_{j,k} \ge 1$ または $p_{j,k} = 0$ $(j,k = 1,2,\cdots,m)$ を満たすものとする．連立系 (1) の非線形項の冪 $\{p_{j,k}\}_{j,k=1}^{m}$ の変化に応じた, 解の大域的挙動の変化を考察する．

小さい時間大域解の存在, 非存在を分類する非線形項の冪の閾値 (臨界指数) を求めることは, Fujita 型の非線形偏微分方程式において基本的な問題である．非線形消散型波動方程式；

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \dfrac{\partial u}{\partial t} = |u|^p, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = a(x), \quad \partial_t u(0,x) = b(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

は, $p = 1 + \frac{2}{n}$ を境に時間大域解の存在, 非存在が異なる; すなわち $p \le 1 + \frac{2}{n}$ ならば解は有限時間爆発し, $p > 1 + \frac{2}{n}$ のとき, 時間大域解が存在する ([5], [7])．一方, 連立系 (1) も $m = 2$, $p_{1,1} = p_{2,2} = 0$, $p_{1,2} > 1$, $p_{2,1} > 1$ の場合にも, その臨界指数が得られている ([3])．

2 主結果

主結果を述べるための記法を導入する．
記法. 非線形項の冪 $p_{j,k}$ で与えられる m 次正方行列 P, m 次単位行列 E_m を以下のように定める:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \dots & p_{m,m} \end{pmatrix}, E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

ベクトル $\vec{\alpha} = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ を, 連立方程式

$$(P - E_m)\vec{\alpha} = {}^t(1, 1, \cdots 1)$$

の根とする．このとき, 単独方程式や, $m = 2$ の連立系 (1) に対する結果 ([3]) を包含する, 以下の結果を得た.

定理 2.1 ([1]). 空間変数の次元を $n = 1,2,3$ とする．十分小さい初期データ $(a_j, b_j) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le j \le m)$ に対して, 非線形項の冪が

$$\det(P - E) \ne 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} p_{j,k} > 1 \quad (1 \le j \le m),$$
$$0 < \alpha_j < \frac{n}{2} \quad (1 \le j \le m)$$

を満たせば, 初期値問題 (1) は一意的な時間大域解

$$u_j(t) \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad (1 \le j \le m)$$

を持つ.

定理 2.1 における $\vec{\alpha}$ の仮定が成立しない場合には, 時間大域解が存在しない連立系が存在する; 例えば次の連立非線形消散型波動方程式系を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = |u_m|^{p_1}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = |u_1|^{p_2}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad\vdots & \\ \dfrac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \Delta u_m + \dfrac{\partial u_m}{\partial t} = |u_{m-1}|^{p_m}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u_j(0,x) = a_j(x), \quad \dfrac{\partial u_j}{\partial t}(0,x) = b_j(x), & x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m). \end{cases} \tag{2}$$

定理 2.2 ([4]). 空間変数の次元を $n \ge 1$ とする. $\max\limits_{1 \le j \le m} \alpha_j = \alpha_{j_0}$ とおくとき, 初期データ $(a_j, b_j) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le j \le m)$ が,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_j(x)dx \ge 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} b_j(x)dx \ge 0 \qquad (1 \le j \le m),$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{j_0-1}(x)dx > 0 \quad \text{または} \quad \int_{\mathbb{R}^n} b_{j_0-1}(x)dx > 0$$

を満たし, 非線形項の冪に対しては $p_j > 1$ $(1 \le j \le m)$,

$$\alpha_{j_0} \left(= \max_{1 \le j \le m} \alpha_j \right) \ge \frac{n}{2}$$

が成り立つとき, $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$: 初期値問題 (2) の解は, 有限時間で爆発する.

注意. 定理 2.1 と定理 2.2 では対応する非線形熱方程式系の結果 [2], [6] における初期データの非負値性の仮定は必要としない.

参考文献

[1] Ogawa, T., Takeda, H., *Global existence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*, preprint.

[2] Renclawowicz, J., Applicationes Mathematicae, **27**, (2000), no.2, 203-218.

[3] Sun, F., Wang, M., Nonlinear Analysis:, **66** (2007), no. 12, 2889-2910.

[4] Takeda, H., *Global existence and nonexistence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*, to appear.

[5] Todorova, G., Yordanov, B., J. Differential Equations, **174** (2001), 464-489.

[6] Umeda, N., Tsukuba J. Math. **27** (2003), no. 1, 31-46.

[7] Zhang, Q., C. R. Acad. Sci. Paris, **333** (2001), 109-114.

Well-posedness for the fifth order KdV equation

名古屋大学大学院　多元数理研究科　加藤孝盛

次の KdV 階層のひとつである 5 次 KdV 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^5 u - 10\partial_x(u^3) + 5\partial_x(\partial_x u)^2 + 10\partial_x(u\partial_x^2 u) = 0 \ \ \text{in} \ \ (0,T)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

この方程式は完全可積分系であり, 初期値を滑らかな $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に与えれば逆散乱法から (1) の時間大域解が存在することがいえる. しかし初期値を与える空間の正則性がある程度低い場合, この手法を適用するのは難しい. よって我々は, 非線型偏微分方程式の手法を用いてより低い正則性の空間に初期値を与え, (1) の時間局所的適切性 (LWP) を導くことを目的とする. この問題に関連する既存の結果としては, S. Kwon [2] が通常の Sobolev 空間 H^s に初期値を与え, コンパクト性を用いることにより $s > \frac{5}{2}$ で (1) の LWP を導いた. また C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega [1] は, 十分滑らかでありかつ遠方で多項式オーダーで減衰する空間に初期値を与え, 高次 KdV 方程式を含む高次分散型非線型方程式の LWP を導いた. この方程式は, 強い特異性を持つ 2 次の非線型項 $\partial_x(u\partial_x^2 u)$ を含むため反復法 (Picard の逐次近似法) を利用することができない. 詳細には iteration step の第 2 項が発散してしまう. これは解の低周波部分に原因がある. そこで, 初期値を与える空間を $H^{s,a} := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \|u\|_{H^{s,a}} := \|\langle\xi\rangle^{s-a}|\xi|^a \widehat{u}(\xi)\|_{L^2} < \infty\}, (a < 0)$ に修正する. このことにより反復法を適用することが可能になり, 本質的により低い正則性で (1) の LWP が得られた. 一方, s, a が次の条件を満たしていなければ, iteration step の第 2 項あるいは第 3 項が発散することが示せる.

$$s \leq -\frac{1}{4}, \ \ s \geq -2a - 2 \text{ かつ } -\frac{3}{2} < a \leq -\frac{1}{4} \tag{2}$$

それゆえ, s, a が条件 (2) をみたしているとき $H^{s,a}$ において (1) の LWP が成立することを示す. この問題において最も重要なのは, $\partial_x(u\partial_x^2 u)$ に対する次の双線型評価である.

$$\|\langle\tau - \xi^5\rangle^{-1}\xi f * (\xi^2 g)\|_{\hat{X}^{s,a,b}} \leq C\|f\|_{\hat{X}^{s,a,b}}\|g\|_{\hat{X}^{s,a,b}}. \tag{3}$$

ここで $\hat{X}^{s,a,b}$ は $H^{s,a}$ に対応する Bourgain 空間で次で定義される.

$$\hat{X}^{s,a,b} := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : \|f\|_{\hat{X}^{s,a,b}} := \|\langle\xi\rangle^{s-a}|\xi|^a\langle\tau - \xi^5\rangle^b f\|_{L^2_{\xi,\tau}} < \infty\}.$$

(2) の条件の下で LWP を導くには $\hat{X}^{s,a,b}$ ノルムの重みを非線型項の特徴を捉え, 部分的に付けかえる必要がある. そこで, 双線型評価 (3) の反例を考察する. $\hat{X}^{s,a,b}$ では微分の損失を回復することができない部分は, High-High-Low interaction と High-High-High interaction であり, それら

の領域での重みを修正する．まず High-High-Low interaction の部分では (3) の左辺が大きくなり, (2) の条件の下では (3) が成立しないことがわかる．そのため低周波部分 $\{|\xi| \le 1\}$ のノルムを重みが小さい $\|f\|_{\hat{Y}^a} := \||\xi|^a \langle \tau - \xi^5 \rangle^{\frac{3}{8}-\varepsilon} f\|_{L^2_{\xi,\tau}}$, $(0 < \varepsilon \ll 1)$ と修正する．また High-High-High interaction の部分では, $b = \frac{1}{2}$ とすると端点 $s = -\frac{1}{4}$ において log オーダーで発散してしまい (3) が成立しない．それを回避するため, 高周波部分 $\{|\xi| \ge 1\}$ のノルムを次のように Besov 化する．

$$\|f\|_{\hat{X}^s} := \left\| \left\{ \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^5 \rangle^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2_{\xi,\tau}(A_j \cap B_k)} \right\}_{j \ge 1,\ k \ge 0} \right\|_{l^2_j l^1_k}$$

ここで $A_j,\ B_k$ は次のように定めた．

$$A_j := \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2;\ 2^j \le \langle \xi \rangle < 2^{j+1}\} \quad , B_k := \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2;\ 2^k \le \langle \tau - \xi^5 \rangle < 2^{k+1}\}.$$

$f_h(\xi) := f(\xi)|_{|\xi| \ge 1},\ f_l(\xi) := f(\xi)|_{|\xi| \le 1}$ とし, 関数空間を次のように設定する．

$$\hat{Z}^{s,a} := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2);\ \|f\|_{\hat{Z}^{s,a}} := \|f_h\|_{\hat{X}^s} + \|f_l\|_{\hat{Y}^a} + \||\xi|^a f_l\|_{L^2_\xi L^1_\tau} < \infty\}$$

この関数空間を利用すれば, (2) の条件の下で次の双線型評価が成立する．

$$\|\langle \tau - \xi^5 \rangle^{-1} \xi f * (\xi^2 g)\|_{\hat{Z}^{s,a}} \le C \|f\|_{\hat{Z}^{s,a}} \|g\|_{\hat{Z}^{s,a}}$$

3 次の非線型項 $\partial_x(u)^3$ は $[k,Z]$-multiplier norm method を用いることで (2) の条件の下で多重線型評価が得られる．これらの事実から Fourier 制限ノルム法の基礎的な理論を用いることで, 最良の結果である次の主定理が得られる．

Theorem 1. s, a が $s \ge -\frac{1}{4},\ s \ge -2a-2$ かつ $-\frac{3}{2} < a \le -\frac{1}{4}$ を満たすとき, (1) の LWP が成立する．

更にアプリオリ評価を計算することにより次のような時間大域的な結果が得られた．

Thorem 2. s, a が $s \ge 1,\ -\frac{1}{2} \le a \le -\frac{1}{4}$ を満たしているとき $H^{s,a}$ において (1) の時間大域的適切性が成立する．

Lemma 3. $-\frac{1}{2} \le a \le -\frac{1}{4}$ のとき, ある $T = T(\|u_0\|_{H^{1,a}})$ と $C > 0$ が存在して次の評価が成立する．

$$\sup_{t \in [0,T]} \Big(\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|u(t)\|^2_{\dot{H}^a(\mathbb{R})} \Big) \le C \Big(\|u_0\|^2_{\dot{H}^a(\mathbb{R})} + \langle \|u_0\|^{\frac{10}{3}}_{H^1(\mathbb{R})} \rangle + T \langle \|u_0\|^{\frac{13}{3}}_{H^1(\mathbb{R})} \rangle \Big)$$

参考文献

[1] C.E.Kenig, G.Ponce, and L.Vega, *Higher-order nonlinear dispersive equations*, Comm. PureAppl. Math. Soc, **122**, 1994, no.1, 157–166

[2] S. Kwon, *On the fifth order KdV equation: Local well-posedness and lack of uniform continuity of the solution map*, J. Differential Equation, **245**, 2008, no.9, 2627–2659

非局所的移流項を持つ強退化拡散方程式系の可解性

渡邉　紘

中央大学大学院理工学研究科

E-mail: s17006@gug.math.chuo-u.ac.jp

本講演では、以下のような非局所的移流項を持つ非線形強退化拡散方程式系 (S) に対する初期値境界値問題を考える。各 $i = 1, \cdots, M$ に対して、

$$
\text{(S)} \qquad \begin{cases}
(u_i)_t + \nabla \cdot A_i(x,t,P(t),u_i) + B_i(x,t,P(t),u) = \Delta\beta_i(u_i), \quad (x,t) \in \Omega_i \times (0,T), \\
\dfrac{\partial \beta_i(u_i)}{\partial \mathbf{n}}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_i \times (0,T), \\
u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad u_{i0} \in L^\infty(\Omega_i) \cap BV(\Omega_i), \\
P(t) = (P_1(t), \cdots, P_M(t)), \quad P_i(t) = \displaystyle\int_{\Omega_i} w_i(x) u_i(x,t)dx, \quad w_i \in \mathrm{Lip}(\Omega_i).
\end{cases}
$$

ここで、各 Ω_i は $\mathbb{R}^N$ 内の Lipschitz 領域とする。$\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_N)$, $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial^2/\partial x_i^2$ は $\mathbb{R}^N$ の spatial nabla, Laplacian として、[0,T] は固定された時間区間である。各 $A_i(x,t,\xi) = (A_i^1, ..., A_i^N)(x,t,\xi)$ を $\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}^N$ 値の微分可能な関数として、 $B_i(x,t,\xi)$ は $\overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ 上の実数値の微分可能な関数とする。右辺の関数 β_i は $\mathbb{R}$ 上単調増加で局所 Lipschitz 連続であると仮定する。また $\mathbf{n}$ は $\partial\Omega$ の単位法線を表す。各 β_i に対する仮定から、$\beta_i'(\xi) = 0$ となる点の集合が正の測度を持つ場合が考えられる。この意味で (S) の各方程式は強退化型であると云う。この種の方程式系は、粘性付き双曲型保存則、移流を伴う多孔性媒質流れ、Stefan 問題だけでなく、サイズに依存する個体数変動方程式にも適用できる形をしている ([2])。

本講演では、(S) に対する BV-エントロピー解の存在性について解説する。BV-エントロピー解の定義は以下で与える。

Definition 1
各 $i = 1, \ldots, M$ に対し、$u_{i0}, u_i \in L^\infty(\Omega_i) \cap BV(\Omega_i)$ を取る。関数 $u = (u_i)_i$ の各成分 u_i が次の二つの条件を満たすとき、u を (S) の BV-エントロピー解であると呼ぶ。

(1) $u_i \in C([0,T]; L^1(\Omega_i))$, L^1-$\lim_{t\downarrow 0} u_i(\cdot,t) = u_{i0}$;

(2) $\nabla\beta(u_i) \in L^2(0,T; L^2(\Omega_i)^N)$, 各 $\varphi \in \mathscr{D}^+(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ と $k \in \mathbb{R}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega_i} \mathrm{sgn}(u_i - k)[(u_i-k)\varphi_t - \nabla\beta_i(u_i)\cdot\nabla\varphi + [A_i(x,t,P(t),u_i) - A_i(x,t,P(t),k)]\cdot\nabla\varphi \\
-[B_i(x,t,P(t),u_i) + \nabla\cdot A_i(x,t,P(t),k)]\varphi]dxdt \\
+ \int_0^T \int_{\partial\Omega_i} \mathrm{sgn}(T_r u_i - k)[A_i(x,t,P(t),u_i) - A_i(x,t,P(t),k)]\cdot\mathbf{n}(x)\varphi d\mathcal{H}^{N-1}dt \geq 0.
\end{aligned}
$$

