

TOHOKU MATHEMATICAL PUBLICATIONS

Editors:

Hitoshi ARAI	Shigetoshi BANDO	Satoru IGARI
Masanori ISHIDA	Junji KATO	Katsuei KENMOTSU
Kyûya MASUDA	Yasuo MORITA	Tetsuo NAKAMURA
Seiki NISHIKAWA	Tadao ODA	Norio SHIMAKURA
Toshikazu SUNADA	Izumi TAKAGI	Toyofumi TAKAHASHI
Kazuyuki TANAKA	Takashi YOSHINO	

with the cooperation of the
Mathematical Institute, Tohoku University

Number 6

Solutions ramifiées des problèmes de Cauchy caractéristiques et fonctions hypergéométriques à deux variables

by

Setsuro FUJIIÉ

October 1997

©Tohoku University
Sendai 980-77, Japan

Solutions ramifiées des problèmes
de Cauchy caractéristiques et fonctions
hypergéométriques à deux variables

A thesis presented

by

Setsuro FUJIIÉ

to

The Mathematical Institute

for the degree of

Doctor of Science

Tohoku University

Sendai, Japan

November 1994

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Chapitre 1 Résultats principaux	5
§1.1 Universalité des singularités	5
§1.2 Ramifications de la solution	9
Chapitre 2 Représentations intégrales de la solution	13
§2.1 Première représentation intégrale	13
§2.2 Deuxième représentation au moyen de $F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$	21
§2.3 Introduction de $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$	25
Chapitre 3 Singularités de la solution	28
Chapitre 4 Étude de $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$	31
§4.1 Préliminaires	32
§4.2 Continuation analytique directe	35
§4.3 Notations systématiques	39
§4.4 Groupe W engendré par S et T	41
§4.5 Groupe fondamental	45
§4.6 Continuation analytique indirecte	48
Chapitre 5 Sujets d'avenir	53
Appendice	55
Remerciements	58
Bibliographie	59

INTRODUCTION

1. Nous étudions le problème de Cauchy pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type fuchsien (défini par M. S. Baouendi-C. Goulaouic [1]). Nous avons pour but d'éclaircir les singularités de la solution obtenue par les données holomorphes. Ce problème n'a pas d'analogie en théorie des équations différentielles ordinaires, et en théorie des équations aux dérivées partielles il joue un rôle fondamental parce que les singularités ne dépendent pas des données et donc doivent être les plus simples.

Le problème a son origine dans la proposition avancée par J. Leray: *Les singularités de la solution appartiennent aux caractéristiques issues des singularités des données ou tangentes à la variété qui porte les données de Cauchy* (J. Leray [11], p.389). Regardons alors les caractéristiques. S'il n'y a pas de variété caractéristique tangente à l'hypersurface initiale S , la solution est holomorphe vu le théorème de Cauchy-Kovalevskaya. Supposons donc qu'il y en ait quelques unes. Dans le cas où aucune d'elles n'est S , c'est-à-dire que si S n'est pas caractéristique, les singularités se produisent des points caractéristiques. De plus, la solution peut être uniformisée et, sauf des cas exceptionnels, elle est algébroïde (J. Leray [11], L. Gårding-T. Kotake-J. Leray [8], J. Dunau [4]). Nous étudions le cas contraire où S est caractéristique. Dans ce cas-là, les singularités se produisent d'un sous-ensemble E de S appelé *ensemble des sources des branches* déterminé par des exposants de l'opérateur. La solution n'est plus algébroïde (voir l'Exemple 2.1.11).

En revanche au moins pour notre équation, elle se représente par des fonctions hypergéométriques.

2. Dans cet article, nous étudions le problème de Cauchy du second ordre suivant dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x$;

$$(0.1) \quad Lu = f(t, x),$$

$$(0.2) \quad L = L(c, \rho(x); P(\partial_x)) = (t\partial_t - c)(t\partial_t - \rho(x)) - t^2P(\partial_x),$$

où $c (\notin \mathbb{N})$ est une constante, $\rho(x)$ une fonction linéaire de x et $P(\xi)$ un polynôme de degré 2 d'une variable ξ à coefficients constants. Alors, c et $\rho(x)$ sont les *exposants* de L . Nous nous bornons à ce problème pour des raisons suivantes.

Premièrement, l'équation (0.1) avec L défini par (0.2) est un bon exemple parce que la solution est véritablement multiforme. (Dans le cas du premier ordre, les singularités ne sont toujours que des pôles et donc la solution est uniforme. Voir par exemple la Proposition 2.1.3.) Deuxièmement, il n'y a qu'un seul exposant qui détermine l'ensemble des sources des branches $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(0, x); \rho(x) = k\}$. Puisque l'extension au cas de dimension quelconque est banale sous cette hypothèse, nous nous concentrons au cas d'une seule variable spatiale x . Troisièmement, les variétés caractéristiques, il y en a trois qui passent par une source des branches, sont transverses l'une à l'autre. C'est une hypothèse naturelle afin que la solution se représente localement par des fonctions hypergéométriques (voir par exemple M. Y. Chi [2], V. Guillemin and D. Schaeffer [9], J. Urabe [15], [16]).

L n'est pas l'opérateur le plus général qui satisfait aux hypothèses ci-dessus. Cependant, il fait apparaître déjà des aspects essentiels des singularités. Nous pourrions étudier des problèmes plus généraux par notre méthode.

3. Notre méthode se compose de trois étapes:

Première étape: Nous établissons une formule intégrale globale en profitant de la particularité de L (Théorème 2.1.9). D'abord, nous réduisons L par une transformée de Laplace modifiée \mathcal{L}_κ à un opérateur d'ordre 1 par rapport à la variable τ duale à t . Ensuite, nous le réduisons à $M_\rho = t\partial_t - \rho(x)\cdot$ par un changement de la fonction inconnue avec un opérateur formel d'ordre infini par rapport à x . Par conséquent, (1.1) se ramène aux trois problèmes successifs; (a) un problème de Cauchy du type fuchsien qui n'a pas de source des branches à donnée holomorphe, (b) $M_\rho u = f$, (c) un problème de Cauchy non caractéristique à données méromorphes.

Deuxième étape: Nous fixons une source des branches $(0, x_k)$ et résolvons a), b), c) localement près de $(0, x_k)$ l'un après l'autre (§2.2). Nous définissons une fonction hypergéométrique à deux variables (ξ, η) ;

$$(F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^\eta s^{\beta-1}(\eta - s)^{\gamma-\beta-1}(\xi - s)^{-\alpha} g(s) ds,$$

où $g = g(s)$ est une fonction arbitraire holomorphe à l'origine. Alors, la solution se représente par un nombre fini de ces fonctions avec g dépendant seulement de L (Théorème 1.2.1).

Troisième étape: Nous étudions $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$, modification de $F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$ (Chapitre 4). Cette fonction est une généralisation de la fonction hypergéométrique de Gauss $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}1 = F(\alpha, \beta, \gamma; \eta/\xi)$ et satisfait à l'équation d'Euler-Poisson-Darboux. Son comportement local près de l'origine dans \mathbb{C}^2 correspond exactement à celui global de $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ dans $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par l'application $z = p(\xi, \eta) = \eta/\xi$. Nous posons $\Sigma_0 = \{\eta = 0\}$, $\Sigma_1 = \{\xi = \eta\}$, $\Sigma_2 = \{\xi = 0\}$, $\Omega(r) = \{|\xi| < r, |\eta| < r\}$, $\mathcal{E} = \Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, $z_j = p(\Sigma_j)$, $\tilde{\mathcal{E}} = p(\mathcal{E})$. (Alors, la singularité de $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$

sur chaque Σ_j coïncide avec celle de $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ sur z_j .) D'abord, $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$ est une fonction uniforme et holomorphe dans un voisinage conique de Σ_0 (Proposition 4.1.1) et se prolonge analytiquement sur le revêtement universel $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ (Proposition 4.2.1). Plus précisément, le noyau de l'application $p_* : \pi_1(\mathcal{E}) \rightarrow \pi_1(\tilde{\mathcal{E}})$ ne change pas $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$ et donc $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$ est uniforme sur un autre revêtement plus petit que $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ (Proposition 4.5.3). Pour préciser les singularités le long de Σ_j sur $\mathcal{R}(\mathcal{E})$, nous avons besoin d'une formule de continuation (4.2.2) (voir J. Urabe [15] et N. Takayama [14]). Il faut continuer $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$ par (4.2.2) systématiquement à plusieurs reprises.

4. Les résultats du présent article sont les suivants.

La solution ramifiée $L^{-1}f$ de (0.1) est exprimée par un nombre fini des $F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$. Soient $S = \{t = 0\}$, $V_k^\pm = \{x - x_k = \pm t\}$ les variétés caractéristiques issues d'une source des branches $(0, x_k)$. Alors, $L^{-1}f$ est holomorphe sur le revêtement universel d'un voisinage de $(0, x_k)$ privé de S et V_k^\pm (Théorème 1.2.2 et S. Ouchi [12]). Dans des voisinages coniques de S et de V_k^\pm , les singularités sur ces variétés sont égales aux puissances de t et de $x - x_k \pm t$ respectivement éventuellement avec des facteurs logarithmiques. Les puissances dépendent linéairement de c et de k (Théorème 1.2.3).

Très brièvement dit, l'exposant ρ détermine les sources des singularités et ceci et l'autre c déterminent les singularités elles-mêmes de la solution. Ceci doit être sans doute grâce à la particularité de l'opérateur L . Cependant, l'auteur espère que notre résultat sera un modèle typique d'une théorie plus générale.

CHAPITRE 1. RÉSULTATS PRINCIPAUX

§1.1 Universalité des singularités

Dans cette section, nous définissons la *solution ramifiée* du problème de Cauchy (0.1) à donnée f holomorphe pour L de la forme (0.2) et démontrons qu'elle ne dépend pas de f modulo une fonction holomorphe.

Soit $(t, x) \in \mathbb{C}^2$ et

$$(1.1.1) \quad L = L(c, \rho(x); P(\frac{\partial}{\partial x})) = (t\frac{\partial}{\partial t} - c)(t\frac{\partial}{\partial t} - \rho(x)) - t^2 P(\frac{\partial}{\partial x})$$

où nous supposons

$$(H.1) \quad c = \text{constante} \notin \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}; \quad \rho(x) = \rho_0 x + \rho_1, \quad \rho_0 \neq 0.$$

(H.2) $P(\xi)$ est un polynôme unitaire de degré 2 d'une variable ξ à coefficients constants.

L a c et $\rho(x)$ comme exposants et $t^2(\partial_t^2 - \partial_x^2)$ comme partie principale.

Considérons le problème de Cauchy

$$(1.1.2) \quad Lu = f.$$

Signalons que nous ne donnons ni $u(0, x)$ ni $\partial_t u(0, x)$ à l'avance pour résoudre (1.1.2). C'est parce que la solution holomorphe de (1.1.2) est unique s'il en existe une et donc que $u(0, x)$ et $\partial_t u(0, x)$ sont déterminées par le second membre f d'une

manière unique. Mais quand même nous appelons (1.1.2) *problème de Cauchy* parce que t est la variable du temps et $\{t = 0\}$ est la surface initiale dans notre esprit.

Définition. Soit $E = \{(0, x) \in \mathbb{C}^2; \rho(x) \in \mathbb{N}\} = \{(0, x_k)\}_{k=0}^\infty$, où $x_k = (k - \rho_1)/\rho_0$. Nous appelons $(0, x_k)$ *source des branches* et E *ensemble des sources des branches* de l'opérateur (1.1.1).

Nous avons tout d'abord la

Proposition 1.1.1. *Supposons que $f(t, x)$ soit holomorphe à $(0, x^*)$.*

i) Si $(0, x^) \notin E$, il existe une solution unique u de (1.1.2) holomorphe dans un voisinage de $(0, x^*)$.*

ii) Supposons que $x^ = x_k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un opérateur différentiel $Q_k(\partial_t, \partial_x)$ d'ordre k à coefficients constants tel que (a) soit équivalent à (b), où*

(a) il existe une solution unique u de (1.1.2) holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$,

(b) $Q_k(\partial_t, \partial_x)f|_{(t,x)=(0,x_k)} = 0$.