ここで T_r は $BV(\Omega)$ のトレース作用素である。

エントロピー解は、S.N.Kruzkov により導入され、一階の準線形保存型方程式の初期値問題に対して二重変数法と呼ばれる巧みな方法を用いて一意性が証明された [3]。境界値問題については、C. Bardos, A. Y. Leroux and J. C. Nedelec [1] により、Dirichlet 問題が BV の枠組みで取り扱われた。我々は問題 (S) に対し、エントロピー解の概念を用いて上記のように解を定義し、それを BV 空間内で構成することを試みる。

これを示すために、以下の形の単独強退化移流拡散方程式に対する結果を用いる。

$$(IBVP)_i \qquad \begin{cases} u_t + \nabla \cdot A_i(x,t,u) + B_i(x,t,u) = \Delta\beta_i(u), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \beta_i(u)}{\partial \mathbf{n}}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \end{cases}$$

この種の方程式は、微粒子懸濁液の沈殿硬化過程を記述する数学モデルや filtration 問題、Stefan 問題などに適用できることが知られている。渡邉、大春 ([4], [5]) は (IBVP) に対する BV-エントロピー解の一意存在性を証明した。特に、[4] では BV-エントロピー解の L^1 の意味での初期値への連続的依存性を証明した。ここではまず、初期値と非線形関数 A_i, B_i, β_i, $i = 1, 2$ に対する連続的依存性について以下の結果が得られたことを報告する。

Theorem 1
関数 u, v をそれぞれ $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ を初期関数とする $(IBVP)_1$,$(IBVP)_2$ の一意な BV-エントロピー解であるとする。このとき、つぎの不等式が得られる。

$$||u(\cdot,t) - v(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \le e^{\alpha' t}||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)} + 2(\sqrt{t}C_* + \alpha' e^{\alpha' t}C_{**})||\sqrt{\beta_1'} - \sqrt{\beta_2'}||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I)}$$
$$+\frac{e^{\alpha' t}-1}{\alpha'}\left[\sup_{t\in(0,T),\xi\in I}|A_1(\cdot,t,\xi) - A_2(\cdot,t,\xi)|_{BV(\Omega)} + \sup_{t\in(0,T),\xi\in I}||B_1(\cdot,t,\xi) - B_2(\cdot,t,\xi)||_{L^1(\Omega)}\right.$$
$$\left. + \sup_{t\in(0,T)}|u(\cdot,t)|_{BV(\Omega)} \sup_{t\in(0,T),\xi\in I}||\tfrac{\partial}{\partial\xi}A_1(\cdot,t,\xi) - \tfrac{\partial}{\partial\xi}A_2(\cdot,t,\xi)||_{L^\infty(\Omega)}\right],$$

ここで $I \subset \mathbb{R}$ は u, v が値をとる閉区間とし、 C_* と C_{**} は、$\sup_t |u(\cdot,t)|_{BV}$, $\sup_t |v(\cdot,t)|_{BV}$, $\sup_{t,\xi} |A_1(\cdot,t,\xi)|_{BV(\Omega)}$, $\sup_{t,\xi} ||\frac{\partial}{\partial\xi}A_2(\cdot,t,\xi)||_{Lip(\Omega)}$, $\sup_{t,\xi} ||B_2(\cdot,t,\xi)||_{BV(\Omega)}$, $||\sqrt{\beta_1'}||_{L^\infty(I)}$, $||\sqrt{\beta_2'}||_{L^\infty(I)}$, $||\sqrt{\beta_2'} - \sqrt{\beta_1'}||_{L^\infty(I)}$ に依存する正定数である。さらに、α' は $-\frac{\partial}{\partial\xi}B(x,t,\xi) \le \alpha'$ を満たす正定数であり、$|\cdot|_{BV}$ は全変動を表す。

[5] の一意存在性の結果と Theorem 1 の連続的依存性の結果、そして Schauder の不動点定理を用いることにより、次の定理が証明される。

Theorem 2
各 $i = 1, \cdots, M$ に対し、$u_{i0} \in L^\infty(\Omega_i) \cap BV(\Omega_i)$ を取る。このとき、(S) に対する BV-エントロピー解 $u = (u_i)_i$ が存在する。

References

[1] C. Bardos, A. Y. Leroux and J. C. Nedelec, First order quasilinear equations with boundary conditions, Comm. In Partial differential equations, 4(9), 1017-1034, (1979)

[2] 蚊戸宣幸, サイズ構造を持つ非線形個体数変動方程式, 日本数学会 2009 年度年会 実函数論分科会 講演アブストラクト.

[3] S. N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR Sbornik, 10 (1970), 217-243.

[4] H. Watanabe, S. Oharu, BV-entropy solutions to nonlinear strongly degenerate parabolic equations -A uniqueness theorem-, submitted.

[5] H. Watanabe, S. Oharu, Unique existence of BV-entropy solutions for strongly degenerate convective diffusion equations, 数理解析研究所講究録, 1640 (2009), 144-163.

熱水力学に現れる障害物問題の大域的アトラクターについて

深尾 武史 (ふかお たけし)

京都教育大学 教育学部 数学教室

E-mail: `fukao@kyokyo-u.ac.jp`

1 導入

障害物問題は自然法則に基づいた微分方程式とは別に半強制的に解に制約がかかる問題である．ここでは熱水力学に現れる微分方程式系を考え, 熱方程式に温度の制約条件として両側の障害物を設定する状況をある変分不等式で記述し, これを発展方程式の枠組みで捉える．解の存在・一意性・連続依存性の結果と系の大域的アトラクターの存在を報告する．なお, 本研究は名古屋工業大学の久保先生との共同研究である．

2 温度制御装置の付いた熱水力学の数理モデル

$-\infty < s < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とし $(N = 2, 3)$ その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は十分滑らかとする．ここでは熱水力学に現れる障害物のある問題 (P):= {(1)–(8)} を考察する:

$$\psi_1 \le \theta \le \psi_2 \quad \text{in } Q := (s,T) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta - \kappa\Delta\theta = 0 \quad \text{in } Q(\theta) := \{(t,x) \in Q; \psi_1 < \theta < \psi_2\}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta - \kappa\Delta\theta \ge 0 \quad \text{in } Q_1(\theta) := \{(t,x) \in Q; \theta = \psi_1\}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta - \kappa\Delta\theta \le 0 \quad \text{in } Q_2(\theta) := \{(t,x) \in Q; \theta = \psi_2\}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\theta) - \nabla p \quad \text{in } Q, \tag{5}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{in } Q, \tag{6}$$

$$\theta = 0, \quad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{on } \Sigma := (s,T) \times \Gamma, \tag{7}$$

$$\theta(s) = \theta_0, \quad \boldsymbol{v}(s) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{8}$$

ここで $\theta = \theta(t,x)$ は温度, $\boldsymbol{v} := (v_1(t,x), \cdots, v_N(t,x))$ は流速, そして $p := p(t,x)$ は圧力, κ, ν は正定数である．問題 (P) は通常は移流項のある熱方程式 (2) と考えられるが, 最低温度 $\psi_1 := \psi_1(t,x)$ と最高温度 $\psi_2 := \psi_2(t,x)$ に関する (1) の制約を満たすよう, 領域 $Q_1(\theta)$ 上では不等式 (3) が, 領域 $Q_2(\theta)$ 上では不等式 (4) として熱方程式を考える．これら領域は未知関数 θ に依存し, このような問題を自由境界問題と呼ぶことがある．$\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \theta_0 : \Omega \to \mathbb{R}, \boldsymbol{v}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$ は与えられた関数で, それぞれ温度による浮力の近似項, 温度初期条件, 流速初期条件である．熱方程式と Navier-Stokes 方程式の連立系を総称して Boussinesq 系と呼ぶこともある．熱方程式が線形の Boussinesq 系については, 解の存在と滑らかさ, 一意性の結果は森本 (1992) に, 大域的アトラクターの結果は Foias, Manley, Temam (1987) にある．$N = 2$ の場合に深尾, 久保 (2008), (2009) では両側, 片側の障害物問題に対して問題 (P) を次の劣微分作用素を含む発展方程式に帰着させ解の存在と一意性, 連続依存性の結果を得ている:

$$u'(t) - \kappa\Delta_0 u(t) + G(\boldsymbol{u}(t), u(t)) + \partial I_{K(t)}(u(t)) \ni 0,$$

$$\boldsymbol{u}'(t) + \nu A\boldsymbol{u}(t) + B(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{g}(u(t)).$$

ここでは Crauel, Debussche, Flandoli(1997), 伊藤, 剣持, 山崎 (2001) の時間依存大域アトラクターの抽象理論を参考にする．

3　主結果

$H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$ とし, V^* は V の共役空間とすると $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ が成立する. また, Navier-Stokes 方程式の基礎空間として $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega) := (C_0^\infty(\Omega))^2; \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega\}$ を用意し, $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{V} := \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ とする. ここで $\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ は $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega)$ の, それぞれ $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ のノルムに対する閉包. このとき $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H} \hookrightarrow \boldsymbol{V}^*$ が成立する. また H の閉凸集合として

$$K(t) := \{z \in H; \psi_1(t) \le z \le \psi_2(t) \text{ a.e. on } \Omega\},$$

と定義する. ここでは以下の仮定を用意する.

(A1) $\psi_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}; V) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$, $\psi_i' \in L^2(\mathbb{R}; H) \cap L^1(\mathbb{R}; H)$　$(i = 1, 2)$ で $\mathbb{R} \times \Omega$ 上で $\psi_1 \le \psi_2$ で $\mathbb{R} \times \Gamma$ 上で $\psi_1 \le 0 \le \psi_2$;

(A2) g_i は Lipschitz 連続 $(i = 1, \cdots, N)$;

(A3) $\theta_0 \in K(s)$, $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{H}$.

命題 3.1. *$N = 2$ とする. 仮定 (A1), (A2), (A3) の下, 問題 (P) の一意弱解が存在する.*

今後 $\mathcal{H} := H \times \boldsymbol{H}$, $\mathcal{V} := V \times \boldsymbol{V}$ そして $\mathcal{K}(s) := K(s) \cap \boldsymbol{H}$ とおく. 命題3.1により問題(P)に対して初期値 $(\theta_0, \boldsymbol{v}_0) \in \mathcal{K}(s)$ に解 $(u(t), \boldsymbol{u}(t))$ を対応させる解作用素 $\mathcal{E}(t, s) := \{E_1(t, s), E_2(t, s)\} : \mathcal{K}(s) \to \mathcal{K}(t)$ が定義でき, さらに以下を満たすことが分かる:

(E1) $\mathcal{E}(t_2, s) = \mathcal{E}(t_2, t_1) \circ \mathcal{E}(t_1, s)$　for all s, t_1, t_2 with $-\infty < s \le t_1 \le t_2 < +\infty$;

(E2) $\mathcal{E}(s, s)$ is identity;

(E3) If $-\infty < s_n \le t_n < +\infty$, $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{K}(s_n)$ with $s_n \to s$, $t_n \to t$ in $\mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_n \to \mathcal{Z}$ in $\mathcal{H}$ as $n \to +\infty$. Then

$$\mathcal{E}(t_n, s_n)\mathcal{Z}_n \to \mathcal{E}(t, s)\mathcal{Z} \quad \text{in } \mathcal{H} \text{ as } n \to +\infty.$$

定義 3.2. *ある集合 $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{H}$ が以下の (T1), (T2) を満たすとき時間 t における時間依存大域アトラクターと呼ぶ:*

(T1) $\mathcal{A}(t)$ *はコンパクト集合で時間 t において以下の意味で不変である:*

$$\mathcal{E}(\tau, t_0)\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}(\tau) \quad \textit{for all } \tau, t_0 \textit{ with } \tau \ge t_0 \ge t;$$

(T2) $\mathcal{A}(t)$ *は時間 t において以下の意味ですべての有界集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ を引きつける:*

$$\mathrm{dist}(\mathcal{E}(t, s)(\mathcal{B} \cap \mathcal{K}(s)), \mathcal{A}(t)) \to 0 \quad \textit{as } s \to -\infty,$$

すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $s_{\varepsilon,t} \le t$ が存在して

$$\inf_{\mathcal{Z} \in \mathcal{A}(t)} |\mathcal{E}(t, s)\mathcal{U} - \mathcal{Z}|_{\mathcal{H}} < \varepsilon \quad \textit{for all } s \le s_{\varepsilon,t} \quad \textit{and } \mathcal{U} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}(s).$$

以下の時間依存大域アトラクターの存在定理が成立する.

定理 3.3. *$N = 2$ とする. 仮定 (A1), (A2), (A3) の下, 連結で空でない集合の集合族 $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{H}$ が存在して, $\mathcal{A}(t)$ は問題 (P) の時間 t における時間依存大域アトラクターである.*

非斉次項をもつ特異拡散方程式の近似問題

黒田 紘敏 (くろだ ひろとし)
北海道大学大学院 理学研究院 数学部門
E-mail: kuro@math.sci.hokudai.ac.jp

1 導入

本研究は神奈川大学の山崎教昭先生との共同研究です．

ベクトル値関数 $u : [0,T] \times [0,L] \to \mathbb{R}^N$ を未知関数とし，次のような非斉次項をもつ特異拡散方程式

$$\begin{cases} u_t - \dfrac{1}{b(x)} \operatorname{div}\left(a(x) \dfrac{u_x}{|u_x|} \right) = 0, & \text{a.a. } (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = g_0, \quad u(t,L) = g_L, & \text{a.a. } t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{a.a. } x \in (0,L), \end{cases} \tag{1}$$

の近似問題について考察する．ここで，u_0 は与えられた初期値とし，$g_0, g_L \in \mathbb{R}^N$ は与えられた境界値で $g_0 \neq g_L$ とする．また，既知関数 $a(x), b(x)$ は $[0,L]$ で定義された正値連続関数とする．この方程式は応用的にはノイズのある画像データの整形 [4] や結晶成長の様子を記述する方程式として現れる．

問題 (1) の定式化のために記号を準備する．以下ではヒルベルト空間 $H = L^2(0,L;\mathbb{R}^N)_b$ を次の重みつき内積

$$\langle f, g \rangle_b = \int_0^L b(x)(f(x), g(x))\,dx$$

を備えた $L^2(0,L;\mathbb{R}^N)$ とする．次に，汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ を

$$\varphi(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^L a(x)|v_x| + a(0)|v(0) - g_0| + a(L)|v(L) - g_L| & \text{if } \ v \in H \cap BV(0,L;\mathbb{R}^N), \\ +\infty & \text{otherwise}, \end{cases}$$

により定義する．ここで，$BV(0,L;\mathbb{R}^N)$ は $(0,L)$ 上の $\mathbb{R}^N$ 値有界変動関数全体のなす空間である．φ は境界値 $g_0, g_L \in \mathbb{R}^N$ を与えたときの $[0,L]$ における全変動であり，H 上の適正下半連続凸関数となっている．ここで，適正とは $\varphi \not\equiv +\infty$ となることを意味する．

次に，凸関数の劣微分の定義を思い出しておく．

定義 1.1. H を実ヒルベルト空間とし，$\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ を適正下半連続凸関数とする．このとき，H 上の多価作用素 $\partial\varphi : H \to 2^H$ を次で定義し，φ の劣微分という．

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in H \mid \varphi(u+h) - \varphi(u) \geq \langle f, h \rangle_H \text{ for any } h \in H \}$$

これらの記号を用いて，元の問題 (1) を次の非線型発展方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni 0 & \text{in } H \quad \text{a.a. } t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

として扱うことにする．このとき，(2) は時間大域解 $u(t)$ が存在することがわかる．そこで，特に初期値 u_0 を局所定数関数としたときの解 $u(t)$ の挙動や定常解への収束の様子を近似問題を設定することにより考察する．

ここで $a(x)$ は有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ で極小となると仮定し，$(0, L)$ の分割 Δ を

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = L \quad (m \geq 2)$$

のようにとる．さらに，この分割 Δ に対応した局所定数関数全体の集合を

$$H_\Delta = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} h_i \chi_{(x_i, x_{i+1})} \,\middle|\, h_i \in \mathbb{R}^N,\ h_0 = g_0,\ h_{m-1} = g_1 \right\}$$

とおき，$\varepsilon > 0$ に対して φ の近似エネルギー汎関数 $\varphi^\varepsilon : H \to (-\infty, +\infty]$ を

$$\varphi^\varepsilon(v) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} a(x_i) \sqrt{|h_i - h_{i-1}|^2 + \varepsilon^2} & \text{if} \quad v = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} h_i \chi_{(x_i, x_{i+1})} \in H_\Delta, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で定義する．この特異性をもたない φ^ε を用いて (2) の近似問題を設定できる．その近似問題の解 $u_\varepsilon(t)$ が $\varepsilon \to 0$ のとき (2) の解 $u(t)$ に $C([0, T]; H)$ で収束することもわかる．

2　主結果

以下の定理が成立する．

定理 2.1. 非斉次項 $a(x)$ は前に述べた仮定を満たすとする．このとき，近似定常問題

$$0 \in \partial\varphi^\varepsilon(u_\varepsilon^\infty) \quad \text{in } H \tag{3}$$

の解，すなわち φ^ε の最小元 u_ε^∞ が一意に存在する．さらに

$$u_\varepsilon^\infty(x) = h_i \in \mathbb{R}^N \quad \text{in} \quad (x_i, x_{i+1}),\ i = 0, 1, 2, \ldots m-1 \tag{4}$$

とおくと，各 h_i は次のように表せる．

$$h_i = (1 - s_i) g_0 + s_i g_L, \qquad 0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{m-1} = 1$$

証明. この近似定常問題 (3) の解の構造については次のように解析される．定常解を (4) の形に表すと，(3) は次の h_i に関する連立方程式

$$\begin{cases} a(x_{i+1}) \dfrac{h_{i+1} - h_i}{\sqrt{|h_{i+1} - h_i|^2 + \varepsilon^2}} - a(x_i) \dfrac{h_i - h_{i-1}}{\sqrt{|h_i - h_{i-1}|^2 + \varepsilon^2}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-2 \\ h_0 = g_0, \quad h_{m-1} = g_L \end{cases}$$

に直すことができる．これを解くことにより，求める結果が得られる．　□

参考文献

[1] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[2] M.-H. Giga, Y. Giga and R. Kobayashi, Very singular diffusion equations. Proc. Taniguchi Conf. on Math., Advanced Studies in Pure Mathematics, **31**(2001), 93-125.

[3] H. Kuroda and N. Yamazaki, Approximating problems of vectorial singular diffusion equations with inhomogeneous terms and numerical simulations. AIMS Journals, to appear.

[4] G. Sapiro, *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

放物型方程式における最大正則性と指数可積分性について

猪奥 倫左 (東北大学理学研究科 D2)

本講演では, 外力項 f を持つ二次元熱方程式の解の時空間可積分性が外力項 f の可積分性に依存してどのように変化するかについて考察する. 空間次元を 2 とし, 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上で, 次の熱方程式の非斉次境界値問題を考える.

$$
\text{(H)} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = f, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega. \end{cases}
$$

ここでは，外力項 f の影響を調べるため，簡単のため初期値を恒等的に 0 とする．この問題に対する解の時空間可積分性の評価として，次の最大正則性の定理が知られている．外力を $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ $(1 < p, q < \infty)$ から取ったとき,

$$
\text{(1)} \qquad \|u_t\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} + \|D^2u\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} \le C\|f\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))}
$$

が成り立つ．また，最大正則性定理 (1) から，(H) は強解（方程式を二階弱微分の意味で満たす解）を持つことが知られている．一方で，$p = 1$ のとき，即ち外力が空間について L^1 であるとき，最大正則性 (1) は破綻する．このため, $f \in L^q(0,T;L^1(\Omega))$ のときの時空間評価は臨界状態となっており，評価の導出は最大正則性の理論とは別の観点から行う必要がある．この臨界状態の評価として，Nagai-Ogawa [4] は次の指数可積分性を示した.

命題 1 (Nagai-Ogawa[4]). 外力を $f \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ とし，u を熱方程式 (H) の解とする．このとき，任意の $0 \le \alpha < 4\pi$ に対してある定数 $C > 0$ が存在して

$$
\text{(2)} \qquad \sup_{0<t<T} \int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(t,x)|}{\|f\|_{L^\infty(L^1)}}\right) dx \le C|\Omega|
$$

が成り立つ.

同様の臨界状態は，(H) の定常問題である二次元 Poisson 方程式

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}
$$

においても現れる．この問題に対し，Brezis-Merle [1] は $f \in L^1(\Omega)$ のときに, (P) の解は命題 1 と同様の指数可積分性，即ち任意の $0 \le \alpha < 4\pi$ に対してある定数 $C > 0$ が存在して

$$
\text{(3)} \qquad \int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}\right) dx \le C|\Omega|
$$

を満たすことを示した．また，Dolzmann-Hungerbühler-Müller [3] は，外力に同じ仮定 $f \in L^1(\Omega)$ を課したとき，解は関数空間 BMO (Bounded Mean Oscillation) に属し,

$$
\text{(4)} \qquad [u]_{BMO} \le C\|f\|_{L^1}
$$

を満たすことを示した．ここで

$$[u]_{BMO} := \sup_{B\subset\Omega} \int_B |u(x) - u_B| dx, \quad u_B := \frac{1}{|B|}\int_B u(x) dx$$

で定義される．有名なJohn-Nirenbergの不等式から$u \in \mathrm{BMO}$ならば，uは指数可積分性を満たすことが知られている．これらの事実とDolzmann-Hungerbühler-Müller [3] の評価 (4) を合わせると，Brezis-Merle の指数可積分性 (3) と同様の評価を示すことができる．しかし，Brezis-Merle は指数可積分性の定数 4π にまで言及したが，Dolzmann-Hungerbühler-Müller [3] の手法ではこの定数を導くことはできない．

以上のことから，本講演では，放物型方程式においてBMO 型の評価式を，そこから自然に指数可積分性の定数 4π が得られる形で導出することを目標とする．この問題の為に，次の BMO 型の集合を考える．

定義 2. f の分布関数を $\mu_f(\lambda) := \big|\{x\,;\, |f(x)| > \lambda\}\big|$ とおき, f の球対称再配列関数 $f^\sharp$ を $f^\sharp(r) := \inf\{\lambda\,;\, \mu_f(\lambda) \le |B_r|\}$ で定める．また，球対称再配列関数 $f^\sharp$ の積分平均を $f^{\sharp\sharp}$ とおく．即ち，$f^{\sharp\sharp}(r) := \dfrac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f^\sharp(y) dy$ とする．このとき，BMO 型の集合 W を

$$W(B_R) := \left\{ f \in L^1(B_R); [f]_{W(B_R)} := \sup_{0<r<R} (f^{\sharp\sharp}(r) - f^\sharp(r)) < \infty \right\} \tag{5}$$

で定める．

注意 3. $f^{\sharp\sharp}(r) - f^\sharp(r)$ は，$f^\sharp$ の原点近傍での振動を表す．つまり W と BMO は両者ともに振動に注目したものであるので，似た性質を持つ．実際，$f \in W$ ならば f は指数可積分性を満たす．また，$\mathrm{BMO} \subset W$ であることが知られている．W の性質の詳細についてはBennett-Sharpley [2] を参照.

この W を用いて次の BMO 型の評価を得た.

定理 4. 外力を $f \in L^\infty(0, T; L^1(B_R))$ とし，更に球対称で単調減少であると仮定する．また，u を熱方程式 (H) の解とすると，

$$\sup_{0<t<T} [u(t)]_{W(B_R)} \le \frac{1}{4\pi} \|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(B_R))}$$

が成り立つ.

注意 5. この定理の直接的な系として，Nagai-Ogawa の指数可積分性（命題 1）を得ることが出来る.

証明は，熱方程式 (H) を解の振動（$u^{\sharp\sharp} - u^\sharp$）が満たす方程式に書き直し，その方程式の解が満たす性質を解析することにより行う.

References

[1] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimentions,* Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1223–1253.

[2] Bennett, C., Sharpley, R., "Interpolation of operators," Pure and applied mathematics, 1988.

[3] Dolzmann, G., Hungerbühler, N., Müller, S., *Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of n-Laplace type with measure valued right hand side,* J. reine angew. Math., **520** (2000), 1–35.

[4] Nagai, T., Ogawa, T., *Brezis-Merle inequalities and application to the global existence of the Cauchy problem of the Keller-Segel and self-interacting systems,* preprint.

E-mail address: `sa6m02@math.tohoku.ac.jp`

2次元全空間におけるSchrödinger-Poisson方程式の時間局所解の一意存在について

眞崎 聡 (東北大・情報　特別研究員 PD)

1　序

次の Schrödinger-Poisson 方程式系を考える。

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda P u, \qquad -\Delta P = |u|^2, \qquad u(0,x) = u_0(x). \tag{SP}$$

ただし $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+2}$ とし、$\lambda \in \mathbb{R}$ とする。初期値は $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ $(s > 2)$ であるとする。ここで、Poisson 方程式に対しては次の境界条件を課す:

$$\nabla P \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad |\nabla P| \to 0 \text{ as } |x| \to \infty, \quad P(0) = 0.$$

また、background(または doping profile) をつけず、$|u|^2$ に関する付加的な条件 (例えば [4] のように neutrality やモーメントの有界性など) も一切課さない。この条件の下、P は

$$P(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\log \left(\frac{|x-y|}{|y|} \right) \right) |u(t,y)|^2 dy$$

として一意に与えられる。$|y| \to \infty$ のとき、$\log|x-y|$ のみだと発散するが、$\log(|x-y|/|y|)$ であれば $O(|y|^{-1})$ となることに注意。したがって P は $u(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $(\exists p \in (2,4))$ ならば well-defined. しかし、u の空間遠方での減衰がどんなに速くても (たとえ $u \in C_0^\infty$ であったとしても)、この P は $|x| \to \infty$ のとき発散する。この事実が (SP) を解く上での大きな問題点になる。ひとつ例を挙げると、このことから、(SP) を積分方程式

$$u(t) = u_0 - i\lambda \int_0^t e^{i\frac{t-s}{2}\Delta}(Pu)(s)ds$$

のように書き直したときに、右辺第二項の被積分関数は一般にどんな Lebesgue 空間にも属しないことが分かる。したがって、3 次元以上の場合 [3] のように第二項を摂動項とみなして縮小写像の原理を用いる手法で解くことは難しいのではないかと思われる。今回、半古典近似問題に用いられている手法を応用して次の結果が得られたので、報告したい。

定理 1.1. $s > 2$ であるとする。このとき、任意の $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ に対してある存在時間 $T > 0$ が存在して (SP) の時間局所解 $u \in C([-T,T]; H^s)$ がこの空間で一意に存在する。さらに、写像 $u_0 \mapsto u$ は $H^s \to C([-T,T]; H^{s-1})$ の写像として連続。

2　証明の概略

証明の鍵は、$u(t,x) = a(t,x)e^{i\phi(t,x)}$ と書いて,

$$\begin{cases} i\partial_t a + \frac{1}{2}\Delta a = -i\left(\nabla\phi \cdot \nabla a + \frac{1}{2}a\Delta\phi\right), & a(0) = u_0, \\ \partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \lambda P = 0, & \phi(0) = 0, \\ -\Delta P = |a|^2, & \end{cases}$$

というシステムに直すことである。今、正の時間のみを考える。$\partial_t a$ を含む第一方程式の線型部は Schrödinger 方程式であり、非線型項は第 2 式の Hamilton-Jacobi 方程式に移っている。このシステムを解くことで $a \in C([0,T];H^s)$ と $\phi \in C([0,T];C^2)$ が得られる。$s > 2$ という仮定はこの際に $H^{s-1} \hookrightarrow L^\infty$ $(s > 2)$ という埋め込みを用いるために現れる。

上でも注意したように $a(t) \in H^s \subset L^2 \cap L^\infty$ の下で一般に P は非有界である。このことから、ϕ も非有界になってしまうが、$u = ae^{i\phi}$ という表示からこれは問題でない。さらに ϕ の空間方向の微分の性質 (特に空間遠方での減衰) を調べることで $u \in C([0,T];H^s)$ が分かる。ここで u_t を考えると、$\partial_t\phi$ という非有界な項が現れるため、$u_t \notin H^s$ である。しかしこの事実が、非有界な非線型項をもつにも関わらず (SP) が満たされていることに対応する。

注意 2.1. 解の局所存在だけならば $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *(*$s > 1$*)* であれば十分。

注意 2.2. 長時間挙動は分かっていない。L^2-保存則とモーメントの保存則は成立するものの、考えている解のクラスで一般にエネルギーは有界ではない。実際に、もし $W(t) = \int(\log|x|)|u(t,x)|^2dx$ という量が有界であるならば、$v(t,x) := u(t,x)\exp(-i\lambda\int_0^t W(s)ds)$ とおくと、v は

$$i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = \lambda\left(\int(\log|x-y|)|v(y)|^2\right)v, \qquad v(0,x) = u_0(x).$$

の解であるので、

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla v(t)\|_{L^2} + \frac{\lambda}{2}\iint(\log|x-y|)|v(t,y)|^2|v(t,x)|^2dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2} + \frac{\lambda}{2}\iint(\log|x-y|)|u(t,y)|^2|u(t,x)|^2dy\,dx \end{aligned}$$

は *(*有界な量であって*)* 保存することがわかる。

注意 2.3. 方程式 (SP) にプランク定数に相当するパラメータ h を入れた方程式

$$ih\partial_t u^h + \frac{h^2}{2}\Delta u^h = \lambda P^h u^h, \qquad -\Delta P^h = |u^h|^2, \qquad u^h(0,x) = u_0^h(x).$$

の解 u^h に対して、*WKB* 型の近似 $u^h = e^{i\phi_0/h}(a_0 + ha_1 + \cdots + h^N a_N + o(h^N))$ $(h \to 0)$ も同様に示すことができる。しかし、3 次元以上の場合 *[1, 2]* とは大きく異なり、近似は空間局所的にしか成立しない。これは各 a_j *(*$j \geq 1$*)* が非有界なものになってしまうからである。これも、P が遠方で発散していることと関わっている。より具体的には、$u^h = a^h e^{i\phi^h/h}$ という形の解を定理 *1.1* と同じ方法で得た後に、a^h, ϕ^h の h に関するべき級数展開を適用することで上の a_j を決めるが、その際に ϕ^h の h^j 次部分 $\widetilde{\phi}_j$ はすべての j について一般に非有界となってしまうのである。したがって、a_j を決めるために用いる *Taylor* 展開 $e^{ih^j\widetilde{\phi}_{j+1}} = 1 + h^j\widetilde{\phi}_{j+1} + o(h^j)$ の際に *(*左辺は有界にも関わらず*)* 右辺に非有界な $\widetilde{\phi}_{j+1}$ がそのまま表れてしまう。

参考文献

[1] T. Alazard and R. Carles, *Semi-classical limit of Schrödinger–Poisson equations in space dimension* $n \geq 3$, J. Differential Equations **233** (2007), no. 1, 241–275.