Preuve. i) C'est une application facile du théorème de Baouendi-Goulaouic [1], nous ne la répétons pas (nous pouvons la démontrer par des séries majorantes).

ii) Développons u et f en série de Taylor par rapport à t :

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n, \quad f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n.$$

Alors, les $u_n(x)$ sont déterminés de façon unique par les équations suivantes:

$$\begin{cases} c\rho u_0 = f_0, \\ (1-c)(1-\rho(x))u_1 = f_1, \\ (n-c)(n-\rho(x))u_n = P(\partial_x)u_{n-2} + f_n \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Vérifions par récurrence qu'il existe des opérateurs différentiels

$$\tilde{Q}_n(x, \partial_t, \partial_x) = \sum_{j+l \leq n} q_{njl}(x) \partial_t^j \partial_x^l$$

d'ordre n tels que

$$(n - c)(n - \rho(x))u_n(x) = \tilde{Q}_n(x, \partial_t, \partial_x)f|_{t=0}.$$

En fait,

$$(1.1.3) \quad \begin{cases} \tilde{Q}_0 = 1, \\ \tilde{Q}_1 = \partial_t, \\ \tilde{Q}_n = P \frac{1}{(n-2-c)(n-2-\rho(x))} \tilde{Q}_{n-2} + \frac{1}{n!} \partial_t^n \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Donc \tilde{Q}_n sont à coefficients holomorphes à $x = x_k$ pour $n < k + 2$ et u_n sont holomorphes à $x = x_k$ pour $n < k$. De plus, pour $n \geq k$, u_n sont holomorphes si et seulement si

$$\tilde{Q}_k(x, \partial_t, \partial_x)f|_{(0, x_k)} = \tilde{Q}_k(x_k, \partial_t, \partial_x)f|_{(0, x_k)} = 0,$$

car le facteur $k - \rho(x)$ s'annule à $x = x_k$ en ordre 1 et $n - \rho(x)$ n'y s'annule pas pour $n > k$. Si l'on pose $Q_k(\partial_t, \partial_x) = \tilde{Q}_k(x_k, \partial_t, \partial_x)$, alors tous les coefficients u_n sont holomorphes à $x = x_k$ si et seulement si $Q_k f|_{(0, x_k)} = 0$. L'argument de convergence est essentiellement le même que celui à (i).

C.Q.F.D.

Lorsque $x^* = x_k$, il n'existe pas en général de solution holomorphe de (1.1.2) au voisinage de $(0, x^*)$ mais quand même on peut y définir une solution multi-forme: Supposons que f soit holomorphe dans un voisinage Ω de $(0, x_k)$. Grâce à l'hypothèse (H.1), E est un ensemble des points isolés et donc $(\Omega \cap \{t = 0\}) \setminus E$ est

connexe. Prenons un point y tel que $(0, y) \in (\Omega \cap \{t = 0\}) \setminus E$ où (1.1.2) a une et une seule solution holomorphe. Alors le prolongement analytique de ce germe de solution ne dépend pas du choix de y .

Définition. Nous appelons ce germe *solution ramifiée* de (1.1.2) au voisinage de $(0, x_k)$ et notons-la $L^{-1}f$. Elle est, en général, multiforme.

Proposition 1.1.2. *Supposons que $f(t, x)$ et $g(t, x)$ soient holomorphes à $(0, x_k)$ et que $Q_k f|_{(0, x_k)} \neq 0$. Alors,*

$$L^{-1}g = \frac{Q_k g|_{(0, x_k)}}{Q_k f|_{(0, x_k)}} L^{-1}f + v$$

où $v(t, x)$ est holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$.

Preuve. Posons $v = L^{-1}g - (Q_k g|_{(0, x_k)}/Q_k f|_{(0, x_k)})L^{-1}f$ et vérifions que v est holomorphe à $(0, x_k)$. Pour le faire, il suffit, par la Proposition 1.1.1. ii), de vérifier $Q_k(Lv)|_{(0, x_k)} = 0$. Puisque

$$Q_k(Lv) = Q_k g - \frac{Q_k g|_{(0, x_k)}}{Q_k f|_{(0, x_k)}} Q_k f,$$

alors $Q_k(Lv)|_{(0, x_k)} = 0$.

C.Q.F.D.

Cela veut dire que l'espace vectoriel des solutions ramifiées $L^{-1}f$ quand f varie est uni-dimensionnel *modulo* les fonctions holomorphes.

Corollaire 1.1.3. *Soit $f = f(t, x)$ une fonction quelconque holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe une fonction $\phi = \phi(x)$ telle que*

$$(1.1.4) \quad L(c, \rho; P)^{-1}f = \begin{cases} CL(c, \rho; P)^{-1}\phi + v(t, x) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ C'tL(c-1, \rho-1; P)^{-1}\phi + v'(t, x) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où C, C' sont des constantes et v et v' des fonctions holomorphes dans un voisinage de $(t, x) = (0, x_k)$.

Preuve. Posons $\phi_k(x) = (x - x_k)^k$. Alors, $Q_k(\partial_t, \partial_x)\phi_k|_{(0, x_k)} \neq 0$ pour k pair et $Q_k(\partial_t, \partial_x)(t\phi_{k-1})|_{(0, x_k)} \neq 0$ pour k impair (voir (1.1.3)). Donc d'après la Proposition 1.1.2, quelle que soit f , les singularités de $L(c, \rho; P)^{-1}f$ issues de $(0, x_k)$ sont les mêmes que celles de $L(c, \rho; P)^{-1}\phi_k$ et $L(c, \rho; P)^{-1}(t\phi_{k-1})$ si k est pair et impair respectivement. Deuxième égalité vient de l'égalité:

$$L(c, \rho; P)^{-1}(t\phi_{k-1}) = tL(c-1, \rho-1; P)^{-1}\phi_{k-1}.$$

C.Q.F.D.

Graçe à ce corollaire, il nous suffit de regarder seulement $L(c, \rho; P)^{-1}\phi$ pour l'étude des singularités qui est l'objectif du présent article.

§1.2 Ramifications de la solution

Dans cette section, nous énonçons les résultats principaux sur la solution ramifiée du problème de Cauchy (1.1.2).

Notre résultat est, en bref, que la solution ramifiée se représente par des fonctions hypergéométriques localement près de chaque source des branches (Théorème 1.2.1). C'est par ce théorème que $L^{-1}f$ est uniforme et holomorphe sur le revêtement universel d'un voisinage de $(0, x_k)$ privé des variétés caractéristiques issues de $(0, x_k)$ (Théorème 1.2.2) et que nous pouvons préciser la singularité sur chaque variété caractéristique (Théorème 1.2.3).

Pour les démontrer rigoureusement, nous introduisons une fonction hypergéo-

métrique à deux variables (ξ, η) définie localement près de $(\xi, \eta) = (0, 0)$;

$$(1.2.1) \quad (F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^\eta s^{\beta-1} (\eta - s)^{\gamma-\beta-1} (\xi - s)^{-\alpha} g(s) ds,$$

où $g(s)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de $s = 0$ (voir l'Appendice).

C'est une généralisation de la fonction hypergéométrique de Gauss (voir (2.3.3) et

(2.3.4)). Si ϕ est une fonction de x ne dépendant pas de t , nous aurons une formule

intégrale de $L^{-1}\phi$ (Théorème 2.1.9 avec $\kappa = 2$) et en déduisons une représentation

locale au moyen d'un nombre fini de $(F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta)$.

Théorème 1.2.1. *Soit $\phi(x)$ une fonction holomorphe sur un voisinage de $x = x_k$,*

$k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $g_j(t, x, s)$ ($j = 1, 2, 3$) et $h(t, x)$ holomorphes dans des

voisinages de $(t, x, s) = (0, x_k, 0)$ et de $(t, x) = (0, x_k)$ respectivement telles que

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} L^{-1}\phi &= t^c (F_{(1, (-c+1+k)/2, -c+1+k)}g_1)\left(\frac{x - x_k + t}{2}, t\right) \\ &+ t^c (F_{(0, (-c+1+k)/2, -c+1+k)}g_2)\left(\frac{x - x_k + t}{2}, t\right) \\ &+ t^c \frac{\partial}{\partial \alpha} (F_{(\alpha, (-c+1+k)/2, -c+1+k)}g_3)|_{\alpha=0}\left(\frac{x - x_k + t}{2}, t\right) \\ &+ h(t, x). \end{aligned}$$

Nous démontrons ce théorème dans la §2.2. Une fois que ceci est fait, il suffit

d'étudier les singularités de $(F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta)$.

D'après l'étude de $(F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta)$ dans le Chapitre 4, nous arrivons au résultat

suitant sur les singularités de la solution ramifiée $L^{-1}f$ de (1.1.2).

Les variétés caractéristiques de L issues de $(0, x_k)$ sont les suivantes:

$$S = \{t = 0\}, \quad V_k^\pm = \{x - x_k = \pm t\}.$$

Soient $B_k(r) = \{(t, x) \in \mathbb{C}^2; |t| < r, |x - x_k| < r\}$ et U_k^0, U_k^1 et U_k^2 des voisinages coniques des variétés caractéristiques S, V_k^+ et V_k^- de L issues de $(0, x_k)$ respectivement définis par

$$\begin{aligned} U_k^0 &= \{(t, x) \in \mathbb{C}^2; \frac{2t}{x - x_k + t} \notin [1, +\infty]\}, \\ U_k^+ &= \{(t, x) \in \mathbb{C}^2; \frac{2t}{x - x_k + t} \notin [-\infty, 0]\}, \\ U_k^- &= \{(t, x) \in \mathbb{C}^2; \frac{2t}{x - x_k + t} \notin [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2. *Supposons que $f(t, x)$ soit holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$. Alors, il existe $r > 0$ tel que la solution ramifiée $L^{-1}f$ de (1.1.2) soit uniforme et holomorphe sur le revêtement universel de $B_k(r)$ privé de S, V_k^+ et V_k^- . (dû à S. Ouchi [12] pour des opérateurs plus généraux)*

Nous fixons un point ζ_0 sur $(S \cap B_k(r)) \setminus \{(0, x_k)\}$. Nous prenons arbitrairement un point ζ_1 dans $U_k^0 \cap U_k^+ \cap U_k^- \cap B_k(r)$ et un chemin l tracé dans $B_k(r) \setminus (S \cup V_k^+ \cup V_k^-)$ dont les extrémités sont ζ_0 et ζ_1 . D'après le Théorème 1.2.2, le germe de la solution au point ζ_0 se continue analytiquement le long de l et nous avons un germe $(L^{-1}f)_l$ au point ζ_1 . Regardons $(L^{-1}f)_l$ dans U_k^0 [resp. U_k^\pm]. Alors, $(L^{-1}f)_l$ se prolonge analytiquement sur le revêtement universel de $(U_k^0 \cap B_k(r)) \setminus S$ [resp. $(U_k^\pm \cap B_k(r)) \setminus V_k^\pm$]. Soit $(L^{-1}f)_{l,0}$ [resp. $(L^{-1}f)_{l,\pm}$] cette fonction analytique multiforme sur $(U_k^0 \cap B_k(r)) \setminus S$ [resp. $(U_k^\pm \cap B_k(r)) \setminus V_k^\pm$]. Alors, nous avons le

Théorème 1.2.3. *Supposons que $c \notin \mathbb{Z}$ et que $f(t, x)$ soit holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$. Alors, il existe un nombre positif r et des fonctions $h_{l,0}^j(t, x)$*

et $h_{l,\pm}^m(t, x)$ ($j = 1, 2$ et $m = 1, 2, 3$) holomorphes dans $U_k^0 \cap B_k(r)$ et $U_k^\pm \cap B_k(r)$ respectivement telles que

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} (L^{-1}f)_{l,0} &= h_{l,0}^1(t, x) + h_{l,0}^2(t, x)t^c, \\ (L^{-1}f)_{l,\pm} &= h_{l,\pm}^1(t, x) + h_{l,\pm}^2(t, x)(x - x_k \mp t)^{(-c-1+k)/2} \\ &\quad + h_{l,\pm}^3(t, x)(x - x_k \mp t)^{(-c+1+k)/2} \log(x - x_k \mp t). \end{aligned}$$

Remarque 1.2.4. L'hypothèse $c \notin \mathbb{Z}$ est plus restrictive que celle de (H.1) $c \notin \mathbb{N}$. Celle-ci est nécessaire pour qu'il existe une solution ramifiée et $c \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ est nécessaire pour que les singularités soient *génériques*. (Voir (3.2) et aussi le début de la §4.1 pour le mot "générique".) L'auteur a étudié dans [7] le problème de Cauchy

$$\begin{cases} L(0, \rho; P(\partial_x))u = 0, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \end{cases}$$

qui se réduit à

$$L(-1, \rho - 1; P(\partial_x))v = tP(\partial_x)\phi(x), \quad u = \phi(x) + tv.$$

C'était un cas non générique.

Remarque 1.2.5. Si l est un chemin contenu dans U_0 , $(L^{-1}f)_{l,0}$ est uniforme est holomorphe alors que dans le cas contraire elle est en général multiforme autour de S . Remarquons que cette singularité ne dépend que de c . (Comparons ce fait avec le résultat de H. Tahara [13].)

Nous démontrerons les Théorèmes 1.2.2 et 1.2.3 dans le Chapitre 3.