[2] R. Carles and S. Masaki, *Semiclassical analysis for Hartree equations*, Asymptotic Analysis **58** (2008), no. 4, 211–227.

[3] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.

[4] P. Zhang, *Wigner measure and the semiclassical limit of Schrödinger-Poisson equations*, SIAM J. Math. Anal. **34** (2002), no. 3, 700–718 (electronic).

ABP type estimates for nonlinear elliptic systems

中川　和重 (なかがわ　かずしげ)
埼玉大学大学院 理工学研究科 理工学専攻
E-mail: knakagaw@rimath.saitama-u.ac.jp

1　導入

本講演では完全非線形二階楕円型方程式のシステムに対する L^p 粘性解を用いた regularity 理論の最初の段階である ABP 型の最大値原理について考察していく．

完全非線形二階一様楕円型方程式に対する粘性解の regularity 理論に関しては Caffarelli [C] による結果がある．その後，方程式が可測である場合に適用できる L^p 粘性解の概念が Caffarelli-Crandall-Kocan-Święch[CCKS] によって導入されその理論が整備された．L^p 粘性解は強解の一般化であると考えられ，係数が冪乗可積分関数の場合でも強解のときに得られた結果が得られることが期待される．ABP 最大値原理については一階微分の項が一次又はそれ以上の増大度を持つ extremal 方程式について Koike-Święch[KS2] により示され，増大度が一次及びそれ以上の両方の増大度を持つ extremal 方程式についてはN[N] によって示されている．さらに regularity 理論の次のステップとなる弱 Harnack 不等式などについては Koike-Święch[KS3] によって行われている．また，L^p 粘性解の弱解としての適切な位置づけが Koike-Święch[KS3] により [N] の結果を用いることによって示されている．

完全非線形二階楕円型方程式のシステムについては粘性解を用いて Ishii('91)，Ishii-Koike('91) などによる存在性などについての結果があり，近年，Busca-Sirakov[BS] らによって一階微分項が定数係数であるシステムにおいて L^p 粘性解を用いた ABP 最大値原理や Harnack 不等式が証明されている．そこで今回は，一階微分項が冪乗可積分関数のような (非有界な) 変数係数をもつシステムにおいて ABP 最大値原理が成立することが期待される．

2　主結果

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ に対し，次のシステム;

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P}^-(D^2u_i) - \mu_i(x)|Du_i| - c_i(x, u_1, \ldots, u_\ell) = f_i(x) & \text{in } \Omega \\ & i = 1, \cdots, \ell. \end{array} \right. \tag{1}$$

を考える．いま，S^n を $n \times n$ 次実対称行列全体とし，一様楕円定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$ に対し，$S^n_{\lambda,\Lambda} := \{A \in S^n \ ; \ \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$ とおく．さらに，$q \geq p > n/2$, $q > n$ に対し，$f_i \in L^p_+(\Omega)$, $\mu_i \in L^q_+(\Omega)$ とする．ここで $L^p_+(\Omega)$ は非負な $L^p(\Omega)$ の元全体とする．簡単のため，スケーリングと平行移動により $\Omega \subset B_1(0)$ とする．さらに，殆ど至るところの $x \in \Omega$ とすべての $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対し

$$c_i(x, 0, \ldots, 0) = 0$$

としても一般性を失わない．

ここで，システムに対し次の仮定をする．

(H0) $c(x,u)$ は $u \in \mathbb{R}^l$ に対して Lipschitz 連続 (Lipschitz 定数は ν) で，ある Lebesgue null set $\mathcal{N} \subset \Omega$ に対し $x \in \Omega \backslash \mathcal{N}$ で一様である．

(H1) 成分ごとに $u \geq v$ となる任意の $u, v \in \mathbb{R}^\ell$ と，$u_j = v_j$ となる任意の $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対し次をみたす．

$$c_j(x,u) \geq c_j(x,v) \quad \text{for } a.e. x \in \Omega.$$

定理 2.1. *(H0), (H1)* および，

$$n \leq p \leq q, \ n < q$$

を仮定する．さらに，つぎのどちらかを仮定する．

(H2): すべての $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial c_i}{\partial u_j}(x,u) \leq 0 \quad a.e. in\ \Omega \times \mathbb{R}^\ell.$$

または，

(H3)：$\bar{m}_{ij} := \sup_{(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell} ess. \dfrac{\partial c_i}{\partial u_j}(x,u)$ $(\bar{m}_{ij} \leq \nu < \infty)$ とおくとき，$\bar{M} := (\bar{m}_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ は *negative semi-definite* である．

このとき，もし $u = (u_1, \ldots, u_\ell) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^\ell)$ が *(1)* の L^p 粘性劣解ならば *ABP* 型の最大値原理が成立する．*i.e.* $C > 0$ に対して

$$\sup_{\Omega}(u_1 \vee \ldots \vee u_\ell) \leq C \left(\sup_{\partial\Omega}(u_1 \vee \cdots \vee u_\ell) + \|f_1 \vee \cdots \vee f_\ell\|_{L^n(\Omega)} \right).$$

注意 2.2. 次の組がそれぞれ *(H2), (H3)* をみたす例である．

$$\begin{cases} c_1(x,u) &= a(x)(u_1 - u_2), \\ c_2(x,u) &= a(x)^{-1}(-u_1 + u_2), \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1(x,u) &= -2u_1 + 3\arctan u_2, \\ c_2(x,u) &= \arctan u_1 - 2u_2. \end{cases}$$

ここで，$a(x)$ は Ω から $[1/2, 2]$ への連続関数とする．

注意 2.3. *(H1)* を仮定しないシステムでは *ABP* 最大値原理は一般には成立しない．たとえば，次のシステムを $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ 上で考える．

$$\begin{cases} -\triangle u + v &= 0 \\ -\triangle v &= 0. \end{cases}$$

このとき，$u = 1 - |x|^2$, $v = -2n$ とすると *ABP* 最大値原理は成立しないことがわかる．

参考文献

[BS] Busca, J., and B. Sirakov, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire* **21** (2004).

[C] Caffarelli, L. A., *Ann. Math.* **130** (1989).

[CCKS] Caffarelli, L. A., M. G. Crandall, M. Kocan, and A. Święch, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996).

[KS2] Koike, S., and A. Święch, function method, *Math. Ann.*, **339** (2007).

[KS3] Koike, S., and A. Święch, to appear in *J. Math. Soc. Japan*

[N] Nakagawa, K., to appear in *Adv. Math. Sci. Appl.*

移流拡散方程式の解の漸近展開について

山本征法 (東北大学大学院理学研究科)

ここでは, 荷電粒子の密度解析に由来する移流拡散方程式の Cauchy 問題を考える.

$$
\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \psi = -u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1}
$$

ただし, $\partial_t := \partial/\partial t,\ \partial_j := \partial/\partial x_j,\ \Delta := \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2,\ \nabla := (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ である. 移流拡散方程式は荷電粒子の密度分布の解析モデルに由来する方程式であり, 未知函数 $u = u(t,x), \psi = \psi(t,x)$ はそれぞれ, 電荷の密度, 静電場のポテンシャルを表す. 移流拡散方程式は, 電荷が静電場の移流効果を受けながら拡散する様子を表す方程式であり, その解の性質は線形拡散効果と非線形相互作用とのバランスによって決定する. 移流拡散方程式とよく似た非線形相互作用の構造をもつ拡散方程式としては, 流体の運動に関連した convection-diffusion 方程式, 細胞性粘菌の走化性を記述した Keller-Segel 方程式, 非圧縮性粘性流体の運動を記述した Navier-Stokes 方程式がある. これらの方程式の解の時間大域挙動については, はじめ convection-diffusion 方程式について, 解の漸近挙動が調べられている ([2]). Navier-Stokes 方程式については, 解の漸近形がシンプルな形で得られることが知られている ([1, 3]). Keller-Segel 方程式については, 解の高次の漸近展開に Navier-Stokes 方程式の場合には見られない特殊な補正項が現れることが示されている ([4, 7]). 特に, 空間次元が偶数の場合には, この補正項が, 対数函数のオーダーで減衰することが示されている ([9]). 一方, 空間次元が奇数の場合には, 漸近形に現れる項は全て多項式オーダーで減衰する. 移流拡散方程式については, 大きな初期値に対する解の時間大域存在と減衰が知られている ([5, 6]). また, 解の 2 次漸近形に特別な補正項が現れることを既に示した ([8]). ここでは, 移流拡散方程式の解のより高次の漸近形を導出し, 特に, 2 次漸近形に表れた補正項が, 高次漸近形に及ぼす影響について考える. はじめに, 解の減衰評価について考える. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3),\ 1 \leq p \leq \infty,\ \gamma := \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ に対して, 次の評価が知られている:

$$
\|u(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\gamma}, \quad t > 0. \tag{2}
$$

この証明にはエネルギー評価を用いる ([5, 8]). 特に, 解の L^1 ノルムは保存する. なお, u が (2) を満たすことから, Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を用いて, $\nabla\psi$ の評価が得られる. すなわち, $3 < p < \infty,\ \gamma := \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ に対して, 次の評価が成り立つ:

$$
\|\nabla \psi(t)\|_p \leq C \|u(t)\|_{3p/(3+p)} \leq C(1+t)^{-\gamma+1/2}, \quad t > 0.
$$

次に, 解の $t \to \infty$ での漸近展開を考える. はじめに, Cauchy 問題 (1) は次の積分方程式と同値であることに注意する ([6]).

$$
u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \cdot (u \nabla (-\Delta)^{-1} u)(s) ds, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3.
$$

ただし, $G(t,x) := (4\pi t)^{-3/2} e^{-|x|^2/(4t)},\ e^{t\Delta}\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^3} G(t, x-y)\varphi(y) dy$ である. さらに, 次の函数を導入する.

$$V_0(t,x) := G(t,x)\int_{\mathbb{R}^3} u_0(y)dy, \quad V_1(t,x) := -\nabla G(t,x)\cdot\int_{\mathbb{R}^3} yu_0(y)dy,$$

$$J(t,x) := \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\cdot\left(V_0\nabla(-\Delta)^{-1}V_0\right)(s)ds, \tag{3}$$

$$K(t,x) := \frac{1}{3}\log(1+t)\Delta G(t,x)\int_{\mathbb{R}^3} y\cdot\left(V_0\nabla(-\Delta)^{-1}J + J\nabla(-\Delta)^{-1}V_0\right)(1,y)dy,$$

ここで, $\lambda > 0$ に対して, J が次のスケール保存則を満たすことに注意する.

$$\lambda^4 J(\lambda^2 t, \lambda x) = J(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^3.$$

以上で定めた函数と, Cauchy 問題 (1) の解について, 次の評価が成り立つ.

定理. $u_0 \in L^1_2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty_1(\mathbb{R}^3)$ とする. u を (1) の解とし, V_0, V_1, J, K を (3) で定める. このとき, $1\le p\le\infty,\ \gamma := \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\left\|u(t)-V_0(1+t)-V_1(1+t)-J(1+t)-K(1+t)\right\|_p\\ =&o\left(t^{-\gamma-1}\log(2+t)\right) \quad \text{as} \quad t\to\infty.\end{aligned}$$

また, $\int_{\mathbb{R}^3} u_0(y)dy \neq 0$ のとき, $J, K \not\equiv 0$ が成り立つ.

ただし, $L^p_m(\mathbb{R}^3) := \left\{\varphi\in L^p(\mathbb{R}^3)\ \middle|\ |x|^m\varphi\in L^p(\mathbb{R}^3)\right\}$ である. 定理を証明するために, 次の補題を用いる. まず, $L^p_1(\mathbb{R}^3)$ における解の挙動については, 次の評価が得られる.

命題 1. $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty_1(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき $1\le p\le\infty,\ \gamma := \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ として, 次が成り立つ: $\|xu(t)\|_p \le C(1+t)^{-\gamma+\frac{1}{2}}$.

また, 解の低階の漸近展開については, 次の評価を示すことが出来る.

命題 2. 定理と同じ条件のもとで次が成り立つ:

$$\|u(t)-V_0(1+t)-V_1(1+t)-J(1+t)\|_p \le C(1+t)^{-\gamma-1}\log(2+t).$$

定理に現れる漸近形と比較すると, 命題 2 の評価は本質的であることが分かる.

References

[1] Carpio, A., SIAM J., Math. Anal. **27** (1996), 449-475.
[2] Escobedo, M., Zuazua, E., J. Funct. Anal. **100** (1991), 119-161.
[3] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 523-544.
[4] Kato, M., Differential Integral Equations **22** (2009), 35-51.
[5] Kawashima, S., Kobayashi, R., Funkcial. Ekvac. **51** (2008), 371-394.
[6] Kurokiba, M., Ogawa, T., J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1052-1067.
[7] Nagai, T., Yamada, T., J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 704-726.
[8] Ogawa, T., Yamamoto, M., Math. Models Methods Appl. Sci., **19** (2009), 939-967.
[9] Yamada, T., *Higher-order asymptotic expansions for a parabolic system modeling chemotaxis in the whole space,* to appear in the Hiroshima Math. J.

宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉６番３号
E-mail address: sa5m27@math.tohoku.ac.jp

On smoothing effect for higher order curvature flow equations

浅井　智朗 (あさい ともろう)

東京大学大学院・数理科学研究科・数理科学専攻 D1

E-mail: tasai@ms.u-tokyo.ac.jp

1　導入

本講演では，表面拡散流方程式

$$\begin{cases} V = -\Delta_{\Gamma(t)} H_{\Gamma(t)}, \quad t > 0 \\ \Gamma(0) = \Gamma_0 \end{cases} \tag{1}$$

と Willmore 流方程式

$$\begin{cases} V = -\Delta_{\Gamma(t)} H_{\Gamma(t)} - \dfrac{1}{2} H^3_{\Gamma(t)} + 2 H_{\Gamma(t)} K_{\Gamma(t)}, \quad t > 0 \\ \Gamma(0) = \Gamma_0 \end{cases} \tag{2}$$

を満たしながら成長する曲面 $\Gamma = \{\Gamma(t); t > 0\}$ の一意存在について考察する．ここで，V は曲面 $\Gamma(t)$ の法速度，$H_{\Gamma(t)}, K_{\Gamma(t)}$ はそれぞれ $\Gamma(t)$ の平均曲率とガウス曲率，$\Delta_{\Gamma(t)}$ は Laplace-Beltrami 作用素と呼ばれる曲面上の Laplacian を表す．

より正確に述べると，平面上の曲線の場合について，曲率が不連続な特異性を許容する初期曲線に対して，局所解が一意存在することを示した．さて，平面上の曲線の場合に，Γ が $\Gamma(t) = \{(x, y); y = w(x, t)\}$ と関数 w のグラフで表示されているとする．初期曲線 Γ_0 は $\Gamma_0 = \{(x, y); y = w_0(x)\}$ と表わされていることとする．すると，表面拡散流は，

$$w_t = -\frac{1}{(1+w_x^2)^2} w_{xxxx} + \frac{10 w_x w_{xx} w_{xxx}}{(1+w_x^2)^3} + \frac{3 w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^3} - \frac{18 w_x^2 w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^4}, \tag{3}$$

Willmore 流は，

$$w_t = -\frac{1}{(1+w_x^2)^2} w_{xxxx} + \frac{10 w_x w_{xx} w_{xxx}}{(1+w_x^2)^3} + \frac{3 w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^3} - \frac{18 w_x^2 w_{xx}^3}{(1+w_x^2)^4} - \frac{w_{xx}^3}{2(1+w_x^2)^4}, \tag{4}$$

となる．

2　主結果

定理 2.1. $w_0 \in h^{1+4\theta}(\mathbf{R})\,(0 < \theta < 1/4)$ ならば，ある $T > 0$ が存在して $w \in C([0,T]; BC^1(\mathbf{R})) \cap C^1((0,T]; BC^1(\mathbf{R})) \cap C((0,T]; BC^5(\mathbf{R}))$ となる表面拡散流方程式 (3) の解 w が一意存在する．さらに，w は次を満たす．

$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C_{1-\theta}((0,T]; BC^4(\mathbf{R})) \cap B_1((0,T]; C^{4+4\theta}(\mathbf{R}));$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C^{\theta}([0,T]; BC(\mathbf{R})) \cap B([0,T]; C^{4\theta}(\mathbf{R})).$$

定理 2.2. $w_0 \in h^{1+4\theta}(\mathbf{R})\,(0 < \theta < 1/4)$ ならば，ある $T > 0$ が存在して $w \in C([0,T]; BC^1(\mathbf{R})) \cap C^1((0,T]; BC^1(\mathbf{R})) \cap C((0,T]; BC^5(\mathbf{R}))$ となる *Willmore* 流方程式 (4) の解 w が一意存在する．さらに，w は次を満たす．

$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C_{1-\theta}((0,T]; BC^4(\mathbf{R})) \cap B_1((0,T]; C^{4+4\theta}(\mathbf{R}));$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \in C^{\theta}([0,T]; BC(\mathbf{R})) \cap B([0,T]; C^{4\theta}(\mathbf{R})).$$

表面拡散流と Willmore 流の局所解の一意存在に関する先行結果については [2], [3] がある．[2], [3] における初期曲面の滑らかさの仮定は $h^{2+\beta}$ $(0 < \beta < 1)$ である．つまり，曲率が Hölder 連続であって，かつ，それが滑らかな関数の近似となっているクラスである．一方，本研究では，$h^{1+4\theta}$ $(0 < \theta < 1/4)$ という曲率が不連続であるような特異点が生じているクラスの初期曲線に対しても局所解が存在することを示したのである．

証明. まず抽象準線形放物型方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = A(U)U + G(U), \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{5}$$

に対する局所解の一意存在を証明する．この証明には [1] の線形方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = \Lambda u(t) + f(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

に対する結果を用いる．ただし，X を Banach 空間とし，$\Lambda : D(\Lambda) \subset X \to X$ は X で解析半群を生成する．また，実補間空間

$$D_\Lambda(\theta, \infty) = \{x \in X; \sup_{t>0} t^{1-\theta} \|\Lambda e^{t\Lambda} x\| < \infty\},$$
$$D_\Lambda(\theta) = \{x \in D_\Lambda(\theta, \infty); \lim_{t \to 0} t^{1-\theta} \|\Lambda e^{t\Lambda} x\| = 0\}$$

の性質をうまく使う．この結果を適用することにより (3),(4) の局所解の一意存在を示す． □

参考文献

[1] A. Buttu, On the Evolution Operator for a Class of Non-autonomous Abstract Parabolic Equations. J. Math. Anal. Appl., **170** (1992), 115-137.

[2] J. Escher, U. F. Mayer, G. Simonett, The surface diffusion flow for immersed hypersurfaces. SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 1419-1433.

[3] G. Simonett, The Willmore flow near spheres. Differential Integral Equations, **14** (2001), 1005-1014.

トーラス上の高階次分散型方程式の時間局所適切性について

平山　浩之（名古屋大学大学院多元数理科学研究科　Ｍ２）

１次元トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の高階次非線型分散型方程式

$$\text{（D）}\begin{cases} \partial_t u + (-1)^{k+1}\partial_x^{2k+1}u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T} \\ u(0,x) = \phi(x), & \phi \in \tilde{H}^s(\mathbb{T}) \end{cases}$$

を考える．ここで $k \in \mathbb{N}$ であり,

$$\tilde{H}^s(\mathbb{T}) := \{f \in H^s(\mathbb{T}) | \hat{f}(0) = 0\}$$

である．方程式（D）の時間局所適切性について考える．方程式（D）が時間局所適切であるとは, 初期値 $\phi \in H^s(\mathbb{T})$ に対してある正定数 $T > 0$ が存在し, 次を満たすことである．

1. 時間区間 $[0,T]$ において方程式（D）を満たす関数 u が存在する．
2. 時間区間 $[0,T]$ において解 u は一意的である．
3. 任意の $t \in [0,T]$ に対して $u(t) \in \tilde{H}^s(\mathbb{T})$ である．
4. 写像 $\phi \mapsto u$ は連続である．

方程式（D）において, $k = 1$ のときは浅水波をモデル化した KdV 方程式であり, 様々な研究がなされている．[1] において Bourgain により導入されたフーリエ制限ノルム法という手法を用いることで, [2], [3] において $k = 1$ のとき $s \geq -\frac{1}{2}$ において方程式（D）が時間局所適切であることが示された．本講演における主結果は, $k \geq 2$ のときの時間局所適切性について得られた次の結果である．

主定理 1. $k \geq 2$ のとき, 方程式（D）は $s \geq -\frac{k}{2}$ において時間局所適切である．

この結果は $k = 1$ とすると既存の結果に一致しており, [2], [3] における結果の拡張となっている．特に $k = 2$ のときは, プラズマ中の磁気音波の理論などにおいて現れる Kawahara 方程式の特別な場合であり, 物理的にも意味のある方程式である．

時間局所適切性を示すために, 方程式（D）を積分方程式

$$u(t) = U(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t U(t-t')\partial_x(u(t')^2)dt'$$

$$\text{ただし}, U(t)f := \mathcal{F}_n^{-1}[e^{in^{2k+1}t}\hat{f}]$$

に変形する．u から積分方程式右辺への写像が適当なバナッハ空間上の縮小写像であることを示すことができれば, 不動点定理から一意的な時間局所解を得ることができる．まず小さい初期値に対して（D）の一意解の存在を示し, 大きい初期値に対してはスケール変換により初期値を小さくすることで, 小さい初期値の場合に帰着させる．しかし, スケール変換の際に空間変数の周期が変化してしまうので, 空間変数に対して一般の周期を持つ関数についての議論が必要となる．

定義 1. 関数空間 Y_λ を,

$$Y_\lambda := \left\{ F : \mathbb{R} \times \mathbb{T}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} F(x, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (x \in \mathbb{T}_\lambda) \\ \text{写像}\, x \mapsto F(x, \cdot)\, \text{は}\, C^\infty \text{級である.} \\ \tilde{F}(\tau, 0) = 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

により定め, $X_{s,b,\lambda}$ を,

$$||F||_{X_{s,b,\lambda}} := ||\langle \tau - n^{2k+1} \rangle^b |n|^s \tilde{F}||_{l_n^2(\lambda) L_\tau^2}$$

により定まるノルムにより Y_λ を完備化した空間とする. ただし, $\mathbb{T}_\lambda := \mathbb{R}/(2\pi\lambda)\mathbb{Z}$ であり,

$$||f||_{l_n^2(\lambda)} = \left(\int_{\mathbb{Z}_\lambda} |f(n)|^2 dn \right)^{\frac{1}{2}} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| f\left(\frac{n}{\lambda}\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

である. また, $\tilde{F}$ は F の時間および空間におけるフーリエ変換である.

本講演では, 定理 1 を示すために重要な役割を果たす次の双線型評価式（定理 2）およびその反例（定理 3）について詳しく述べる.

定理 2. $\lambda \geq 1$ とする. $k \geq 2$ のとき, 任意の $s \in \left[-\frac{k}{2}, 0\right]$ に対して, ある $0 < \epsilon < 2k + s$ が存在して,

$$||\partial_x(uv)||_{X_{s,-\frac{1}{2},\lambda}} \lesssim \lambda^\epsilon ||u||_{X_{s,\frac{1}{2},\lambda}} ||v||_{X_{s,\frac{1}{2},\lambda}}$$

が成立する.

定理 3. $k \geq 2$ のとき, 任意の $s < -\frac{k}{2}$ に対して, 双線型評価式

$$||\partial_x(uv)||_{X_{s,b-1,1}} \lesssim ||u||_{X_{s,b,1}} ||v||_{X_{s,b,1}}$$

が成立するような $b \in \mathbb{R}$ は存在しない.

定理 3 の証明のポイントは, 双線型評価式の左辺が大きくなる周波数領域に台を持つ関数を反例として考えたことである. これにより導かれた結果から, 双線型評価式が成立するための指数 s の必要条件を得ることができる.

参考文献

[1] J.Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations,* GAFA.**3**(1993),107-156, 209-262.

[2] C.Kenig, G.Ponce and L.VEGA, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation,* J. Amer. Math. Soc.**9** (1996), 573-603.

[3] J.Colliander, M.Keel, G.Staffilani, H.Takaoka and T.Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{T}$*,* preprint(2001).

非線形境界条件をもつ放物型方程式の解の爆発について

原田 潤一 (はらだ じゅんいち)

早稲田大学 先進理工学研究科物理学及び応用物理学専攻 D3

E-mail: t-tsuku@suou.waseda.jp

次の非線形境界条件を持つ放物型方程式の解の爆発について考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - a|u|^{p-1}u & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_\nu u = |u|^{q-1}u & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域, $p, q > 1$, $a > 0$ とする．特に本講演では, 臨界指数 ($p = 2q-1$ かつ $a = q$) の場合を考察する．方程式 (1) の解の爆発, 大域解の存在については [2]([3]) を始めとして, [1], [4] などで調べられている．$p > 2q-1$ または $p = 2q-1$, $a > q$ の場合には, (1) の全ての解は大域的で一様有界となり, $p < 2q-1$ または $p = 2q-1$, $a < q$ の場合には有限時間で爆発する解の存在が知られている (a, p, q の値によっては大域解が存在する場合もある). 特に, 臨界指数 ($p = 2q-1$ かつ $a = q$) の場合については $n = 1$ に限って, 全ての正値解は大域的であり, 次の一意特異正値解に収束することが知られている [2].

$$\phi'' = q\phi^{2q-1} \ \text{ in } (-1,1), \ \ \phi(\pm 1) = +\infty.$$

一般の空間次元に対して, 我々は次の結果を得ることができた.

定理 1 ($n \geq 2$)**.** $p = 2q-1$, $a = q$ とする．このとき全ての正値解は有限時間で爆発する.

ここで $v = u^{-(q-1)}$ と新しい未知関数を導入する．このとき, 正値球対称解 v は次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} v_t = v'' + \dfrac{n-1}{r}v' + \dfrac{q}{(q-1)v}\left((q-1)^2 - |v'|^2\right), \ \ 0 < r < R, \ t > 0, \\ v'(0,t) = 0, \ v'(R,t) = -(q-1), \ \ t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

このとき, (1) の解 u が爆発することは, (2) の解 v が 0 を達成することと同等である．正値球対称解に限っては u が有限時刻で爆発するとき, 解 v は以下の (3) を満たすある関数 v_∞ に収束することがわかる.

$$|v_\infty(r) - (q-1)(R-r)| \leq C(R-r)^2. \tag{3}$$

(1) の定常問題に対する一意特異正値解を ψ とする時 ($\Delta\psi = q\psi^{2q-1}$ in B_R, $\psi = +\infty$ on ∂B_R), (3) は ψ を使って次のようにも書くことができる:

$$|v_\infty(r) - \psi(r)^{-(q-1)}| \leq C(R-r)^2,$$

ここで, $\psi(r)^{-(q-1)}$ は (2) の定常問題に対する正値定常解である.

定理 2. 正値球対称解 u が有限時刻 T で爆発するとする．このとき, (3) を満たすある関数 $v_\infty \in C[0,R] \cap C[0,R)$ が存在して,

$$v(r,t) \to v_\infty(r) \ \ \text{uniformly on } [0,R] \text{ as } t \to T-0.$$

更に, 初期値が $u_0'(r) \leq u_0(r)^q$ を満たしているならば, 上の収束は $W^{2,\infty}(0,R)$ の位相にとれる.

最後に, 臨界指数 ($n \geq 2$) の場合の大域解についての考察を行う. Theorem 1 より, 大域解は符号変化する解であることに注意する.

定理 3 ($n \geq 2$, $\Omega = B_R$)**.** 全ての球対称大域解は時間無限大で 0 に収束する.

臨界指数の場合に (1) は 0 以外の定常解を持たないため, Theorem 3 を示すことは, 大域解に対する有界性を示すことと等価となる.

証明の概略

(**定理 1**) まずは球対称解を仮定して, 上で導入した未知関数 v が有限時刻で 0 に達成することを示す. 特に, (2) より境界上 $r = R$ において解 v は次を満たす:

$$v_t(R, t) = v''(R, t) - \frac{(n-1)(q-1)}{R}.$$

実はこのとき, v' の挙動を調べることにより (比較定理を用いる), $v''(R, t) \leq 0$ となることがわかる. これより直ちに v が有限時間で 0 を達成することがわかる. 一般領域の場合には, 球対称解を比較関数として用いることにより有限時間爆発が示される.

(**定理 2**) 具体的に比較関数を構成することにより定理は示される. 特に, (2) の右辺の最後の項が $1/v$ という因子を含んでいることに注意する.

(**定理 3**) 定理を示すには, 大域解の有界性を示せばよい. これは背理法によって示される. 非有界な大域解を仮定すると, 実はある時刻で解は正値になることがわかる. しかし定理 1 により, この解は有限時刻で爆発してしまう. よって矛盾が導かれ大域解の有界性が得られる. 上の議論において, 次の定常解の族 $\{w_\eta\}_{\eta>0}$ の性質を調べることが鍵となる.

$$w''_\eta + \frac{n-1}{r} w'_\eta = q w_\eta^{2q-1} \ \text{ in } (0, R), \ w(R) = \eta, \ w'(R) = \eta^q.$$

参考文献

[1] F. Andreu, J. M. Mazón, J. Toledo, J. D. Rossi, Porous medium equation with absorption and a nonlinear boundary condition, Nonlinear Anal. TMA **49** (2002) 541-563.

[2] M. Chipot, M. Fila, P. Quittner, Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, Acta Math. Univ. Comenianae **60** (1991) 35-103.

[3] J. López Gómez, V. Márquez, N. Wolanski, Dynamic behavior of positive solutions to reaction-diffusion problems with nonlinear absorption through the boundary, Rev. Unión Mat. Argent. **38** (1993) 196-209.

[4] A. Rodríguez-Bernal, A. Tajdine, Nonlinear balance for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions: dissipativity and blow-up, J. Differential Equations **169** (2001) 332-372.