CHAPITRE 2. REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE LA SOLUTION

§2.1 Première représentation intégrale

Si l'opérateur est de la forme (1.1.1), nous pouvons représenter exactement la solution de (1.1.2) par une intégrale composée des opérations bien connues, par laquelle nous pouvons analyser les singularités. La déduction de cette représentation est analogue à celle de la transformée de Fourier pour les opérateurs à coefficients constants. Nous introduisons une transformée de Laplace modifiée \mathcal{L}_κ et réduit (1.1.2) à une équation du premier ordre qui est plus facile à être résolue (voir (2.1.11)). C'est ce que nous allons faire dans cette section.

Au lieu de $L = L(c, \rho(x); P(\partial_x))$, nous considérons

$$(2.1.1) \quad L_\kappa(\delta_1, \delta_2; P(\partial_x)) = (t\partial_t - \delta_1)(t\partial_t - \delta_2) - t^\kappa P(\partial_x),$$

où κ est un entier plus grand ou égal à 2. Alors l'opérateur (1.1.1) s'écrit $L = L_2(c, \rho(x); P)$. Cette généralisation nous éclaire d'où vient notre formule de la solution (voir le Théorème 2.1.9 ci-dessous). Nous reviendrons au cas $\kappa = 2$ dès la §2.2. Remarquons aussi que δ_1 et δ_2 peuvent être échangées et que si l'une est égale à 0, alors L_κ est divisible par t et si de plus l'autre est égale à 1, alors il est divisible par t^2 . En fait,

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} L_\kappa(0, \gamma; P(\partial_x)) &= t(t\partial_t^2 + (1 - \gamma)\partial_t - t^{\kappa-1}P(\partial_x)), \\ L_\kappa(0, 1; P(\partial_x)) &= t^2(\partial_t^2 - t^{\kappa-2}P(\partial_x)). \end{aligned}$$

En terminologie de Baouendi-Goulaouic [1], $t^{-1}L_\kappa(0, \gamma; P)$ ($\gamma \neq 1$) est du poids 1

et $t^{-2}L_\kappa(0, 1; P)$ du poids 2, autrement dit, l'hypersurface initiale $t = 0$ est non-caractéristique par rapport à celle-ci.

Le but de cette section est de réduire le problème de Cauchy

$$(2.1.3) \quad L_\kappa(c, \rho(x); P(\partial_x))u = \phi(x)$$

à ceux suivants dont les singularités des solutions sont bien connues (voir les Propositions 2.1.1, 2.1.3 et le Lemme 2.2.2):

$$(2.1.4) \quad \begin{cases} L_\kappa(0, \gamma; R(\partial_x))v = 0, \\ v|_{t=0} = \phi(x), \\ \partial_t v|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$(2.1.5) \quad M_\rho u = f(t, x), \quad M_\rho = t\partial_t - \rho(x),$$

où γ est une constante et $R(\xi)$ un polynôme de degré 2.

D'abord, considérons (2.1.4). Il est du type fuchsien. Puisque l'équation est homogène, l'ensemble des sources des branches de ce problème est vide si $\gamma \notin \{2, 3, \dots\}$. Plus précisément, quel que soit $x^* \in \mathbb{C}$, nous avons la

Proposition 2.1.1. *Si $\gamma \notin \{2, 3, \dots\}$ et si $\phi(x)$ est holomorphe dans un voisinage de $x = x^*$, alors il existe une et une seule solution $u = S^\kappa(\gamma; t, R(\partial_x))\phi$ de (2.1.4) holomorphe dans un voisinage de $(t, x) = (0, x^*)$.*

Preuve. Si $\gamma \neq 1$, le théorème de Baouendi-Goulaouic garantit l'existence d'une solution holomorphe unique de $L_\kappa(0, \gamma; ; R(\partial_x))v = 0$ avec une seule donnée $v|_{t=0}$. On ne peut pas donner arbitrairement la deuxième donnée $\partial_t v|_{t=0}$ mais elle est forcément nulle grâce à la particularité de l'opérateur. (En fait, on voit facilement que v est une fonction holomorphe de t^κ et de x . Voir aussi la remarque suivante.)

Si $\gamma = 1$, le théorème de Cauchy-Kovalevskaya le garantit avec les deux données de Cauchy.

C.Q.F.D.

Remarque 2.1.2.

$$S^\kappa(\gamma; t, R) = \Gamma\left(1 - \frac{\gamma}{\kappa}\right) \left(\frac{\sqrt{t^\kappa R}}{\kappa}\right)^{\gamma/\kappa} I_{-\gamma/\kappa}\left(\frac{2\sqrt{t^\kappa R}}{\kappa}\right)$$

où $I_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre ν ;

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}.$$

Donc $S^\kappa(\gamma; R)$ est une fonction entière de $t^\kappa R$.

Ensuite, considérons (2.1.5).

Proposition 2.1.3. *Si $f(t, x)$ est holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$ ($k \in \mathbb{N}$), alors la solution ramifiée de (2.1.5) $u = M_\rho^{-1} f$ admet un pôle simple sur $\{(t, x) \in \mathbb{C}^2; x = x_k\}$. Plus précisément, il existe une constante c_k et une fonction $g(t, x)$ holomorphe à $(0, x_k)$ telles que*

$$M_\rho^{-1} f = \frac{c_k t^k}{x - x_k} + g(t, x).$$

Preuve. En fait,

$$M_\rho^{-1} f = \frac{f_k(x)}{k - \rho(x)} t^k + \sum_{j \neq k} \frac{f_j(x)}{j - \rho(x)} t^j,$$

$$\text{si } f(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) t^j,$$

où la deuxième somme est holomorphe à $(0, x_k)$ et le premier terme a pour résidu

$$c_k = -f_k(x_k) t^k / \rho_0.$$

Nous avons vu donc que $M_\rho^{-1}f$ est uniforme (il n'y a pas de ramification).

C.Q.F.D.

Pour établir une formule intégrale de la solution de (1.1.2), qui se composera des opérateurs $S^\kappa(\gamma; t, R(\partial_x))$ et M_ρ^{-1} , nous faisons un calcul symbolique en utilisant la transformée de Laplace modifiée. Pendant ce calcul, nous ne discutons pas la convergence des séries et des intégrales, mais une fois que la formule est obtenue, il est moins difficile de la vérifier d'une autre façon rigoureuse.

D'abord, nous définissons la transformée de Laplace modifiée:

Définition 2.1.4.

$$\mathcal{L}_\kappa(f)(\tau) = \int_0^\infty \exp(-\tau^\kappa t^\kappa) f(t) dt.$$

Alors, nous avons le

Lemme 2.1.5.

$$(i) \quad \mathcal{L}_\kappa(t^\lambda)(\tau) = \frac{1}{\kappa} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{\kappa}\right) \tau^{-\lambda-1},$$

$$\mathcal{L}_\kappa^{-1}(\tau^\lambda)(t) = \kappa \Gamma\left(-\frac{\lambda}{\kappa}\right)^{-1} t^{-\lambda-1},$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}_\kappa(\partial_t t f) = -\tau \partial_\tau \mathcal{L}_\kappa(f) = \kappa \tau^\kappa \mathcal{L}_\kappa(t^\kappa f),$$

$$\mathcal{L}_\kappa^{-1}(\tau \partial_\tau g) = -\partial_t t \mathcal{L}_\kappa^{-1}(g),$$

$$(iii) \quad \mathcal{L}_\kappa^{-1}(M_\rho^{-1}g) = -M_{-\rho-1}^{-1} \mathcal{L}_\kappa^{-1}(g).$$

Nous pouvons définir une convolution modifiée $\#_\kappa$ associée à \mathcal{L}_κ :

Définition 2.1.6.

$$\begin{aligned} f \#_\kappa g &= t^{\kappa-1} \int_0^t f(s) g((t^\kappa - s^\kappa)^{1/\kappa}) (t^\kappa - s^\kappa)^{1/\kappa-1} ds \\ &= t \int_0^1 f(ts) g(t(1 - s^\kappa)^{1/\kappa}) (1 - s^\kappa)^{1/\kappa-1} ds, \end{aligned}$$

pour $f = f(t)$, $g = g(t)$.

Lemme 2.1.7.

$$(i) \quad f \#_{\kappa} g = g \#_{\kappa} f,$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}_{\kappa}(f \#_{\kappa} g) = \mathcal{L}_{\kappa}(f) \mathcal{L}_{\kappa}(g).$$

Avant d'appliquer \mathcal{L}_{κ} , on récrit (2.1.3) en posant $u = t^{c-\kappa+1}v$:

$$(2.1.6) \quad (\partial_t t - (\rho - c + \kappa))(\partial_t t - \kappa)v - t^{\kappa} P(\partial_x)v = t^{-c+\kappa-1}\phi(x).$$

On opère \mathcal{L}_{κ} à chaque côté. Alors, par le Lemme 2.1.5 (i), (ii), on obtient

$$(2.1.7) \quad -\kappa(\tau \partial_{\tau} + \rho - c)\tau^{\kappa} \mathcal{L}_{\kappa}(v) - P \mathcal{L}_{\kappa}(v) = \frac{1}{\kappa} \Gamma\left(\frac{-c}{\kappa}\right) \tau^c \phi,$$

et si l'on pose $\hat{v} = \mathcal{L}_{\kappa}(v)$, $\sigma = \tau^{-1}$ et multiplie σ^{κ} à chaque côté, on obtient

$$(2.1.8) \quad (\sigma \partial_{\sigma} - (\rho - c + \kappa))\hat{v} - \frac{\sigma^{\kappa}}{\kappa} P \hat{v} = K \sigma^{-c+\kappa} \phi,$$

où $K = \Gamma(-c/\kappa)/\kappa^2$. (2.1.3) est ainsi réduite à une équation d'ordre 1 par rapport à σ mais encore d'ordre 2 par rapport à x .

Maintenant, nous allons chercher une solution formelle de (2.1.8) par développement en série de Taylor par rapport à σ . Si $\rho(x)$ est constant, nous pouvons résoudre (2.1.8) par la transformée de Fourier par rapport à x , autrement dit, on peut annuler le terme de différentiation par rapport à x par le changement de la fonction inconnue $w = \exp(-\frac{\sigma^{\kappa} P(\partial_x)}{\kappa^2})\hat{v}$.

Dans le cas présent, $\rho(x)$ n'est pas constant. Alors, posons

$$(2.1.9) \quad w(\sigma, x) = \exp(-\frac{\sigma^{\kappa} R(\partial_x)}{\kappa^2})\hat{v},$$

où $R(\xi)$, un polynôme arbitraire, va remplacer $P(\xi)$. L'hypothèse (H.1) (voir §1.1)

nous donne

$$\begin{aligned} & \exp(-\frac{\sigma^{\kappa} R(\partial_x)}{\kappa^2}) \{ \sigma \partial_{\sigma} - (\rho(x) - c + \kappa) - \frac{\sigma^{\kappa}}{\kappa} P(\partial_x) \} \exp(\frac{\sigma^{\kappa} R(\partial_x)}{\kappa^2}) w \\ &= \{ \sigma \partial_{\sigma} - (\rho(x) - c + \kappa) - \frac{\sigma^{\kappa}}{\kappa} P(\partial_x) + \frac{\sigma^{\kappa}}{\kappa} R(\partial_x) + \rho_0 \frac{\sigma^{\kappa}}{\kappa^2} (\frac{d}{d\xi} R)(\partial_x) \} w. \end{aligned}$$

Donc si $R(\xi)$ satisfait à la condition;

$$(2.1.10) \quad \left(1 + \frac{\rho_0}{\kappa} \frac{d}{d\xi}\right) R(\xi) = P(\xi),$$

alors l'opérateur au membre à gauche de (2.1.8) devient $M_{\rho-c+\kappa}$, un opérateur différentiel ordinaire par rapport à σ :

$$(2.1.11) \quad M_{\rho-c+\kappa} w = K \sigma^{-c+\kappa} \exp\left(-\frac{\sigma^\kappa R(\partial_x)}{\kappa^2}\right) \phi.$$

Remarquons que $R(\xi)$ est déterminé d'une façon unique et qu'il est aussi de degré 2 et unitaire. En revenant à la variable τ , nous avons

$$\begin{aligned} (\tau \partial_\tau + \rho - c + \kappa) w &= -K \tau^{c-\kappa} \exp\left(-\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) \phi, \\ w &= -K M_{-\rho+c-\kappa}^{-1} (\tau^{c-\kappa} \exp\left(-\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) \phi). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \hat{v} &= -K \exp\left(\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) M_{-\rho+c-\kappa}^{-1} (\tau^{c-\kappa} \exp\left(-\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) \phi) \\ &= -K \exp\left(\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) \tau^{1-\kappa} M_{-\rho+c-1}^{-1} (\tau^{c-1} \exp\left(-\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) \phi). \end{aligned}$$