DECAY PROPERTY FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF VISCOELASTIC MATERIALS

P.M.N. DHARMAWARDANE

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY
FUKUOKA 812-8581, JAPAN

We consider the following second order hyperbolic systems with dissipation:

$$u_{tt} - \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j,k=1}^{n} K^{jk} * u_{x_j x_k} + L u_t = 0 \tag{1}$$

with the initial data

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x). \tag{2}$$

Here the unknown u is an m-vector function of $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ and $t \geq 0$, B^{jk} are $m \times m$ real constant matrices satisfying $(B^{jk})^T = B^{kj}$, $K^{jk}(t)$ are smooth $m \times m$ real matrix functions of $t \geq 0$ satisfying $K^{jk}(t)^T = K^{kj}(t)$, and L is an $m \times m$ real constant matrix; the symbol "$*$" denotes the convolution with respect to t. The system (1) is a model system of viscoelasticity.

We introduce the symbols of the differential operators:

$$B_\omega = \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk} \omega_j \omega_k, \qquad K_\omega(t) = \sum_{j,k=1}^{n} K^{jk}(t) \omega_j \omega_k,$$

where $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in S^{n-1}$. Notice that B_ω and $K_\omega(t)$ are real symmetric matrices. We impose the following structural conditions.

- **[A1]** B_ω is real symmetric and positive definte, $K_\omega(t)$ is real symmetric and non-neagtive definite, and L is real symmetric and nonnegative definite.
- **[A2]** $B_\omega - \mathcal{K}_\omega(t)$ is real symmetric and positive definte uniformlly in $t \geq 0$, where $\mathcal{K}_\omega(t) = \int_0^t K_\omega(s)ds$.
- **[A3]** $K_\omega(0) + L$ is real symmetric and positive definite.
- **[A4]** There are positive constants C_0 and c_0 such that $-C_0 K_\omega(t) \leq K'_\omega(t) \leq -c_0 K_\omega(t)$ and $-C_0 K_\omega(t) \leq K''_\omega(t) \leq C_0 K_\omega(t)$, where $K'_\omega(t) = \partial_t K_\omega(t)$ and $K''_\omega(t) = \partial_t^2 K_\omega(t)$.

We are interested in the decay property of the system (1).

Theorem 1 (Decay estimate)**.** *Under the conditions* [A1]–[A4]*, the solution u to the problem* (1), (2) *satisfies the decay estimate*

$$\begin{aligned} &\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^2} + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^2} \\ &\leq C(1+t)^{-n/4-k/2}\|u_1\|_{L^1} + C(1+t)^{-n/4-k/2-1/2}\|u_0\|_{L^1} \\ &+ Ce^{-ct}(\|\partial_x^k u_1\|_{L^2} + \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Theorem 2 (Energy estimate). *Under the conditions* [A1]–[A4], *the solution to the problem* (1), (2) *satisfies the energy estimate*

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^1}^2 + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|\partial_x^{k+1} u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^{k+2} u(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau$$
$$\le C(\|\partial_x^k u_1\|_{H^1}^2 + \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{H^1}^2).$$

Note that there is no regularity-loss in the decay estimate and the energy estimate stated in Theorems 1 and 2, respectively. This shows that the dissipative property of the system (1) is of the standard type.

Next we consider the following modifications of the system (1):

$$u_{tt} - \sum_{j,k=1}^n B^{jk} u_{x_j x_k} + (1-\Delta)^{-\theta/2} \sum_{j,k=1}^n K^{jk} * u_{x_j x_k} + L u_t = 0, \tag{3}$$

$$u_{tt} - \sum_{j,k=1}^n B^{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j,k=1}^n K^{jk} * u_{x_j x_k} + (1-\Delta)^{-\theta/2} L u_t = 0, \tag{4}$$

where $\theta > 0$ is a parameter. The introduction of the operator $(1-\Delta)^{-\theta/2}$ weakens the dissipation and this gives the following weaker decay estimate.

Theorem 3 (Decay estimate). *Under the conditions* [A1]–[A4], *the solution u to the problem* (3) (*or* (4)), (2) *satisfies the decay estimate*

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^2} + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^2}$$
$$\le C(1+t)^{-n/4-k/2} \|u_1\|_{L^1} + C(1+t)^{-n/4-k/2-1/2} \|u_0\|_{L^1}$$
$$+ C(1+t)^{-l/\theta} (\|\partial_x^{k+l} u_1\|_{L^2} + \|\partial_x^{k+l+1} u_0\|_{L^2}).$$

Theorem 4 (Energy estimate). *Under the conditions* [A1]–[A4], *the solution u to the problem* (3) (*or* (4)), (2) *satisfies the energy estimate*

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{1+\theta/2}}^2 + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{H^{1+\theta/2}}^2 + \int_0^t \|\partial_x^{k+1} u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^{k+2} u(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau$$
$$\le C(\|\partial_x^k u_1\|_{H^{1+\theta/2}}^2 + \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{H^{1+\theta/2}}^2).$$

Note that we have the regularity-loss in the decay estimate in Theorem 3. A similar regularity-loss occurs also in the energy estimate in Theorem 4. This means that the dissipative property of the systems (3) and (4) is of the regularity-loss type. Such a regularity-loss property was also observed for other intersting systems. See the references below.

References

[1] T. Hosono and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type and application to some nonlinear hyperbolic-elliptic system, Math. Models Meth. Appl. Sci., **16** (2006), 1839-1859.

[2] K. Ide, K. Haramoto and S. Kawashima, Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system, Math. Models Meth. Appl. Sci., **18** (2008), 647-667.

Modulation 空間における Navier-Stokes 方程式の解の存在定理について

岩渕 司

東北大学大学院理学研究科 数学専攻 博士課程後期 2 年

E-mail: `sa6m05@math.tohoku.ac.jp`

本講演では次の Navier-Stokes 方程式の初期値問題を Modulation 空間を用いて考察する. n を空間次元を表す自然数とする.

$$
\text{(NS)} \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = 0 & \text{for} \quad t\in(0,\infty), \quad x\in\mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{for} \quad t\in(0,\infty), \quad x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{for} \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

定義 (Modulation 空間). $\mathcal{F}$ は Fourier 変換, $\mathcal{F}^{-1}$ は Fourier 逆変換を表すとする. $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を次を満たす 1 の分解とする. $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を

$$
\operatorname{supp}\varphi \subset \{\ \xi\in\mathbb{R}^n \mid |\xi| \le \sqrt{n}\ \}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi-k) = 1 \quad \text{for any } \xi\in\mathbb{R}^n
$$

を満たす関数とし, $\varphi_k(\xi) := \varphi(\xi-k)$ とおく. $-\infty < s < \infty$, $1\le q,\sigma\le\infty$ に対して, Modulation 空間 $M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する.

$$
M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \Big|\ ||f||_{M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} < \infty \Big\},
$$

$$
||f||_{M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^{s\sigma}\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_k\mathcal{F}f\|^\sigma_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{\sigma}} & \text{for} \quad 1\le\sigma<\infty, \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^{s\sigma}||\mathcal{F}^{-1}\varphi_k\mathcal{F}f||_{L^q(\mathbb{R}^n)} & \text{for} \quad \sigma=\infty. \end{cases}
$$

非線形偏微分方程式の解の存在定理の研究は, Lebesgue 空間や Sobolev 空間においては数多く行われており, 本講演では Modulation 空間を用いて初期値問題を考察する. Modulation 空間は, Feichtinger [2] によって導入され, 近年偏微分方程式への応用が発達してきている. Modulation 空間における偏微分方程式の研究として Wang, Zhao, Guo [8] があり, 彼等は非線形 Schrödinger 方程式と Navier-Stokes 方程式について初期値 u_0 を $M^0_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ からとり時間局所解の存在を示した. また, Wang, Hudzik [7] では非線形 Schrödinger 方程式と非線形 Klein-Gordon 方程式に対して時間大域解の存在を示した. また, 以前の私の結果 [3] では, 上記 Navier-Stokes 方程式に対して初期値 u_0 を $M^0_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (ただし, $1\le q\le\infty$, $1\le\sigma\le n/(n-1)$) からとり時間局所解の存在を示し, 初期値 u_0 が $M^0_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (ただし, $1\le q\le n$, $1\le\sigma\le n/(n-1)$) に属し十分小さいならば時間大域解が存在することを示した.

以下の定理では, [3] の Navier-Stokes 方程式に対する時間局所解と時間大域解の結果を拡張した.

定理. $n\ge 2$, $-\infty<s<\infty$, $1\le q\le\infty$, $1\le\sigma<\infty$ とし, 次を満たすとする.

$$
s \ge -1 + \frac{n(\sigma-1)}{\sigma}.
$$

このとき $\operatorname{div} u_0 = 0$ を満たす任意の $u_0\in[M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)]^n$ に対して $T>0$ が存在して, (NS) の時間局所解 u が $\big[C([0,T],M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n))\big]^n$ のある部分空間に一意的に存在する. 更に, $q\le n$, 初期値 u_0 が十分小さい時, 解は時間大域的に存在する.

注意. (1) 定理において, $s=0$ とすると $\sigma\le n/(n-1)$ であるから, この定理は以前の結果 [3] の拡張である.

(2) 定理において, s の下限は -1 であるが, $s < -1$ とすると解の適切性は成立しない. 実際 Bejenaru, Tao [1] の方法によって, $M^{-1}_{2,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq \sigma < \infty)$ において (NS) は初期値に対する連続依存性が成り立たない事が示される.

(3) 定理の時間局所解について, $s = -1$ の場合の初期値は $M^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ に属し, 既存の結果 [5] に含まれる. 実際 Miura [5] は初期値 u_0 が $vmo^{-1} \cap gmo^{-1}$ に属する時, 時間局所解が存在することを示しており, 次の包含関係が成立する.

$$M^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) \subset vmo^{-1} \cap gmo^{-1}.$$

ただし, $s = -1 + n(\sigma - 1)/\sigma > -1$ の場合, 既存の関数空間との関係は明確ではない.

(4) 定理の時間大域解について, $s \leq 0$ の場合の初期値は既存の結果 [4] に含まれる. 実際 Koch, Tataru [4] は初期値 u_0 が BMO^{-1} に属し, 十分小さいならば時間大域解が存在することを示しており, 次の包含関係が成立する.

$$M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \subset BMO^{-1} \quad \text{if} \quad q \leq n,\ -1 + \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} \leq s \leq 0.$$

ただし, $s = -1 + n(\sigma - 1)/\sigma > 0$ の場合, 既存の関数空間との関係は明確ではない.

定理の証明方法は, 方程式 (NS) を次の積分方程式に書き直し, 適当な完備距離空間を設定して Banach の不動点定理により定理の解を得るというものである.

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \nabla P e^{(t-\tau)\Delta} (u \otimes u) d\tau.$$

ただし, $P := 1 + (-\Delta)^{-1} \nabla$ div. 以下の命題では, $-1 < s \leq 0$ の場合の定理の証明に用いる線形評価と積の評価を紹介する.

命題. $s, \widetilde{s} \in \mathbb{R}$, $1 \leq q, q_1, q_2, r, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \nu \leq \infty$ とする.
(i) $q \geq r$ ならば $\|e^{t\Delta}u\|_{M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|u\|_{M^s_{r,\sigma}(\mathbb{R}^n)}$
(ii) $s \geq \widetilde{s}$ ならば $\|e^{t\Delta}u\|_{M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(1 + t^{-\frac{s-\widetilde{s}}{2}}\right) \|u\|_{M^{\widetilde{s}}_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)}$
(iii) $\sigma \leq \nu$ ならば $\|e^{t\Delta}u\|_{M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(1 + t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}\right) \|u\|_{M^s_{r,\nu}(\mathbb{R}^n)}$
(iv) [Toft [6]] $1/q = 1/q_1 + 1/q_2$, $1/\sigma = 1/\sigma_1 + 1/\sigma_2 - 1$ ならば
$\|uv\|_{M^0_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{M^0_{q_1,\sigma_1}(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{M^0_{q_2,\sigma_2}(\mathbb{R}^n)}$.

参考文献

[1] I. Bejenaru, T. Tao, J. Funct. Anal., **233**, (2006) 228–259.
[2] H. G. Feichtinger, Technical Report, University of Vienna, 1983.
[3] T. Iwabuchi, preprint.
[4] H. Koch, D. Tataru, Adv. Math., **157** (2001), 22–35.
[5] H. Miura, J. Funct. Anal., **218** (2005), 110–129.
[6] J. Toft, J. Funct. Anal., **207** (2004) 399–429.
[7] B. Wang, H. Hudzik, J. Differential Equations, **232** (2007), 36-73.
[8] B. Wang, L. Zhao, B. Guo, J. Funct. Anal., **233** (2006), 1-39.

The two constants and tensors of the original Navier-Stokes equations

増田 茂 (ますだ しげる)

首都大学東京 大学院 理学研究科 博士後期課程 数学専攻

E-mail: masuda-sigeru@ed.tmu.ac.jp

Abstract

The two-constants theory is the one now accepted for isotropic, linear elasticity. The original Navier-Stokes equations [NS equations] or Navier equations were introduced in deducing the two-constants theory. From the view of NS equations, we would like to report the deduction of tensor or equations by Navier, Poisson, Cauchy, Saint-Venant, and Stokes and the concurrence between each other. Especially, we would like to take up a subject for discussion on Saint-Venant, however his idea on tensor is, we think, an epock-making for taking the concurrence among three pioneers of NS equations and contributing to Stokes' tensor and equations, which strengthens the frame of NS equations.

1 主結果１（A genealogy of tensor）

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Navier[3, 4]} : t^e_{ij} = -\varepsilon(\delta_{ij}u_{k,k} + u_{i,j} + u_{j,i}),\ t^f_{ij} = (p - \varepsilon u_{k,k})\delta_{ij} - \varepsilon(u_{i,j} + u_{j,i}) & & & & \\
 & \nearrow & \| \quad \Updownarrow & \searrow & & & \\
(\text{Euler}) \Longrightarrow & \cdots & \| \ \text{Poisson[5, 6]}\bullet & \Longrightarrow & \text{Saint-Venant[7]}\dagger & \Longrightarrow & \text{Stokes[8]}\ddagger \\
 & \searrow & \Downarrow \quad \Downarrow & \nearrow & & & \\
 & & \text{Cauchy[1, 2]} : t^{e,f}_{ij} = \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) & & & &
\end{array}
$$

$\leftarrow$ molecular deduction $\rightarrow$ $\|$ $\leftarrow$ non-molecular deduction $\rightarrow$

$\leftarrow$ Navier-Poisson-Cauchy-pattern $\rightarrow$ $\|$ $\leftarrow$ Poisson-Saint-Venant-Stokes

$\bullet$ Poisson : $t^e_{ij} = -\frac{a^2}{3}(\delta_{ij}u_{k,k} + u_{i,j} + u_{j,i}),\ t^f_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$

$\dagger$ Saint-Venant : $t^f_{ij} = (\frac{1}{3}(P_{xx}+P_{yy}+P_{zz}) - \frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k})\delta_{ij} + \varepsilon(v_{i,j}+v_{j,i}),\ \frac{1}{3}(P_{xx}+P_{yy}+P_{zz}) = -p$

$\ddagger$ Stokes : $t^f_{ij} = (-p - \frac{2}{3}\mu v_{k,k})\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}),$

2 主結果２（Two constants）

Now, we would like to propose the uniformal methods to describe the kinetic equations such as :

- The partial differential equations of the elastic solid or elastic fluid are expressed by using one or the pair of C_1 and C_2 such that :
  in the elastic solid : $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (C_1T_1 + C_2T_2) = \mathbf{f}$,
  In the elastic fluid : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (C_1T_1 + C_2T_2) + \cdots = \mathbf{f}$,
  where $T_1,\ T_2, \cdots$ are the tensors or terms consisting our equations. For example, in modern notation of the incompressible Navier-Stokes equations, the kinetic equation with the equation of continuity are conventionally described as follows :
  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div}\ \mathbf{u} = 0.$

- Moreover, C_1 and C_2 are described as follows :

$$
\begin{cases} C_1 \equiv \mathcal{L}r_1g_1S_1, \\ C_2 \equiv \mathcal{L}r_2g_2S_2, \end{cases} \quad
\begin{cases} S_1 = \iint g_3 \to C_3, \\ S_2 = \iint g_4 \to C_4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad
\begin{cases} C_1 = C_3Lr_1g_1 = \frac{2\pi}{15}\mathcal{L}r_1g_1, \\ C_2 = C_4Lr_2g_2 = \frac{2\pi}{3}Lr_2g_2. \end{cases}
$$

Table 1: The two contsnts in the kinetic equations

no	name	problem	C_1	C_2	C_3	C_4	$\mathcal{L}$	r_1	r_2	g_1	g_2	remark
1	Navier [3]	elastic solid	ε		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho$	ρ^4		$f\rho$		ρ : radius
2	Navier fluid [4]	motion of fluid	ε		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho$	ρ^4		$f(\rho)$		ρ : radius
				E		$\frac{2\pi}{3}$	$\int_0^\infty d\rho$		ρ^2		$F(\rho)$	
3	Poisson [5]	elastic solid	k		$\frac{2\pi}{15}$		$\sum \frac{1}{\alpha^5}$	r^5		$\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$		
				K		$\frac{2\pi}{3}$	$\sum \frac{1}{\alpha^5}$		r^3		fr	
4	Poisson [6]	motion of fluid	k		$\frac{1}{30}$		$\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$	r^3		$\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$		$C_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{15} = \frac{1}{30}$
				K		$\frac{1}{6}$	$\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$		r		fr	$C_4 = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6}$
5	Cauchy [2]	system of particles	R		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty dr$	r^3		$f(r)$		$f(r) \equiv \pm[r\mathrm{f}'(r) - \mathrm{f}(r)]$
				G		$\frac{2\pi}{3}$	$\int_0^\infty dr$		r^3		$\mathrm{f(r)}$	$f(r) \neq \mathrm{f}(r)$
11	Saint-Venant [7]	fluid	ε	$\frac{\varepsilon}{3}$								
12	Stokes [8]	fluid	μ	$\frac{\mu}{3}$								
13	Stokes [8]	elastic solid	A	B								$A = 5B$

- C_1 and C_2 are two coefficients, for example, k and K by Poisson, or ε and E by Navier, or R and G by Cauchy, and which are expressed by the infinite operator $\mathcal{L}$ ($\sum_0^\infty$ or $\int_0^\infty$) by personal principles or methods, where r_1 and r_2 are the functions related to the radius of the active sphere of the molecules, rised to the power of n.

参考文献

[1] A.L.Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions de l'équilibre ou les lois du mouvment intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*, Exercises de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy, (Ser. 2) **8**(1890), 195-226.

[2] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercises de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.

[3] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu : 14/mai/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227, 375-393.

[4] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu : 18/mar/1822.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x, 389-440.

[5] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[6] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équiblibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)

[7] J.C.Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides. (Extrait.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 1240-1243. (Lu : 14/apr/1834.)

[8] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845).

仮似変分不等式論による癌浸潤モデルの局所可解性について

加納 理成 (かのう りせい)

近畿大学工学部 教育推進センター 非常勤講師

E-mail: kano@hiro.kindai.ac.jp

$0 < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$ を滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつ有界領域とする. 本講演では [1] で提唱された癌浸潤モデルを記述する以下の方程式の時間局所可解性について考察する.

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases}
\dfrac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot \{K_1(\cdot)\nabla n - \lambda(\cdot) n \nabla f\} + \mu n(1 - n - f) \quad \text{in } Q(T) := \Omega \times (0, T), \\
\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\delta m f \qquad \text{in } Q(T), \\
\dfrac{\partial m}{\partial t} = K_2(\cdot) \triangle m + C_1 n - C_2 m \qquad \text{in } Q(T), \\
0 \le n + f \le 1, \ m \ge 0, \ f \ge 0, \ n \ge 0 \qquad \text{in } Q(T), \\
n = 0, \qquad \text{in } \Sigma(T) := \Gamma \times (0, T), \\
\dfrac{\partial m}{\partial \mathbf{n}} = 0 \qquad \text{in } \Sigma(T), \\
n(0) = n_0, \ f(0) = f_0, \ m(0) = m_0 \qquad \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ここで, $K_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$, $\lambda(\cdot)$ は $(0, T)$ 上の与えられた関数, μ, δ, C_1, C_2 は正の定数とする. $\mathbf{n}$ は境界上の外向き法線ベクトルとし, n_0, m_0, f_0 は与えられた初期条件とする. [1] では, n は細胞数密度, m はタンパク質分解酵素密度, f は細胞外基質密度をそれぞれ表している.

仮似変分不等式の理論を用いたアプローチについて

以下に定義される作用素を用いることで, 問題 (P) は仮似変分不等式 (QVI) として記述することができる. 任意の $n \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ に対して, 作用素 $S : L^2(0, T; L^2(\Omega)) \to L^2(0, T; L^2(\Omega))$ を以下の関係を満たすものとして定義する.

$$
Sn = m \iff \begin{cases}
\dfrac{\partial m}{\partial t} = K_2(t) \triangle m + C_1 n - C_2 m \qquad \text{a.e. in } Q(T), \\
\dfrac{\partial m}{\partial \mathbf{n}} = 0 \qquad \text{a.e. in } \Sigma(T), \\
m(0) = m_0 \qquad \text{a.e. in } \Omega.
\end{cases}
$$

また, 作用素 $\mathbf{T} : L^2(0, T; L^2(\Omega)) \to W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ を

$$
[\mathbf{T}m](x, t) := f_0(x) \exp\left(-\delta \int_0^t m(x, s) ds\right) \ \text{for } \forall (x, t) \in Q(T),
$$

と定義する. このとき, $\Lambda n := (\mathbf{T} \circ S)(n)$ とおくと, 問題 (P) は以下の放物型仮似変分不等式

(QVI) として記述される.

$$
\text{(QVI)}\begin{cases}
0 \le n \le 1 - \Lambda n \quad \text{a.e. in } Q(T), \\
\displaystyle\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial n}{\partial t} - \mu n (1 - n - [\Lambda n]) \right) (n - v) dx dt \\
\displaystyle + \int_0^T \int_\Omega \Big(\lambda(t) \big\{ n \nabla [\Lambda n] \big\} + K_1(t) \nabla n \Big) \cdot \nabla (n - v) dx dt \le 0, \\
\quad \text{for } \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ with } 0 \le v \le 1 - \Lambda n \quad \text{a.e. in } Q(T), \\
n(0) = n_0 \ \text{ in } \Omega.
\end{cases}
$$

主結果

Definition 1. 以下の (S1)-(S4) を満たす $\{n, m, f\}$ を (P) の解とする.

(S1) $n \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$

(S2) $0 \le n \le 1 - f \quad \text{a.e. in } Q(T),$

$$
\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial n}{\partial t} - \mu n (1 - n - f) \right) (n - v) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \Big(\lambda(t) \big\{ n \nabla f \big\} + K_1(t) \nabla n \Big) \cdot \nabla (n - v) dx dt \le 0,
$$
$$
\text{for } \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ with } 0 \le v \le 1 - f \text{ a.e. in } Q(T),
$$

(S3) $n(0) = n_0 \quad \text{a.e. in } \Omega,$

(S4) $m = Sn, \ f = \Lambda n, \quad \text{in } L^2(\Omega).$

Theorem 1.
以下の (A1), (A2) を仮定する.

(A1) $0 < K_0 \le K_i(t), (i = 1, 2)$ となる定数 K_0 が存在する,

(A2) $n_0 \in H^1(\Omega)$, $0 \le n < 1$, $m_0 \in H^1(\Omega)$, $0 \le m < 1$,
$f_0 \in H^2(\Omega)$, $0 \le f < 1$.

このとき, (P) の解 $\{n, m, f\}$ が $[0, T']$ $(0 < T' \le T)$ 上で少なくとも一つ存在する.

参考文献

[1] Mark A.J. Chaplain and Alexander R.A. Anderson, Mathematical Modelling of Tissue Invasion, *Cancer Modelling and Simulation, Chapter 10, A CRC Press UK 23 Blades Court Deodar Road London SW15 2NU UK.*

[2] Risei Kano, Applications of abstract parabolic quasi-variational inequalities to obstacle problems, *Banach Center Publication, Volume 86, (2009), pp 163-174.*

[3] Risei Kano, Nobuyuki Kenmochi, Yusuke Murase, Nonlinear evolution equations generated by subdifferentials with nonlocal constraints, *Banach Center Publication, Volume 86, (2009), pp 175-194.*

cone 領域における反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

五十嵐 威文 (いがらし たけふみ)

日本大学理工学部 一般教育教室 数学系列

E-mail: igarashit@penta.ge.cst.nihon-u.ac.jp

1 導入

$D = \left\{x \in \mathbf{R}^N; x \neq 0 \text{ and } x/|x| \in \Omega\right\}$ とする。但し，Ω を S^{N-1} 上のある領域で，$\partial\Omega$ が十分滑らかであるとする。この領域 D を $\mathbf{R}^N$ における cone 領域という。

次の反応拡散方程式系の初期境界値問題を考える；

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + K_1(x,t)v^{p_1}, & x \in D,\ t > 0, \\ v_t = \Delta v + K_2(x,t)u^{p_2}, & x \in D,\ t > 0, \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, & x \in \partial D,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & x \in D, \end{cases} \tag{1}$$

但し，$p_1, p_2 \geq 1$，$p_1 p_2 > 1$ とする。初期データ $u_0(x)$ 及び $v_0(x)$ は $\bar{D}$ において有界かつ連続で，∂D 上で $u_0(x) = v_0(x) = 0$ とする。関数 $K_i(x,t)$ $(i = 1, 2)$ は $D \times (0, \infty)$ において非負で連続とする。

Δ_Ω を Ω 上のラプラス - ベルトラミ作用素とするとき，$\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ を斉次のディリクレ境界条件下での Δ_Ω に対する固有値とし，$\{\psi_n(\theta)\}_{n=1}^\infty$ (但し$\theta = x/|x|$) を $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ に対応する正規直交系の固有関数とする。γ_+ を 2 次方程式 $\gamma(\gamma + N - 2) = \omega_1$ の正の根，すなわち

$$\gamma_+ = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 + 4\omega_1}}{2}$$

とする。

2 主結果

定理に対し，関数 $K_i(x,t)$ $(i = 1, 2)$ に関して次の仮定をする；
ある $C_U, C_L > 0$ に対して，

(A1) $K_i(x,t) \leq C_U |x|^{\sigma_i}(t+1)^{q_i}$

(A2) $K_i(x,t) \geq C_L |x|^{\sigma_i} t^{q_i}$

但し，$\sigma_i, q_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$。
また，α_1, α_2 をそれぞれ

$$\alpha_1 = \frac{(2 + \sigma_1 + 2q_1) + (2 + \sigma_2 + 2q_2)p_1}{p_1 p_2 - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{(2 + \sigma_2 + 2q_2) + (2 + \sigma_1 + 2q_1)p_2}{p_1 p_2 - 1}$$

とする。第 30 回発展方程式若手セミナーでは以下の定理 0 を報告した。

定理 0 (時間大域解の非存在 [4]). $K_i(x,t)$ $(i = 1, 2)$ が (A2) を満たすとする。また，次の 2 つの条件のうち 1 つが成り立つとする;

(i) $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq N + \gamma_+$

(ii) $H_a = \left\{\xi \in C(\bar{D}); \xi(x) \geq M\langle x\rangle^{-a}\psi_1(x/|x|) \text{ for } x \in D \text{ with some } M > 0\right\}$ であるとき，$u_0 \in H_{a_1}$ with $a_1 < \alpha_1$ または $v_0 \in H_{a_2}$ with $a_2 < \alpha_2$

このとき，(1) の非自明な時間大域解が存在しない。

今回，新しく得られた結果は次の定理 1 である。

定理 1 (時間大域解の存在). $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < N + \gamma_+$ を満たし，$K_i(x,t)$ $(i = 1,2)$ が (A1) を満たすとする。また，

$$H^a = \left\{\xi \in C(\bar{D}); 0 \le \xi(x) \le m\langle x\rangle^{-a}\psi_1(x/|x|) \text{ for } x \in D \text{ with small } m > 0\right\}$$ であるとき，

$$(u_0, v_0) \in H^{a_1} \times H^{a_2} \text{ with } a_1 > \alpha_1,\ a_2 > \alpha_2$$

とする。このとき，(1) の時間大域解が存在する。

注意 2. (1) は積分方程式

$$\begin{cases} u(x,t) = S(t)u_0(x) + \displaystyle\int_0^t S(t-s)K_1(x,s)v(x,s)^{p_1}ds, \\ v(x,t) = S(t)v_0(x) + \displaystyle\int_0^t S(t-s)K_2(x,s)u(x,s)^{p_2}ds, \end{cases}$$

を満たす。但し，

$$S(t)\xi(x) = \int_D G(x,y,t)\xi(y)dy$$

で，$G(x,y,t) = G(r,\theta,\rho,\phi,t)$ $(r = |x|,\ \rho = |y|,\ \theta = x/|x|,\ \phi = y/|y| \in \Omega)$ は，cone 領域 D における拡散方程式のグリーン関数で，具体的には，Levine-Meier [7] により，

$$G(r,\theta,\rho,\phi,t) = \frac{1}{2t}(r\rho)^{-(N-2)/2}\exp\left(-\frac{\rho^2+r^2}{4t}\right)\sum_{n=1}^{\infty} I_{\nu_n}\left(\frac{r\rho}{2t}\right)\psi_n(\theta)\psi_n(\phi) \tag{2}$$

であることが知られている。ここで，I_ν はベッセル関数，すなわち

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

で，但し，$\nu_n = [(N-2)^2/4 + \omega_n]^{1/2}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds$ である。

参考文献

[1] T. Hamada, *Nonexistence of global solutions of parabolic equations in conical domains*, Tsukuba J. Math. **19** (1995), 15–25.

[2] T. Hamada, *On the existence and nonexistence of global solutions of semilinear parabolic equations with slowly decaying initial data*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 505-514.

[3] T. Igarashi and N. Umeda, *Existence and nonexistence of global solutions in time for a reaction-diffusion system with inhomogeneous terms*, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 17–37.

[4] T. Igarashi and N. Umeda, *Nonexistence of global solutions in time for reaction-diffusion systems with inhomogeneous terms in cones*, Tsukuba J. Math., Vol. 33, No. 1 (2009), to appear.

[5] H. A. Levine, *A Fujita type global existence-global nonexistence theorem for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, J. Appli. Math. Phys. (ZAMP) **42** (1991), 408-430.

[6] H. A. Levine and P. Meier, *The value of critical exponent for reaction-diffusion equation in cones*, Arch. Ratl. Mech. Anal. **109** (1990), 73-80.