Revenons ici à u en appliquant \mathcal{L}_κ^{-1} à chaque côté. Par les Lemmes 2.1.7 (ii) et 2.1.5 (iii), nous avons

$$v = K \mathcal{L}_\kappa^{-1} (\tau^{1-\kappa} \exp\left(\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right)) \#_\kappa M_{\rho-c}^{-1} \mathcal{L}_\kappa^{-1} (\tau^{c-1} \exp\left(-\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right) \phi).$$

Alors il nous reste à calculer $\mathcal{L}_\kappa^{-1} (\tau^\lambda \exp\left(\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right))$. Nous développons $\exp\left(\frac{R(\partial_x)}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right)$ en série et opère \mathcal{L}_κ terme à terme en utilisant le Lemme 2.1.5 (i) et obtenons le

Lemme 2.1.8.

$$\mathcal{L}_\kappa^{-1} (\tau^{\gamma-\kappa} \exp\left(\frac{R}{\kappa^2 \tau^\kappa}\right)) = \frac{\kappa}{\Gamma(1 - \frac{\gamma}{\kappa})} t^{\kappa-\gamma-1} S^\kappa(\gamma; t, R).$$

Ici, on a employé le développement de $S^\kappa(\gamma; t, R(\partial_x))$ en série de τ (voir la Remarque 2.1.2). Si l'on fait en forme intégrale, ceci n'est autre que la formule de Schläfli. Nous arrivons donc à

$$v = \frac{K_\kappa^2}{\Gamma(1 - \frac{1}{\kappa})\Gamma(\frac{-c+1}{\kappa})} \{t^{\kappa-2} S^\kappa(1; t, R)\} \#_\kappa \{M_{\rho-c}^{-1}(t^{-c} S^\kappa(c-1 + \kappa; t, -R)\phi)\},$$

c'est-à-dire,

$$u = \frac{\Gamma(\frac{-c}{\kappa})t^{c-\kappa+1}}{\Gamma(1 - \frac{1}{\kappa})\Gamma(\frac{-c+1}{\kappa})} \{t^{\kappa-2} S^\kappa(1; t, R)\} \#_\kappa \{M_{\rho-c}^{-1}(t^{-c} S^\kappa(c-1 + \kappa; t, -R)\phi)\}.$$

Théorème 2.1.9. *La solution u du problème de Cauchy (2.1.3) s'écrit*

(2.1.12)

$$u = K_{c,\kappa} t^{c-\kappa+1} \{t^{\kappa-2} S^\kappa(1; t, R(\partial_x))\} \#_\kappa \{t^{-c} M_\rho^{-1} S^\kappa(c-1 + \kappa; t, -R(\partial_x))\phi\},$$

$$\text{où } K_{c,\kappa} = \frac{\Gamma(-\frac{c}{\kappa})}{\Gamma(1 - \frac{1}{\kappa})\Gamma(\frac{-c+1}{\kappa})}$$

et $R(\xi)$ est déterminé par (2.1.10).

Preuve. Le calcul ci-dessus pour arriver à (2.1.12) était formelle. Par exemple, la série (2.1.9) ne converge que dans une classe limitée des fonctions entières et nous n'avons pas précisé la classe de f pour laquelle $\mathcal{L}_\kappa f$ est définie. Donc il faut vérifier (2.1.12) d'une façon rigoureuse.

Notons par \tilde{u} le membre à droite de (2.1.12) et vérifions que \tilde{u} est la solution ramifiée u du problème de Cauchy (2.1.3). Remarquons que u est définie par une série de Taylor par rapport à t^κ :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^{\kappa n},$$

où les coefficients $u_n(x)$ satisfont aux équations

$$(2.1.13) \quad \begin{cases} c\rho(x)u_0(x) = \phi(x), \\ (\kappa n - c)(\kappa n - \rho(x))u_n(x) = P(\partial_x)u_{n-1}(x) \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

Donc il suffit de vérifier que \tilde{u} s'écrit $\tilde{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(x)t^{\kappa n}$ et que les $\tilde{u}_n(x)$ satisfont aux équations (2.1.13).

D'après la Remarque 2.1.2,

$$S^\kappa(\gamma; t, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\gamma)(t^\kappa R)^n, \quad \text{où} \quad \sigma_n(\gamma) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\gamma}{\kappa})}{\Gamma(1 - \frac{\gamma}{\kappa} + n)n!\kappa^{2n}}.$$

Donc,

$$\tilde{u} = K_{c,\kappa} t^{c-\kappa+1} \sum_{l,m=0}^{\infty} \sigma_l(1)\sigma_m(c-1+\kappa)(t^{\kappa(l+1)-2} \#_\kappa t^{\kappa m-c}) R_{l,m} \phi,$$

$$\text{où} \quad R_{l,m} \phi = R(\partial_x)^l \frac{1}{m\kappa - \rho(x)} (-R(\partial_x))^m \phi(x).$$

Puisque

$$t^a \#_\kappa t^b = \frac{\Gamma(\frac{a+1}{\kappa})\Gamma(\frac{b+1}{\kappa})}{\kappa\Gamma(\frac{a+b+2}{\kappa})} t^{a+b+1},$$

on obtient

$$\tilde{u}_n(x) = \frac{\Gamma(-\frac{c}{\kappa})}{\kappa^{2n+1}\Gamma(-\frac{c}{\kappa} + n + 1)} \sum_{l+m=n} \frac{1}{l!m!} R_{l,m} \phi.$$

On peut vérifier (2.1.13) pour ces \tilde{u}_n en utilisant les égalités suivantes:

$$(\kappa n - \rho(x))R(\partial_x)^l = R(\partial_x)^l(\kappa(n-l) - \rho(x)) + \kappa l P(\partial_x)R(\partial_x)^{l-1},$$

$$\sum_{l+m=n} \frac{(-1)^m}{l!m!} = 0 \quad (n \geq 1).$$

C.Q.F.D.

Remarque 2.1.10. On pourra établir une formule intégrale de $L^{-1}f$ pour $f = f(t, x)$ au lieu de $\phi(x)$. En effet, on peut le faire pour $t^j f_j(x)$ de la même façon

et ensuite pour $\sum_{t=0}^{\infty} f_j(x)t^j$ par superposition. Cependant, d'après le Corollaire 1.1.3, il suffit d'avoir (2.1.12) pour étudier les singularités de $L^{-1}f$.

Pour finir, nous calculons un exemple simple du Théorème 2.1.9.

Exemple 2.1.11. Nous posons $\rho(x) = x$, $P(\xi) = \xi^2 + \xi$, $\kappa = 2$ et $\phi(x) = 1$. Alors, $R(\xi) = \xi^2$ par (2.1.10) et grâce à la formule de d'Alembert (voir (2.2.5)), $S^2(1; t, \partial_x^2)\psi = \{\psi(x+t) + \psi(x-t)\}/2$. Puisque $\phi = \phi_0$, les singularités se produisent seulement de $(t, x) = (0, x_0) = (0, 0)$ (voir la preuve du Corollaire 1.1.3).

$$\begin{aligned} L(c, x; \partial_x^2 + \partial_x)^{-1}1 &= \frac{1}{c(x+t)} F\left(1, \frac{1-c}{2}, 1-c; \frac{2t}{x+t}\right) \\ &= \frac{t^c}{2c} (F_{(1, (1-c)/2, 1-c)} 1)\left(\frac{x+t}{2}, t\right). \end{aligned}$$

Comparons cet exemple avec le Théorème 1.2.1. Nous avons $k = 0$, $g_1 = 1/(2c)$ et $g_l = h = 0$ ($l = 2, 3$).

§2.2. Deuxième représentations au moyen de $(F_{(\alpha, \beta, \gamma)} g)(\xi, \eta)$

Revenons au cas $\kappa = 2$. Dans cette section, nous démontrons le Théorème 1.2.1. Puisque nous ne traitons plus que le cas $\kappa = 2$ dans la suite, nous simplifions des notations comme suit;

$$\begin{aligned} K_c &= K_{c,2} = \frac{\Gamma(-c/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma((-c+1)/2)}, \quad S(1; t, R) = S^2(1; t, R), \\ f \# g &= f \#_2 g = t \int_0^t f(s) g((t^2 - s^2)^{1/2}) (t^2 - s^2)^{-1/2} ds. \end{aligned}$$

Rappelons-nous la formule intégrale de $L^{-1}\phi$ (voir le Théorème 2.1.9):

$$(2.2.1) \quad L^{-1}\phi = K_c t^{c-1} S(1; t, R(\partial_x)) \# \{t^{-c} M_\rho^{-1} S(c+1; t, -R(\partial_x))\phi\}.$$

Regardons cette formule localement près de $(0, x_k)$.

D'abord, nous avons

$$(2.2.2) \quad M_\rho^{-1}S(c+1; t, -R(\partial_x))\phi = \frac{a_k t^k}{x - x_k} + w(t^2, x)$$

où a_k est une constante et $w(s, x)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de $(s, x) = (0, x_k)$. En fait, puisque $c+1 \notin \{1, 2, \dots\}$, $S(c+1; t, R(\partial_x))\phi$ est holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$ vu la Proposition 2.1.1 et de plus paire par rapport à t vu la Remarque 2.1.2. D'après la Proposition 2.1.3, nous obtenons (2.2.2) ainsi que $a_k = 0$ si k est impair.

Ensuite,

$$(2.2.3) \quad L^{-1}\phi = a_k K_c t^{c-1} S(1; t, R(\partial_x))\#\left\{\frac{t^{k-c}}{x - x_k}\right\} + K_c t^{c-1} S(1; t, R(\partial_x))\#\{t^{-c}w(t^2, x)\}.$$

Lemme 2.2.1. *Soient f et g des fonctions de t telles que*

$$f(t) = t^a \tilde{f}(t^2), \quad g(t) = t^b \tilde{g}(t^2),$$

où $\Re a > -1$, $\Re b > -1$ et $\tilde{f}(s)$, $\tilde{g}(s)$ sont holomorphes à $s = 0$. Alors il existe une fonction $h(s)$ holomorphe à $s = 0$ telle que

$$(f\#g)(t) = t^{a+b+1}h(t^2).$$

Preuve. Par un calcul simple, on obtient

$$h(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{(a+1)/2-1} (1-\theta)^{(b+1)/2-1} \tilde{f}(s\theta) \tilde{g}(s(1-\theta)) d\theta.$$

Puisque $\Re(a+1) > 0$, $\Re(b+1) > 0$, l'intégrale est bien définie et elle est holomorphe à l'origine.

C.Q.F.D.

D'après ce lemme, le second terme du membre à droite de (2.2.3) est holomorphe dans un voisinage de $(0, x_k)$. Alors on va calculer le premier terme;

$$t^{c-1}S(1; t, R(\partial_x))\# \frac{t^{-c+k}}{x-x_k} = t^{c-1}\{S(1; t, R(\partial_x))\frac{1}{x-x_k}\}\# t^{-c+k}.$$

Lemme 2.2.2.

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} S(1; t, R(\partial_x))\frac{1}{x-x_k} &= \frac{h_1(t, x)}{x-x_k-t} + \frac{h_1(-t, x)}{x-x_k+t} \\ &+ h_2(t, x) \log(x-x_k-t) + h_2(-t, x) \log(x-x_k+t) \\ &+ h_3(t^2, x) \end{aligned}$$

où $h_j(s, x)$ ($j = 1, 2, 3$) sont holomorphes sur un voisinage de $(0, x_k)$.

Preuve. Rappelons-nous que $S(1; t, R(\partial_x))((x-x_k)^{-1})$ est la solution du problème de Cauchy

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} \{\partial_t^2 - R(\partial_x)\}v = 0 \\ v|_{t=0} = \frac{1}{x-x_k} \\ \partial_t v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

(voir (2.1.4)), et que $R(\xi)$ est un polynôme unitaire de degré 2 (voir (2.1.10)).

Les variétés caractéristiques issues de $(0, x_k)$ sont V_k^+ et V_k^- et elles sont simples.

Alors, on peut appliquer le théorème de Y. Hamada [10] et $S(1; t, R(\partial_x))((x-x_k)^{-1})$

s'écrit:

$$\begin{aligned} &S(1; t, R(\partial_x))((x-x_k)^{-1}) \\ &= g_1(t)(x-x_k-t)^{-1} + \tilde{g}_1(t)(x-x_k+t)^{-1} \\ &+ g_2(t, x) \log(x-x_k-t) + \tilde{g}_2(t, x) \log(x-x_k+t) \\ &+ g_3(t, x), \end{aligned}$$

où $g_1(t)$ et $\tilde{g}_1(t)$ sont holomorphes dans un voisinage de $s = 0$ et $g_2(t, x)$, $\tilde{g}_2(t, x)$ et $g_3(t, x)$ dans un voisinage de $(t, x) = (0, x_k)$. Puisque $S(1; t, R)((x-x_k)^{-1})$ est

une fonction paire de t par la Remarque 2.1.2, nous obtenons

$$\tilde{g}_1(s) = g_1(-s), \quad \tilde{g}_2(t, x) = g_2(-t, x), \quad g_3(t, x) = g_3(-t, x).$$

Posons

$$h_1(t, x) = g_1(t), \quad h_2(t, x) = g_2(t, x), \quad h_3(t^2, x) = g_3(t, x),$$

et nous obtenons (2.2.4).

C.Q.F.D.

Remarque 2.2.3. Grâce à la particularité de (2.2.5), nous pouvons calculer exactement h_1 et h_2 . $h_1(t, x)$ est, bien entendu, déterminée *modulo* une fonction holomorphe divisible par $x - x_k - t$ pendant que $h_2(t, x)$ le soit de façon unique. Nous cherchons $h_1(t, x)$ de la forme $h_1(t, x) = g_1(t)$. Posons $R(\xi) = \xi^2 + 2a\xi + b$, $c = b - a^2$. Alors, nous avons

$$g_1(t) = \frac{1}{2}e^{at}, \quad h_2(t, x) = e^{-ax} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x - x_k),$$

$$\text{où } \Phi(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/4)^n}{n!^2} (t^2 - x^2)^n$$

(voir l'Exemple 2.1.11).

Preuve du Théorème 1.2.1. Notons que

$$\frac{1}{x - x_k \pm t} = (x - x_k \pm t)^{-\alpha} |_{\alpha=1}, \quad \log(x - x_k \pm t) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} (x - x_k \pm t)^{-\alpha} |_{\alpha=0}.$$

Donc si nous posons

$$G_j(t, x; \alpha) = t^{c-1} \{h_j(t, x)(x - x_k - t)^{-\alpha} + h_j(-t, x)(x - x_k + t)^{-\alpha}\} \# t^{-c+k}$$

$$(j = 1, 2),$$

$$h(t, x) = t^{c-1} h_3(t^2, x) \# t^{-c+k},$$

alors,

$$t^{c-1}\{S(1;t,R(\partial_x))\frac{1}{x-x_k}\}\#t^{-c+k} = G_1(t,x;1) + \partial_\alpha G_2(t,x;\alpha)|_{\alpha=0} + h(t,x).$$

$h(t,x)$ est holomorphe dans un voisinage de $(0,x_k)$ par le Lemme 2.2.1. Donc il suffit d'étudier $G_j(t,x;\alpha)$ ($j = 1, 2$).

$$\begin{aligned} & G_j(t,x;\alpha) \\ &= t^c \int_{-t}^t (t^2 - s^2)^{(-c+k-1)/2} (x - x_k - s)^{-\alpha} h_j(s,x) ds \\ &= 2^{-c+k-\alpha} t^c \int_0^t s^{(-c+k-1)/2} (t-s)^{(-c+k-1)/2} \left(\frac{x-x_k+t}{2} - s\right)^\alpha h_j(2s-t,x) ds \\ &= 2^{-c+k-\alpha} \frac{\Gamma((1-c+k)/2)^2}{\Gamma(1-c+k)} t^c (F_{(\alpha,(1-c+k)/2,1-c+k)} \tilde{g}_j) \left(\frac{x-x_k+t}{2}, t\right), \end{aligned}$$

où $\tilde{g}_j(t,x,s) = h_j(2s-t,x)$ ($j = 1, 2$) et elles sont holomorphes dans un voisinage de $(t,x,s) = (0,x_k,0)$. Posons

$$\begin{aligned} g_1(t,x,s) &= 2^{-c+k-1} \frac{\Gamma((1-c+k)/2)^2}{\Gamma(1-c+k)} a_k \tilde{g}_1(t,x,s), \\ g_2(t,x,s) &= 2^{-c+k} \frac{\Gamma((1-c+k)/2)^2}{\Gamma(1-c+k)} a_k \tilde{g}_2(t,x,s), \\ g_3(t,x,s) &= (\log 2) g_2(t,x,s), \end{aligned}$$

où a_k est la constante de (2.2.2). Alors nous obtenons (1.2.2).

Remarquons que $g_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) si k est impair (voir (2.2.2)) et donc $L^{-1}\phi$ est holomorphe dans un voisinage de $(0,x_k)$. Cela vient du fait que $\phi(x)$ ne dépend pas de t et qu'en effet $Q_k\phi = 0$ pour k impair (voir aussi le Corollaire 1.1.3).

C.Q.F.D

§2.3 Introduction de $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$

Nous nous sommes ainsi ramenés à l'étude de

$$(2.3.1) \quad (F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi,\eta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^\eta s^{\beta-1} (\eta-s)^{\gamma-\beta-1} (\xi-s)^{-\alpha} g(s) ds.$$

Il y a deux aspects de $(F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ en tant que fonction spéciale.

Premièrement, elle est une représentative des solutions des équations aux dérivées partielles. En fait, les singularités de la solution de notre problème de Cauchy (1.1.2) s'écrit comme une somme finie de ces fonctions. En plus, elle est une solution de l'équation d'Euler-Poisson-Darboux $E(\alpha, \beta - \gamma + 1)$ (voir l'Appendice):

Proposition 2.3.1. $u = (F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ vérifie

$$(2.3.2) \quad \left\{ (\xi - \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + (\gamma - \beta - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} u = 0,$$

pour $g = g(s)$ arbitraire.

Le deuxième aspect, c'est qu'elle est une généralisation à deux variables (ξ, η) de la fonction hypergéométrique de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$. En fait, si nous posons

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta) &= \xi^\alpha \eta^{1-\gamma} (F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}t\right)^{-\alpha} g(t\eta) dt, \end{aligned}$$

alors nous avons

$$(2.3.4) \quad (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}1)(\xi, \eta) = F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{\eta}{\xi}\right).$$

Et de plus, nous verrons dans le Chapitre 4 que $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ est uniforme et holomorphe sur le revêtement universel d'un voisinage Ω de $(\xi, \eta) = (0, 0)$ privé des $\Sigma_0 = \{\eta = 0\}$, $\Sigma_1 = \{\xi = \eta\}$, $\Sigma_2 = \{\xi = 0\}$ qui sont les variétés de ramification correspondant exactement à $z = 0, 1$ et ∞ respectivement pour la fonction hypergéométrique de Gauss. L'homomorphisme

$$\pi_1(\Omega \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)) \quad \rightarrow \quad \pi_1(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}),$$

induit par l'application $(\xi, \eta) \rightarrow \eta/\xi$ n'est pas injectif mais $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ reste invariante par action d'élément quelconque du noyau (voir la Proposition 4.5.3).

Il n'y a pas de grande différence entre $F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ et $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ mais celle-là est plus naturelle lorsqu'il s'agit des équations aux dérivées partielles et celle-ci est plus simple lorsque nous étudions les singularités. Pour cette raison, nous étudierons celle-ci dans le Chapitre 4.

CHAPITRE 3. SINGULARITÉS DE LA SOLUTION

D'après le Théorème 1.2.1 et le Corollaire 1.1.3, l'étude de $L^{-1}f$ s'est réduite à celle de $F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ qui sera faite dans le Chapitre 4. Nous déduisons dans ce chapitre les Théorème 1.2.2 et 1.2.3 en admettant pour l'instant les résultats du Chapitre 4 résumés ci-dessous.

Soient $\omega(r) = \{s \in \mathbb{C}; |s| < r\}$, $\Omega(r) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2; |\xi| < r, |\eta| < r\}$ et Σ_j, U_j ($j = 0, 1, 2$) les variétés et ses voisinages coniques définis par (4.1.3).

Lemme 3.1 (voir Proposition 4.1.1). *Supposons que $g(s)$ soit holomorphe dans $\omega(r)$. Alors $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ est uniforme et holomorphe dans $U_0 \cap \Omega(r)$.*

Nous fixons ζ_0 dans $U_0 \cap \Omega(r)$ et soit $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_{\zeta_0}$ le germe au point ζ_0 .

Lemme 3.2 (voir Proposition 4.2.1). *$(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_{\zeta_0}$ se prolonge analytiquement à $\mathcal{R}(\Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2))$.*

Prenons arbitrairement un point $\zeta_1 \in U_q \cap \Omega(r)$ ($q = 0, 1, 2$) et un chemin l tracé dans $\Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ dont les extrémités sont ζ_0 et ζ_1 . $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_l$ désigne la continuation analytique de $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_{\zeta_0}$ le long de l . $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_l$ ne dépend pas du choix du point de départ ζ_0 dès que $\zeta_0 \in U_0 \cap \Omega(r)$. Regardons $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_l$ dans $U_q \cap \Omega(r)$. Alors elle se prolonge analytiquement sur le revêtement universel de $U_q \cap \Omega(r) \setminus \Sigma_q$. Soit $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_{l,q}$ cette fonction analytique multiforme. La singularité de $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_{l,q}$ autour de Σ_q est précisée par la Proposition 4.6.4 avec les notations de (4.3.1) et (4.3.2).

Appliquons-la à la solution de (1.1.2). Posons

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad u_j(\alpha) &= t^c (F_{(\alpha, (-c+1+k)/2, -c+1+k)} g_j) \left(\frac{x - x_k + t}{t}, t \right) \\
&= t^k \left(\frac{x - x_k + t}{2} \right)^{-\alpha} (\mathcal{F}_{(\alpha, (-c+1+k)/2, -c+1+k)} g_j) \left(\frac{x - x_k + t}{t}, t \right) \\
&= t^k \left(\frac{x - x_k + t}{2} \right)^{-\alpha} (\tilde{\mathcal{F}}_{A_\alpha} g_j) \left(\frac{x - x_k + t}{t}, t \right) \quad (j = 1, 2, 3),
\end{aligned}$$

où c est celui dans (1.1.1) et

$$(3.2) \quad A_\alpha = \left(c - k, \frac{-c + 1 + k}{2} - \alpha, \frac{-c + 1 + k}{2} - \alpha \right).$$

Alors, nous avons par le Théorème 1.2.1

$$(3.3) \quad L(c, \rho; P)^{-1} \phi = u_1(1) + u_2(0) + \partial_\alpha u_3(\alpha)|_{\alpha=0} + h(t, x).$$

Preuve du Théorème 1.2.2. Posons $\xi = (x - x_k + t)/2$, $\eta = t$ et $z = \eta/\xi$. Alors, l'énoncé est une conséquence directe des Lemmes 3.1 et 3.2.

C.Q.F.D.

Preuve du Théorème 1.2.3. Supposons que $c \notin \mathbb{Z}$ et que $k \in \mathbb{N}$. Alors $A_\alpha \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})^3$ si $\alpha = 1$ ou bien si α est voisin de 0. Donc d'après la Proposition 4.6.4, nous avons, pour un j fixé ($j = 1, 2, 3$),

$$(3.4) \quad (u_j(\alpha))_{l,0} = \xi^{-\alpha} \eta^k (\tilde{h}_{l,0}^1 + \tilde{h}_{l,0}^2 z^{c-k}),$$

$$(3.5) \quad (u_j(\alpha))_{l,1} = \xi^{-\alpha} \eta^k (\tilde{h}_{l,1}^1 + \tilde{h}_{l,1}^2 (1 - z)^{(-c+1+k)/2 - \alpha}),$$

$$(3.6) \quad (u_j(\alpha))_{l,2} = \xi^{-\alpha} \eta^k (\tilde{h}_{l,2}^1 \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha + \tilde{h}_{l,2}^2 \left(\frac{1}{z}\right)^{(-c+1+k)/2}),$$

où $\tilde{h}_{l,n}^m = \tilde{h}_{l,n}^m(\xi, \eta; c, \alpha)$ ($m = 1, 2$, $n = 0, 1, 2$) sont holomorphes dans $(\xi, \eta) \in U_k^0 \cap B_k(r)$. Nous obtenons donc le Théorème 1.2.3 pour κ pair en substituant (3.4), (3.5), (3.6) à (3.3).

Pour κ impair, il suffit de remplacer c, k par $c-1, k-1$ et multiplier t au membre à droite de (1.2.2) d'après le Corollaire 1.1.3. Alors nous arrivons au même résultat.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 4. ÉTUDE DE $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$

Le but de ce chapitre est d'éclaircir les singularités de la fonction $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ définie par (2.3.3). Nous divisons ce chapitre en six sections comme suit:

§4.1 Nous définissons les trois variétés Σ_j ($j = 0, 1, 2$) et leurs voisinages coniques U_j ($j = 0, 1, 2$), et introduisons non seulement $f_0 = (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ mais aussi d'autres deux fonctions fondamentales $f_1 = (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}\tau_\eta g)(-\eta, \xi - \eta)$ et $f_2 = (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}\tau_\xi g)(-\xi + \eta, -\xi)$ qui sont uniformes et holomorphes dans $U_0 \cap \Omega$, $U_1 \cap \Omega$ et $U_2 \cap \Omega$ respectivement, où Ω est un voisinage de l'origine.