[7] H. A. Levine and P. Meier, *A blowup result for the critical exponent in cones*, Israel J. Math. **67** (1989), 129-136.

[8] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Ed., Cambridge University Press, London/New York 1944.

STRICHARTZ ESTIMATES FOR WAVE EQUATIONS WITH A POTENTIAL IN AN EXTERIOR DOMAIN

松山 登喜夫　　東海大・理
村井 宗二郎　　東海大・総合理工・院

次のポテンシャルを持つ波動方程式の外部問題を考える:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + c(x)u = F(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \\ u(0,x) = f_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = f_1(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が原点に関して星型な $\mathbb{R}^n$ の外部領域であるとする. 次の仮定を置く.

Assumption A. $c(x) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ は $\overline{\Omega}$ で非負である.

本講演では (P) の解に対する Strichartz 評価について得られた結果を報告する. 外部領域における波動方程式の Strichartz 評価に関しては, Smith and Sogge [9] (see also [1, 6]) により $c(x) = 0, n = 3$ の場合の結果が得られている. その手法は時間に関する局所 Strichartz 評価, 局所エネルギー減衰, 更に全空間における Strichartz 評価を用いたものである. 問題 (P) で時間局所 Strichartz 評価を導出するにあたり $-\Delta + c(x)$ のレゾルベントの挙動を調べることが重要になる. 高周波領域での挙動は Mochizuki [7, 8], Wilcox [10] によって極限吸収の原理, またそれを用いることによりレゾルベントの微分可能性が Isozaki [2], Kerler [5] によって得られている. 低周波領域に関しては Iwashita [3], Iwashita and Shibata [4] の手法を用いることにより, レゾルベントの漸近展開を得ることが出来た.

結果を述べるにあたり次の記号を導入する：指数 p, q, r, σ が admissible であるとは $n \geq 3$, $q, \bar{r} > 2$ で

$$
2 \leq p, \bar{\sigma} < \frac{2(n-1)}{n-3}, \quad \frac{1}{q} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right), \quad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{\sigma}}\right),
$$

$$
\frac{1}{q} + \frac{n}{p} = \frac{1}{r} + \frac{n}{\sigma} - 2,
$$

を満たすときに言う. ここで $1/r + 1/\bar{r} = 1$, $1/\sigma + 1/\bar{\sigma} = 1$ とする. $L^2(\Omega)$ での自己共役作用素 $H = (-\Delta + c(x))^{1/2}$ に対して $\chi(H)$ をそのシンボル $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ が $|\xi| \leq R$ で 1, $|\xi| \geq R+1$, $R > 0$ で 0 となる作用素とする.

次の結果が得られた.

定理. $n=3$, $\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ は原点に関して星型であるとし．Assumption A を仮定する．指数 p,q,r,σ は admissible とする．このとき (P) の解 u は以下の評価式を満たす:

$$\|\chi(H)u\|_{L^q(\mathbb{R};L^p(\Omega))}\le C\left(\sum_{k=0,1}\|f_k\|_{\dot{H}^{(m_p/2)-k}(\Omega)}+\|F\|_{L^r(\mathbb{R};L^\sigma(\Omega))}\right),$$

$$\begin{aligned}\left\|[1-\chi(H)]H^{-\delta_p/2}u\right\|_{L^q(\mathbb{R};L^p(\Omega))}&\\ \le C&\left(\sum_{k=0,1}\|f_k\|_{\dot{H}^{(m_p/2)-k}(\Omega)}+\|F\|_{L^r(\mathbb{R};\dot{W}^{\delta_p/2,\sigma}(\Omega))}\right),\end{aligned}$$

ここで $\delta_p=M_p-m_p$, $m_p=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$, $M_p=2\sigma_0\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$, $\sigma_0>6$.

References

[1] N. Burq, *Global Strichartz estimates for nontrapping geometry: A remark about an article by H. Smith and C. Sogge*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 1675–1683.

[2] H. Isozaki, *Differentiability of generalized Fourier transforms associated with Schrödinger operators*, J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), 789–806.

[3] H. Iwashita, *$\boldsymbol{L}_q$–$\boldsymbol{L}_r$ estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in $\boldsymbol{L}_q$ spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[4] H. Iwashita and Y. Shibata, *On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems*, Gras. Mat. III **285** (1989), 265–288.

[5] C. Kerler, *Perturbations of the Laplacian with variable coefficients in exterior domains and differentiablility properties of the resolvent*, Asymptotic Anal. **19** (1999), 209–232.

[6] J.L. Metcalfe, *Global Strichartz estimates for solutions to the wave equation exterior to a convex obstacle*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4839–4855.

[7] K. Mochizuki, *Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain*, Lecture Notes Univ. Utah, Winter and Spring 1972.

[8] K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations* (*in Japanese*), Kinokuniya, 1984.

[9] H. Smith and C.D. Sogge, *Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of the Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), 2171–2183.

[10] C.H. Wilcox, *Scattering Theory for the D'Alembert Equation in Exterior Domains*, Lecture Notes Math. **442** (1975).

双安定反応拡散系における 2 次元スパイラルパターン

石本 登志男 (いしもと としお)
九州大学大学院 数理学府 数理学専攻
E-mail: t-ishimoto@math.kyushu-u.ac.jp

1 序論

1970 年代初頭に，ラセン状に回転する化学反応パターンが酸化・還元反応において観測されたとき，それは大きな驚きをもって迎えられた．このようなほぼ一定の形状で回転する動的なラセンパターンは，一般にスパイラルと呼ばれる．この特徴的な化学反応は BZ 反応と呼ばれ，神経や心筋の細胞組織など，他の生物系で見られる自発的な動的パターンと定性的に似ている特徴を多く持っている ([1]).

本講演では，次のような反応拡散方程式系を考える：

$$\boldsymbol{U}_t = D\Delta \boldsymbol{U} + F(\boldsymbol{U}), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{x} = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2. \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^N$ は N 個の成分の状態（例えば，物質の濃度または温度など）を表している．D はその対角成分が全て正定数であるような $N \times N$ 型の対角行列である．$F : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}^N$ は 双安定の非線形性 を持つ十分に滑らかな関数であると仮定する；すなわち，F は 2 つの零点 $S_\pm \in \boldsymbol{R}^N$ を持ち，$\boldsymbol{U} \equiv S_\pm$ が (1) に対する空間的に一様な 安定 定常解であるとする．このとき，全体空間を 2 つの状態（の集まり）$S_\pm$ とその 2 つの間を繋ぐ部分に分けるような (1) の解が存在する．その最も簡単な例は，図 1 のような平面進行フロント波解 $\varphi(x - ct)$ である．(φ, c) の組は次の方程式を満たすものとして与えられる：

$$D\varphi_{\xi\xi} + c\varphi_\xi + F(\varphi) = 0, \qquad \xi \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

S_+ と S_- の間にある「繋ぎ目」のことは内部遷移層と呼ばれる．この内部遷移層の幅を無視できるほど小さくするために，(1) において拡散係数を次のように小さくしたものを考える：

$$\boldsymbol{U}_t = \varepsilon^2 D\Delta \boldsymbol{U} + F(\boldsymbol{U}), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{x} = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2. \tag{3}$$

ここで，$0 < \varepsilon \ll 1$ であり，D と F は ε に依存しないものとする．

図 2 は反応拡散方程式 (3) においてスパイラルが発生する過程の一例を表している．遷移層の上半分と下半分において移動する向きを反対にすると，その向きが変わる地点のまわり（core と呼ばれる）で遷移層はラセンを描きながら回転していく様子を見ることができる．この渦を巻く遷移層は，次の 2 つの性質を持っている：(i) スパイラルの中心部には，遷移層の移動方向が切り替わる点（spiral tip と呼ぶことにする）が存在し，その点を境にして，遷移層は S_- から S_+ に遷移する部分（フロント部分）と S_+ から S_- に遷移する部分（バック部分）の 2 つに分けることができる．(ii) 遷移層のまわりで法方向の断面は 1 次元進行フロント波解 φ に近い形状をしていると見なすことができる．

本講演の目的は，反応拡散方程式 (3) からスパイラルのダイナミクスを理論的に解析することである．ここでは特に遷移層に注目する．上記の性質 (i) により，core 部分では遷移層がフロント部分とバック部分に分かれ，その間に法速度が 0 となる spiral tip が存在する．性質 (ii) より，その移り変わりまで考えるようにするには，(3) が互いに逆方向に進む 2 つの 1 次元進行フロント波解を持ち，さらにその間にある状態も捉えることができるような問題設定をする必要がある．

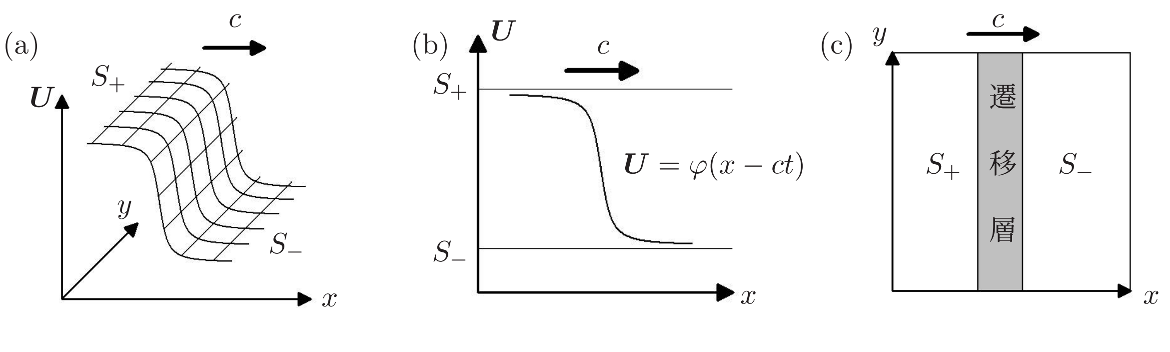

図 1：平面進行フロント波解の概念図．(a) 水平方向から見た図．(b)x 軸方向の断面．(c) 上から見た図．

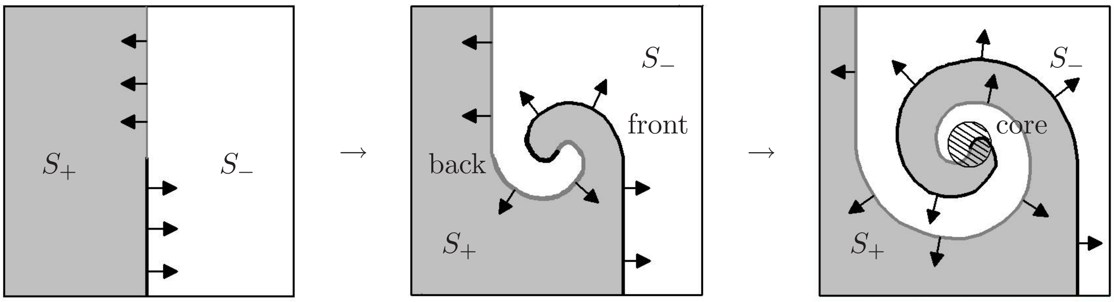

図 2：スパイラルが発生する様子．S_+ と S_- の間を繋ぐ遷移層は 2 つに分けられる：フロント部分 ($S_- \to S_+$：黒の実線部分) とバック部分 ($S_+ \to S_-$：灰色の実線部分)．また，フロント部分とバック部分を繋ぐ点（法速度が 0）の周辺は core（右上の図の網掛け部分）と呼ばれる．

2　問題設定と主結果

$$\boldsymbol{U}_t = D\boldsymbol{U}_{xx} + F(\boldsymbol{U}; k) = \mathcal{L}_1(\boldsymbol{U}; k), \qquad t > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

(4) は分岐パラメータ k に依らない定常フロント解 $S(x)$ を持ち，k_c を進行フロント波解の Pitchfork 分岐点とする．すなわち，$k > k_c$ であれば $S(x)$ が安定であり，$k < k_c$ のとき，$S(x)$ が不安定化し，互いに逆方向に進む 2 つの安定な進行フロント波解 $\varphi_\pm(x - c_\pm t)$ が存在すると仮定する．ここで，$k = k_c - \eta \ \ (0 < \eta \ll 1)$ とおくと，$\boldsymbol{U}(t, x) = \Xi(r(t); \eta)(x - \ell(t))$ で (4) の解となるようなものが存在し，$\ell(t)$, $r(t)$ は次の常微分方程式を満たす ([2])：

$$\begin{cases} \dot{\ell} = r + O(|r|^3 + \eta^{3/2}), \\ \dot{r} = (M_1 r^2 - M_2 \eta) r + O(|r|^4 + \eta^2). \end{cases} \tag{5}$$

ここで，M_1, M_2 は共に正定数である．(5) より，r が十分小のとき，$\dot{\ell} \sim r$ である．よって，$\Xi(r(t); \eta)(x - \ell(t))$ は 2 つの進行波解 $\varphi_\pm(x - c_\pm t)$ の間の状態を表していることがわかる．これを空間 2 次元の問題に適用する：

$$\boldsymbol{U}_t = \varepsilon^2 D \Delta \boldsymbol{U} + F(\boldsymbol{U}; k_c - \eta), \qquad t > 0, \quad \boldsymbol{x} = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2. \tag{6}$$

遷移層のまわりで新しい座標をとる：$\boldsymbol{x} = \Gamma(t, \sigma) + \lambda \nu(t, \sigma)$．ここで，$\Gamma$ は界面（$\boldsymbol{U}$ のある成分の等高線）を表し，ν は単位法線ベクトルを表す．$\sigma = \Sigma(t, \boldsymbol{x})$, $\lambda = \Lambda(t, \boldsymbol{x})$ はそれぞれ弧長パラメータ，界面からの符号付き距離を表す．

(6) の解 $\boldsymbol{U}$ は遷移層のまわりで (4) の解 Ξ で近似されるとする：$\boldsymbol{U}(t, \boldsymbol{x}) = \Xi(r(t, \sigma); \eta)(\mu) + \varepsilon \boldsymbol{W}(t, \sigma, \lambda)$．ここで，$\mu = \lambda / \varepsilon$ である．これらを (4) に代入し，摂動理論を用いると，次の界面方程式を得る：

$$\begin{cases} V = \varepsilon r + \varepsilon^2 \gamma_1 \kappa + O(\varepsilon^3 + |r|^3 + \eta^{3/2}), \\ D_t r = (M_1 r^2 - M_2 \eta) r + \varepsilon \gamma_2 \kappa + \varepsilon^2 \gamma_3 r_{\sigma\sigma} + O(\varepsilon^2 + |r|^4 + \eta^2). \end{cases} \tag{7}$$

$V = V(t, \sigma)$ は界面の法線方向の速度であり，$D_t r = r_t + \Sigma_t r_\sigma$ である．(7) は (5) とよく似た形をしているが，2 次元問題となったことで曲率 $\kappa(t, \sigma)$ の影響を表す項が現れたことを注意しておく．(7) を解析することにより，core 部分のより詳しい解析が可能になることが期待される．

参考文献

[1] Fife, P. C., Understanding the Patterns in the BZ Reagent. J. Stat. Phys., **39** (1985), 687–703.

[2] Ei, S.-I., Mimura, M. and Nagayama, M., Pulse-Pulse Interaction in Reaction-Diffusion Systems. Physica D., **165** (2002), 176–198.

[3] Hagberg, A. and Meron, E., Order parameter equations for front transitions: Nonuniformly curved fronts. Phisica D., **123** (1998), 460–473.