§4.2 Nous prolongeons $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ au revêtement universel de Ω privé les trois variétés Σ_0 , Σ_1 et Σ_2 en déplaçant le chemin d'intégration. Ensuite, nous établissons une formule fondamentale (4.2.2) qui permettra d'exprimer f_1 au moyen de f_0 .

§4.3 Nous introduisons des notations plus systématiques pour $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$. Alors, la formule (4.2.2) se montre plus claire (voir (4.3.3)) et nous pouvons l'utiliser systématiquement à plusieurs reprises.

§4.4 Nous étudions la structure d'un groupe matriciel W qui jouent un rôle important dans l'égalité (4.3.3).

§4.5 Nous étudions le groupe fondamental de $\Omega \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ pour continuer $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}g$ le long d'un chemin quelconque tracé dans cet espace.

§4.6 Soient ζ_0, ζ_1 des points dans $U_0 \cap \Omega, U_q \cap \Omega$ ($q = 0, 1, 2$) respectivement, l un chemin quelconque tracé dans $\Omega \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ dont les extrémités sont ζ_0 et ζ_1 et $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_l$ le germe de la fonction multiforme $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ au point ζ_1 que

l'on obtient après la continuation le long de l . Nous exprimons $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)_l$ comme une somme des fonctions uniformes $f_q(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g)$ pour un certain nombre fini des $(\alpha, \beta, \gamma; g)$ à coefficients de la forme $z^\lambda(1-z)^\mu$ où $z = \eta/\xi$ et éclaircissons la singularité sur Σ_q .

§4.1 Préliminaires

Rappelons-nous que $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ a été définie par

$$(4.1.1) \quad (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}t\right)^{-\alpha} g(t\eta) dt,$$

où α , β et γ étaient des paramètres complexes et $g = g(s)$ était une fonction holomorphe sur un voisinage de l'origine (voir (2.3.3)). Dans cette section, on étudie $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ seulement pour les paramètres génériques α , β et γ . Ici, ces paramètres sont dits *génériques* si aucun des a, b, c définis par (4.3.1) plus bas n'est entier.

$(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ est une généralisation de la fonction hypergéométrique de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$: si $g(s)$ est une constante, $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ est homogène de degré 0 par rapport à (ξ, η) et

$$(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}1)(\xi, \eta) = F(\alpha, \beta, \gamma; z) \quad \text{si } z = \eta/\xi.$$

Nous verrons que $z = \eta/\xi$ est la variable essentielle de $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ même si g est générale. Donc nous considérons l'application

$$(4.1.2) \quad p : \mathbb{C}^2 - (0,0) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \text{définie par } p(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi}.$$

Nous écrivons aussi $z = p(\xi, \eta) = \eta/\xi$. Les singularités de $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ se trouveront sur les variétés correspondant à celles de $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$, c'est-à-dire aux

trois points sur $\hat{\mathbb{C}}$;

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = \infty.$$

Définissons z_k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par $z_k = z_j$ si $k \equiv j \pmod{3}$ et $j = 0, 1$ ou 2 .

Posons

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} \Sigma_0 &= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2; \quad \eta = 0\}, \\ \Sigma_1 &= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2; \quad \xi = \eta\}, \\ \Sigma_2 &= \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2; \quad \xi = 0\}, \\ I_j &= [z_{j+1}, z_{j+2}], \quad U_j = p^{-1}(\hat{\mathbb{C}} - I_j). \end{aligned}$$

Alors, $\hat{\mathbb{C}} \setminus I_j$ est un voisinage simplement connexe de z_j et U_j est un voisinage conique de Σ_j . (Signalons que U_j n'est pas simplement connexe. Voir la preuve du Lemme 4.5.1.) Nous employons aussi la convention d'écriture $U_k = U_j$ si $k \equiv j \pmod{3}$ pour $j = 0, 1, 2$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Posons

$$(4.1.4) \quad \chi(\xi, \eta) = (-\eta, \xi - \eta).$$

Alors, χ est une transformation linéaire de \mathbb{C}^2 dans lui-même et l'on a

$$\chi^2(\xi, \eta) = (-\xi + \eta, -\xi), \quad \chi^3(\xi, \eta) = (\xi, \eta).$$

χ combinée avec p induit une transformation fractionnaire de $\hat{\mathbb{C}}$ dans lui-même:

$$(4.1.5) \quad \hat{\chi}(z) = 1 - \frac{1}{z} = p \circ \chi \circ p^{-1}(z),$$

et l'on a

$$\hat{\chi}^2(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \hat{\chi}^3(z) = z.$$

Notons que

$$z \in I_j \Leftrightarrow \hat{\chi}(z) \in I_{j-1} \Leftrightarrow \hat{\chi}^2(z) \in I_{j-2}.$$

Posons $\Omega(r) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2; |\xi| < r, |\eta| < r\}$. Pour étudier $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g$ comme une fonction multiforme sur $\Omega \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, il faut préparer les trois fonctions

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} f_0(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g) &= (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta), \\ f_1(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g) &= (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}\tau_\eta g)(\chi(\xi, \eta)), \quad \text{où } (\tau_y g)(s) = g(s + y) \\ f_2(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g) &= (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}\tau_\xi g)(\chi^2(\xi, \eta)), \end{aligned}$$

que l'on trouvera uniformes et holomorphes dans les voisinages coniques $U_0 \cap \Omega(r)$, $U_1 \cap \Omega(r)$, $U_2 \cap \Omega(r)$ respectivement.

Pour préciser le raisonnement, nous considérons à la place de f_j les fonctions \hat{f}_j de six variables $(z, \xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma)$ définies par

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} &\hat{f}_0(z, \xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} g(t\eta) dt, \\ &\hat{f}_1(z, \xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-\hat{\chi}(z)t)^{-\alpha} g(t\xi + (1-t)\eta) dt, \\ &\hat{f}_2(z, \xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-\hat{\chi}^2(z)t)^{-\alpha} g((1-t)\xi) dt. \end{aligned}$$

Notons que $f_j(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g) = \Gamma(\gamma)\hat{f}_j(\eta/\xi, \xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma)$ ($j = 0, 1, 2$). Dans (4.1.7), on prend comme chemin d'intégration le segment $[0, 1]$. Alors, t , $1-t$ et $1-\zeta t$ sont positifs si $\zeta < 1$. On prend les branches de $t^{\beta-1}$, $(1-t)^{\gamma-\beta-1}$ et $(1-\zeta t)^{-\alpha}$ pour $\zeta = z, \hat{\chi}(z), \hat{\chi}^2(z)$ telles que $\arg t$, $\arg(1-t)$ et $\arg(1-\zeta t)$ soient nuls sur $(0, 1)$.

Proposition 4.1.1. *Supposons que $g(s)$ soit holomorphe dans $\omega(r) = \{s \in \mathbb{C}; |s| < r\}$. Comme fonctions de six variables $(z, \xi, \eta, \alpha, \beta, \gamma)$, les \hat{f}_0 , \hat{f}_1 , \hat{f}_2 sont uniformes*

et holomorphes dans

$$(\hat{\mathbb{C}}_z - I_0) \times \{(\xi, \eta); |\eta| < r\} \times \mathbb{C}^3,$$

$$(\hat{\mathbb{C}}_z - I_1) \times \Omega(r) \times \mathbb{C}^3$$

et dans

$$(\hat{\mathbb{C}}_z - I_2) \times \{(\xi, \eta); |\xi| < r\} \times \mathbb{C}^3$$

respectivement.

Remarque 4.1.2. f_0, f_1 et f_2 sont, comme fonctions de (ξ, η) , uniformes et holomorphes dans U_0, U_1 et U_2 respectivement.

Preuve. Si $|\eta| < r$ et $z \notin I_0$, on peut remplacer le chemin d'intégration $[0, 1]$ par $\Gamma_1 = \Gamma(1+, 0+, 1-, 0-)$ qui n'enferme pas z^{-1} ;

$$\int_0^1 = \frac{1}{(1 - e^{2\pi i \beta})(1 - e^{2\pi i(\gamma - \beta)})} \int_{\Gamma_1}.$$

Donc \hat{f}_0 est holomorphe dans $(\hat{\mathbb{C}}_z - I_0) \times \{|\eta| < r\}$. Par rapport aux paramètres (α, β, γ) , f_0 est une intégrale de Riemann-Liouville et donc holomorphe dans \mathbb{C}^3 .

Le raisonnement est analogue pour \hat{f}_1 et \hat{f}_2 .

C.Q.F.D.

§4.2 Continuation analytique directe

Ensuite, nous continuons $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g$ analytiquement.

A l'avance, nous introduisons un opérateur Q_μ^λ qui envoie une fonction

$$h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j$$

holomorphe dans un disque $\omega(r) = \{|s| < r\}$ à

$$(4.2.1) \quad Q_\mu^\lambda h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda + j)}{\Gamma(\mu + j)} h_j s^j.$$

Notons que $Q_\mu^\lambda h$ est holomorphe par rapport à (s, λ, μ) dans $\omega(r) \times \{\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})\} \times \mathbb{C}$.

La Proposition 4.2.2 ci-dessous donnera une égalité fondamentale permettant de continuer $\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g$ analytiquement de U_0 à U_1 . En l'appliquant à plusieurs reprises, on peut calculer toutes les singularités sur chaque variété après la continuation analytique le long d'un chemin quelconque tracé dans $\Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ (voir le Lemme 4.6.2 et la Proposition 4.6.4).

Proposition 4.2.1. *Si $g(s)$ est holomorphe dans $\omega(r)$, alors $(\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g)(\xi, \eta)$ est holomorphe dans $\mathcal{R}(\Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2))$.*

Plus précisément, nous avons la

Proposition 4.2.2.

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g)(\xi, \eta) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\beta - \gamma} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)^{\gamma - \alpha - \beta} (\mathcal{F}_{(1 - \beta, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1)} \tau_\eta g)(\chi(\xi, \eta)) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{-\alpha} (\mathcal{F}_{(\alpha - \gamma + 1, \alpha, \alpha + \beta - \gamma + 1)} \tau_\eta Q_{\gamma - \alpha}^\beta g)(\chi(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

Remarque 4.2.3. On peut passer de U_0 à U_1 par cette formule. De plus si l'on remplace (ξ, η) par $\chi^j(\xi, \eta)$ et η/ξ par $\hat{\chi}^j(\eta/\xi)$, on peut passer de U_j à U_{j+1} . Le membre à gauche est défini dans $U_0 \cap \{|\eta| < r\}$ et le membre à droite dans $U_1 \cap \Omega(r)$ par la Proposition 4.1.1. Alors, l'égalité (4.2.2) est valable au moins dans $U_0 \cap U_1 \cap \Omega(r)$. Les fonctions $(\eta/\xi)^{\beta - \gamma}$, $(1 - \eta/\xi)^{\gamma - \alpha - \beta}$ et $(\eta/\xi)^{-\alpha}$ y sont uniformes et les branches sont telles que $\arg(\eta/\xi)$ et $\arg(1 - \eta/\xi)$ soient nuls dans $\Omega(r) \cap \{\eta/\xi \in (0, 1)\}$.

Remarque 4.2.4. Si $g \equiv 1$, la formule (4.2.2) se réduit à celle de la fonction hypergéométrique

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\beta-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; \hat{\chi}(z)) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z^{-\alpha} F(\alpha-\gamma+1, \alpha, \alpha+\beta-\gamma+1; \hat{\chi}(z)) \end{aligned}$$

que l'on obtient directement de (4.2.4) plus bas et des égalités de Kummer.

Remarque 4.2.5. L'égalité (4.2.2) permet de continuer $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g$ de U_0 à U_1 directement. Si l'on applique la formule encore une fois aux membres à droite de (4.2.2), on obtient une autre formule permettant de la continuer de U_0 à U_2 par une détermination convenable de $\arg(\eta/\xi)$ et de $\arg(1-\eta/\xi)$ (voir (4.3.4)).

Preuve de la Proposition 4.2.1. Supposons que (ξ, η) soit voisin de $(\xi^0, \eta^0) \in U_0 \cap \{|\eta| < r\}$. Par le changement de variable $s = \eta t$, nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta) \\ &= \xi^\alpha \eta^{1-\gamma} \int_0^\eta s^{\beta-1} (\eta-s)^{\gamma-\beta-1} (\xi-s)^{-\alpha} g(s) ds. \end{aligned}$$

Ici le chemin d'intégration est le segment $[0, \eta]$. Nous pouvons remplacer ce dernier par un autre sur lequel la fonction à intégrer est holomorphe. Prenons un chemin

$\Gamma_2 = \Gamma(\eta+, 0+, \eta-, 0-)$ tel qu'il n'enferme pas ξ ;

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} (\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta) \\ &= \frac{\xi^\alpha \eta^{1-\gamma}}{(1-e^{2\pi i\beta})(1-e^{2\pi i(\gamma-\beta)})} \int_{\Gamma_2} s^{\beta-1} (\eta-s)^{\gamma-\beta-1} (\xi-s)^{-\alpha} g(s) ds \end{aligned}$$

(voir Erdélyi [5] Chapitre 2.1). Donc, nous trouvons que $(\mathcal{F}_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de (ξ^0, η^0) . Maintenant, nous pouvons la prolonger à $\mathcal{R}(\Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2))$ en déplaçant Γ_2 homotopiquement sur $\{s \in \mathbb{C}; |s| < r, s \neq 0, s \neq \eta, s \neq \xi\}$ quand (ξ, η) se déplace.

Preuve de la Proposition 4.2.2. Développons $g(s)$ dans (4.1.1) en série de Taylor

$$g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j s^j$$

et changeons l'ordre d'intégration et de sommation. Alors, on obtient par la représentation intégrale d'Euler des fonctions hypergéométriques

$$(4.2.3) \quad (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g)(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + j)}{\Gamma(\gamma + j)} \eta^j g_j F(\alpha, \beta + j, \gamma + j; z),$$

où $z = \eta/\xi$. D'autre part, on connaît la formule de la continuation analytique:

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} & F(\alpha, \beta, \gamma; z) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

(voir Erdélyi [5] Chapitre 2.1). Nous appliquons (4.2.4) à (4.2.3) et ensuite, utilisons la représentation intégrale d'Euler encore une fois. Alors, nous avons

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma)} (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g)(\xi, \eta) \\ &= C_1(\alpha, \gamma - \beta) (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j g_j \int_0^1 t^{\gamma - \beta - 1} (1 - t)^{-\alpha} (1 - z't)^{\alpha - \gamma - j} dt \\ &+ C_2(\alpha, \gamma - \beta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + j)}{\Gamma(\gamma - \alpha + j)} \eta^j g_j \int_0^1 t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\beta - \gamma} (1 - z't)^{-\beta - j} dt, \end{aligned}$$

où $z' = 1 - z$ et

$$C_1(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda - \mu)\Gamma(1 - \lambda + \mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1 - \lambda)}, \quad C_2(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\mu - \lambda)\Gamma(1 + \lambda - \mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1 - \mu)}$$

$$(\lambda - \mu \notin \mathbb{Z}).$$

En changeant l'ordre encore une fois, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma)} (\mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g)(\xi, \eta) \\ &= C_1(\alpha, \gamma - \beta)(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \int_0^1 t^{\gamma - \beta - 1} (1 - t)^{-\alpha} (1 - z't)^{\alpha - \gamma} g\left(\frac{\eta}{1 - z't}\right) dt \\ &+ C_2(\alpha, \gamma - \beta) \int_0^1 t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\beta - \gamma} (1 - z't)^{-\beta} g^*\left(\frac{\eta}{1 - z't}\right) dt, \end{aligned}$$

où $g^* = Q_{\gamma - \alpha}^\beta g$. Nous obtenons finalement (4.2.2) par le changement de variable $s = zt/(1 - z't)$.

Si le développement $g(s) = \sum g_j s^j$ est convergent dans $\omega(r)$, nous supposons que $(\xi, \eta) \in \omega(\frac{r}{3}) \times \omega(\frac{r}{3})$. Alors, la série dans le droite de (4.2.3) est convergente si de plus $|z| < 1$, tandis que les séries dans le droite de (4.2.5) sont convergentes si $|z'| = |1 - z| < 1$. Donc le changement d'ordre de sommation et d'intégration dans (4.2.5) est légitime si $(\xi, \eta) \in \omega(\frac{r}{3}) \times \omega(\frac{r}{3})$ et si $|z - \frac{1}{2}| < r'$ pour r' suffisamment petit. L'égalité (4.2.2) est donc établie dans ce domaine, et par le prolongement analytique, dans le domaine indiqué dans l'énoncé.

C.Q.F.D.

§4.3 Notations systématiques

Quand nous utilisons la formule (4.2.2) à plusieurs reprises, il nous convient de transformer les paramètres α, β, γ aux a, b, c définis par

$$(4.3.1) \quad a = 1 - \gamma, \quad b = \gamma - \alpha - \beta, \quad c = \beta - \alpha.$$

Réciproquement, les α, β, γ sont exprimés au moyen des a, b, c comme

$$\alpha = \frac{1 - a - b - c}{2}, \quad \beta = \frac{1 - a - b + c}{2}, \quad \gamma = 1 - a.$$

Le caractère c dans ce chapitre est autre que celui de (1.1.1). Nous notons aussi

$$(4.3.2) \quad A = {}^t(a, b, c),$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{Ag} = \mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)}g, \quad \tilde{f}_j(\xi, \eta; A; g) = f_j(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g)$$

(voir (4.1.6)). Alors, la formule (4.2.2) s'écrit comme suit (z désigne ξ/η) :

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} & \tilde{f}_j(\xi, \eta; A; g) \\ &= C_S(A) \hat{\chi}^j(z)^{\lambda_S(A)} (1 - \hat{\chi}^j(z))^{\mu_S(A)} \tilde{f}_{j+1}(\xi, \eta; SA; g) \\ &+ C_T(A) \hat{\chi}^j(z)^{\lambda_T(A)} (1 - \hat{\chi}^j(z))^{\mu_T(A)} \tilde{f}_{j+1}(\xi, \eta; TA; Q_{Ag}), \end{aligned}$$

où

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_S(A) = \frac{1}{2}(a - b + c - 1), \quad \mu_S(A) = b,$$

$$\lambda_T(A) = \frac{1}{2}(a + b + c - 1), \quad \mu_T(A) = 0,$$

$$Q_A = Q_{\gamma - \alpha}^\beta = Q_{(1-a-b+c)/2}^{(1-a+b+c)/2},$$

$$C_S(A) = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(-b)}{\Gamma((-a-b-c+1)/2)\Gamma((-a-b+c+1)/2)},$$

$$C_T(A) = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}{\Gamma((-a+b-c+1)/2)\Gamma((-a-b+c+1)/2)}.$$

Ici nous définissons par convention \tilde{f}_k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par $\tilde{f}_k = \tilde{f}_j$ si $k \equiv j \pmod{3}$ et $j = 0, 1, 2$. Notons que $C_S(A)$ et $C_T(A)$ admettent des pôles simples à $a = 1, 2, 3, \dots$ et $b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Nous écrivons aussi une autre formule qui nous permet de continuer $\tilde{\mathcal{F}}_{Ag}$ analytiquement de U_0 à U_2 en utilisant ces nouvelles notations (voir la Remarque

4.2.5):

(4.3.4)

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}_j(\xi, \eta; A; g) \\
&= C_S(A)C_S(SA)\hat{\chi}^j(z)^{\lambda_S(A)}(1 - \hat{\chi}^j(z))^{\mu_S(A)}\hat{\chi}^{j+1}(z)^{\lambda_S(SA)}(1 - \hat{\chi}^{j+1}(z))^{\mu_S(SA)} \\
&\quad \times \tilde{f}_{j+2}(\xi, \eta; S^2A; g) \\
&+ C_S(A)C_T(SA)\hat{\chi}^j(z)^{\lambda_S(A)}(1 - \hat{\chi}^j(z))^{\mu_S(A)}\hat{\chi}^{j+1}(z)^{\lambda_T(SA)} \\
&\quad \times \tilde{f}_{j+2}(\xi, \eta; TSA; Q_{SAG}) \\
&+ C_T(A)C_S(TA)\hat{\chi}^j(z)^{\lambda_T(A)}\hat{\chi}^{j+1}(z)^{\lambda_S(TA)}(1 - \hat{\chi}^{j+1}(z))^{\mu_S(TA)} \\
&\quad \times \tilde{f}_{j+2}(\xi, \eta; STA; Q_{AG}) \\
&+ C_T(A)C_T(TA)\hat{\chi}^j(z)^{\lambda_T(A)}\hat{\chi}^{j+1}(z)^{\lambda_T(TA)} \\
&\quad \times \tilde{f}_{j+2}(\xi, \eta; T^2A; Q_AQ_{TAG}).
\end{aligned}$$

Nous aurons une formule, analogue à (4.2.2), qui exprime \hat{f}_j par deux seules \hat{f}_{j+2} .

Mais nous omettons de le faire.

§4.4 Groupe W engendré par S et T

Soit W le groupe multiplicatif matriciel engendré par S, T qui opère sur le vecteur de colonne A . Nous verrons tout de suite que W est un groupe fini. Soit $\{S, T\}^n$ l'ensemble des n -tuples des S et T dont l'élément générique est noté par

$$\sigma = (\sigma_n, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_1), \quad \sigma_j = S \text{ ou } T \text{ pour } j = 1, \dots, n.$$

Signalons le renversement de la numérotation des composants. Pour un tel σ , notons

$$\begin{aligned}
& \hat{\sigma} = \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \quad (\in W), \\
(4.4.1) \quad \delta_j(\sigma) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_j = S \\ -1 & \text{si } \sigma_j = T \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq n.
\end{aligned}$$

Et nous posons encore

$$W_n = \{\hat{\sigma}; \sigma \in \{S, T\}^n\} \quad (\subset W).$$

Alors, un calcul simple nous donne le

Lemme 4.4.1.

$$(4.4.2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} \delta_3(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2(\sigma) \end{pmatrix} \quad \text{si } \sigma = (\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) \in \{S, T\}^3.$$

W_3 se consiste des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont ± 1 , il est donc un sous-groupe normal de W d'ordre 8. Nous pouvons en déduire que

$$W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \epsilon_j = \pm 1 \text{ pour } j = 1, 2, 3 \right\},$$

$$W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 \end{pmatrix} ; \epsilon_j = \pm 1 \text{ pour } j = 1, 2, 3 \right\},$$

$W_1 \subset W_4$, $W_2 \subset W_5$ et $W_n = W_{n-3}$ si $n \geq 6$. Donc W est égal à la réunion disjointe $W_3 \cup W_4 \cup W_5$ et chacun d'eux contient huit éléments. Par conséquent, W est un groupe fini d'ordre 24.

Nous allons appliquer la formule (4.3.3) n fois en commençant par $\tilde{f}_0(\xi, \eta; A; g)$. Alors \tilde{f}_0 se représente par 2^n termes chacun desquels est de la forme $\tilde{f}_q(\xi, \eta; \hat{\sigma}A; g^\sigma)$ multipliée par des puissances de $\hat{\chi}^j(z)$ et de $1 - \hat{\chi}^j(z)$ ($j = 0, 1, 2$). Ici $\sigma \in \{S, T\}^n$, $n \equiv q \pmod{3}$ et g^σ est une fonction holomorphe à l'origine. Notons

$$\hat{\chi}(z) = (z - 1)z^{-1}, \quad 1 - \hat{\chi}(z) = z^{-1},$$

$$\hat{\chi}^2(z) = (1 - z)^{-1}, \quad 1 - \hat{\chi}^2(z) = z(z - 1)^{-1}.$$

Donc nous pouvons arranger les coefficients de $\tilde{f}_q(\xi, \eta; \hat{\sigma}A; g^\sigma)$ sous la forme

$$z^{\lambda_\sigma(A)}(1 - z)^{\mu_\sigma(A)}.$$

$\lambda_\sigma(A)$ et $\mu_\sigma(A)$ ne dépendent pas des branches (voir aussi le Lemme 4.6.2). Nous allons les calculer en utilisant le Lemme 4.4.1.

Lemme 4.4.2. *Soit $\sigma \in \{S, T\}^n$. Alors,*

$$(4.4.3) \quad \begin{aligned} \lambda_\sigma(A) &= \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) \right) a, \\ \mu_\sigma(A) &= \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{j=0}^{m-1} \delta_{3j+1}(\sigma) \right) b \\ &\quad \text{si } n = 3m, \end{aligned}$$

$$(4.4.4) \quad \begin{aligned} \lambda_\sigma(A) &= \frac{1}{2} \left(a - \prod_{j=0}^m \delta_{3j+1}(\sigma) b + \prod_{j=0}^{m-1} \delta_{3j+2}(\sigma) c - 1 \right) \\ \mu_\sigma(A) &= \frac{1}{2} \left(1 + \prod_{j=0}^m \delta_{3j+1}(\sigma) \right) b \\ &\quad \text{si } n = 3m + 1, \end{aligned}$$

$$(4.4.5) \quad \begin{aligned} \lambda_\sigma(A) &= \frac{1}{2} \left(1 + \prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) \right) a \\ \mu_\sigma(A) &= \frac{1}{2} \left(- \prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) a + b - \prod_{j=0}^m \delta_{3j+2}(\sigma) c - 1 \right) \\ &\quad \text{si } n = 3m + 2. \end{aligned}$$

Preuve. D'abord, nous vérifions les égalités (4.4.3). Supposons que $\sigma \in \{S, T\}^{3m}$.

Puisque

$$(4.4.6) \quad \begin{aligned} \hat{\chi}(z)^\lambda (1 - \hat{\chi}(z))^\mu &= z^{-\lambda-\mu} (z-1)^\lambda, \\ \hat{\chi}^2(z)^\lambda (1 - \hat{\chi}^2(z))^\mu &= (-z)^\mu (1-z)^{-\lambda-\mu}, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_\sigma(A) &= \sum_{j=1}^m \lambda_{\sigma_{3j-2}}(\sigma_{3j-3} \cdots \sigma_1 A) - \sum_{j=1}^m \lambda_{\sigma_{3j-1}}(\sigma_{3j-2} \cdots \sigma_1 A) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \mu_{\sigma_{3j-1}}(\sigma_{3j-2} \cdots \sigma_1 A) + \sum_{j=1}^m \mu_{\sigma_{3j}}(\sigma_{3j-1} \cdots \sigma_1 A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_\sigma(A) &= \sum_{j=1}^m \mu_{\sigma_{3j-2}}(\sigma_{3j-3} \cdots \sigma_1 A) + \sum_{j=1}^m \lambda_{\sigma_{3j-1}}(\sigma_{3j-2} \cdots \sigma_1 A) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \lambda_{\sigma_{3j}}(\sigma_{3j-1} \cdots \sigma_1 A) - \sum_{j=1}^m \mu_{\sigma_{3j}}(\sigma_{3j-1} \cdots \sigma_1 A).\end{aligned}$$

D'autre part, un calcul simple implique

$$\lambda_\sigma(A) = \tilde{\delta}_3(\sigma)a, \quad \mu_\sigma(A) = \tilde{\delta}_1(\sigma)b \quad \text{si } m = 1,$$

où

$$\tilde{\delta}_j(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma_j = S) \\ 1 & (\sigma_j = T) \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Alors, nous obtenons par le Lemme 4.4.1

$$\begin{aligned}\lambda_\sigma(A) &= \sum_{j=1}^m \tilde{\delta}_{3j}(\sigma) \delta_{3j-3}(\sigma) \delta_{3j-6}(\sigma) \cdots \delta_3(\sigma) a, \\ \mu_\sigma(A) &= \sum_{j=1}^m \tilde{\delta}_{3j-2}(\sigma) \delta_{3j-5}(\sigma) \delta_{3j-8}(\sigma) \cdots \delta_1(\sigma) b.\end{aligned}$$

En notant que

$$\tilde{\delta}_k(\sigma) = \frac{1 - \delta_k(\sigma)}{2},$$

nous obtenons (4.4.3).

Ensuite nous démontrons les égalités (4.4.4). Supposons que $\sigma \in \{S, T\}^{3m+1}$,

$\sigma = (\sigma_{3m+1}, \sigma')$. Nous avons

$$\lambda_\sigma(A) = \lambda_{\sigma_{3m+1}}(\hat{\sigma}'A) + \lambda_{\sigma'}(A).$$

Par le Lemme 4.4.1, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_S(\hat{\sigma}'A) &= \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) a - \prod_{j=1}^m \delta_{3j-2}(\sigma) b + \prod_{j=1}^m \delta_{3j-1}(\sigma) c - 1 \right), \\ \lambda_T(\hat{\sigma}'A) &= \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) a + \prod_{j=1}^m \delta_{3j-2}(\sigma) b + \prod_{j=1}^m \delta_{3j-1}(\sigma) c - 1 \right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\lambda_{\sigma_{3m+1}}(\hat{\sigma}'A) = \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) a - \prod_{j=1}^{m+1} \delta_{3j-2}(\sigma) b + \prod_{j=1}^m \delta_{3j-1}(\sigma) c - 1 \right).$$

Puisque

$$\lambda_{\sigma'}(A) = \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) \right) a,$$

nous obtenons la première égalité de (4.4.4). La deuxième et les égalités (4.4.5) sont démontrées de la même manière.

C.Q.F.D.

§4.5 Groupe fondamental

Posons

$$\mathcal{E} = \Omega(r) \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2), \quad \tilde{\mathcal{E}} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Alors l'image de \mathcal{E} par l'application p est $\tilde{\mathcal{E}}$.

Lemme 4.5.1. *Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{E})$ est engendré par des trois éléments*

γ_0, γ_1 et ν , où

(i) γ_0 ne commute pas avec γ_1 et il n'existe aucune relation entre eux;

(ii) ν commute avec γ_0 et γ_1 .

*Soit Γ le sous-groupe engendré par γ_0 et γ_1 (qui est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$). Et désignons par N le sous-groupe engendré par un seul élément ν (qui est isomorphe à \mathbb{Z}). Alors, $\pi_1(\mathcal{E})$ est égal au produit $N \times \Gamma$ et N est le centre de $\pi_1(\mathcal{E})$.*

Preuve. L'origine $(0,0)$ étant enlevé, on peut passer de \mathcal{E} à son intersection avec la sphère $S^3 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2; |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1\}$ par l'application $\kappa : (\xi, \eta) \rightarrow$

$(\xi, \eta)/\sqrt{|\xi|^2 + |\eta|^2}$. Et le groupe fondamental de \mathcal{E} est isomorphe à celui de

$$A = \{(\xi, \eta) \in S^3; \quad \xi\eta(\xi - \eta) \neq 0\}.$$

Ensuite, la projection stéréographique $\sigma : (\xi, \eta) \rightarrow (x, y, z)$ définie par $(x, y, z) = (\Re\xi, \Im\xi, \Re\eta)/(1 - \Im\eta)$ envoie A à

$$B = \mathbb{R}^3 \setminus (\Sigma'_0 \cup \Sigma'_1 \cup \Sigma'_2),$$

où $\Sigma'_j = \sigma\kappa(\Sigma_j)$, c'est-à-dire,

$$\Sigma'_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = 1, z = 0\},$$

$$\Sigma'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + (y - 1)^2 = 2, z = x\},$$

$$\Sigma'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x = y = 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Il suffit donc de savoir $\pi_1(B)$. En prenant $P_0 = (-1/2, 0, -1/2)$ par exemple comme le point de référence, choisissons les cercles paramétrisés $\{\gamma_j\}_{j=0}^2$ qui passent par P_0 comme suit:

$$\gamma_0 : \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\pi(\psi_0 - \frac{1}{8}) - 1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\pi(\psi_0 - \frac{1}{8}) \right) \right\}_{0 \leq \psi_0 \leq 1},$$

$$\gamma_1 : \left\{ \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cos 2\pi(\psi_1 + \frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \sin 2\pi(\psi_1 + \frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}_{0 \leq \psi_1 \leq 1},$$

$$\gamma_2 : \left\{ \left(-\frac{1}{2} \cos 2\pi\psi_2, -\frac{1}{2} \sin 2\pi\psi_2, -\frac{1}{2} \right) \right\}_{0 \leq \psi_2 \leq 1}.$$

Orienté vers la direction de la croissance de ψ_j , γ_j fait un seul tour de Σ'_j et ne fait aucun tour des deux autres qui restent.

Identifions les classes d'homotopie $[\gamma_j]$ et $[(\sigma\kappa)^{-1}\gamma_j]$ avec γ_j . Ainsi, on a trouvé les trois éléments qui engendrent $\pi_1(\mathcal{E}) = (\sigma_*\kappa_*)^{-1}\pi_1(B)$. D'abord, il est évident que les deux premiers satisfont à la condition (i) ci-dessus. Ensuite on peut vérifier que $\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = \gamma_1\gamma_0\gamma_2 = \gamma_0\gamma_2\gamma_1$, autrement dit, la condition (ii) est satisfaite par $\nu = \gamma_2\gamma_1\gamma_0$.

C.Q.F.D

Corollaire 4.5.2. *Soit p la projection de \mathcal{E} sur $\tilde{\mathcal{E}}$ définie par $p(\xi, \eta) = \eta/\xi$. Alors, p induit un homomorphisme p_* de $\pi_1(\mathcal{E})$ sur $\pi_1(\tilde{\mathcal{E}})$ dont le noyau est égal à N .*

Preuve. On voit par un calcul simple que $p \circ \sigma^{-1}(P_0) = 1 + i/2$ et que $p_*(\gamma_j)$ fait un tour de z_j dans le sens positif ($j = 0, 1, 2$). Donc $p_*(\nu) = p_*(\gamma_2)p_*(\gamma_1)p_*(\gamma_0)$ est l'unité de $\pi_1(\tilde{\mathcal{E}})$. Puisque $\pi_1(\tilde{\mathcal{E}})$ est isomorphe à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ engendré par $p_*(\gamma_0)$ et $p_*(\gamma_1)$, le noyau de p_* est égal à N .

C.Q.F.D.

Comme nous avons vu par la Proposition 4.2.1, $\tilde{\mathcal{F}}_A g = \mathcal{F}_{(\alpha, \beta, \gamma)} g$ est une fonction holomorphe sur le revêtement universel $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Mais en fait, elle est uniforme sur un revêtement plus petit. Nous allons le démontrer.

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{E})$ agit sur $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Et en effet, si $\pi : \mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ désigne la projection canonique, on a $\pi(P) = \pi(Q)$ pour deux points $P, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$ si et seulement s'il existe un élément γ de $\pi_1(\mathcal{E})$ tel que $\gamma P = Q$. Cela posé, écrivons à nouveau $P \sim Q$ pour $P, Q \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$ si et seulement s'il existe un élément γ du centre N tel que $\gamma P = Q$ (voir le Lemme 4.5.1). Alors, \sim est une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Nous définissons

$$(4.5.1) \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}(\mathcal{E}) / \sim .$$

\mathcal{R}_1 est aussi un revêtement de \mathcal{E} , espace quotient de $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ par action de N .

Proposition 4.5.3. *\mathcal{R}_1 est le revêtement le plus petit de \mathcal{E} sur lequel $\tilde{\mathcal{F}}_A g$ est uniforme et holomorphe.*

Preuve. Il faut d'abord vérifier

$$(4.5.2) \quad \tilde{\mathcal{F}}_A g(\nu P) = \tilde{\mathcal{F}}_A g(P) \quad \text{pour tout } P \in \mathcal{R}(\mathcal{E}),$$

où ν est l'élément de N défini dans le Lemme 4.5.1. Nous étudierons en détail dans la section prochaine la continuation de $\tilde{\mathcal{F}}_{Ag}$ d'après les formules (4.3.3) et (4.3.4). On peut identifier le point P dans $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ et la classe d'homotopie des chemins tracés dans \mathcal{E} dont les extrémités sont ζ_0 et $\pi(P)$. Alors, (4.5.2) est la conséquence directe du Lemme 4.6.2 car $p(\nu P) = p(P)$. Donc $\tilde{\mathcal{F}}_{Ag}$ est uniforme et holomorphe sur \mathcal{R}_1 .

Deuxièmement, le sous-groupe Γ agit effectivement à $\tilde{\mathcal{F}}_{Ag}$. En effet, $\tilde{\mathcal{F}}_{A1}$ est égale à $F(\alpha, \beta, \gamma; \eta/\xi)$ et celle-ci subit une action effective de $\pi_1(\tilde{\mathcal{E}})$ qui est isomorphe à Γ .

Par conséquent, pour un $\gamma \in \pi_1(\mathcal{E})$, nous avons $\tilde{\mathcal{F}}_{Ag}(\gamma P) = \tilde{\mathcal{F}}_{Ag}(P)$ identiquement sur $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ pour toute fonction g si et seulement si $\gamma \in N$, ce qui fallait démontrer.

C.Q.F.D.

§4.6 Continuation analytique indirecte

Nous fixons un point $\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0)$ dans $U_0 \cap \Omega(r)$ où $\tilde{\mathcal{F}}_{Ag} = \tilde{f}_0$ est définie. (Sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que $\zeta_0 \in U_0 \cap U_1 \cap U_2$ et nous prenons $\zeta_0 = \sigma^{-1}(P_0)$ dans la preuve du Lemme 4.5.1, par exemple.) Nous allons continuer cette fonction le long d'un chemin quelconque l tracé dans \mathcal{E} dont les extrémités sont ζ_0 et ζ_1 . Soit $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l$ le germe au point final ζ_1 que l'on obtient après la continuation analytique le long de l du germe de \tilde{f}_0 au point de départ ζ_0 .

Supposons que $\zeta_1 \in U_q \cap \Omega(r)$ ($q = 0, 1, 2$). Alors notre but est d'exprimer $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l$ comme une somme des fonctions uniformes $\tilde{f}_q(\xi, \eta; A; g)$ pour un certain nombre fini des $(A; g)$ à coefficients de la forme $z^\lambda(1-z)^\mu$ en utilisant les formules

(4.3.3) et (4.3.4).

Nous remplaçons l par un chemin standard $\delta \circ \gamma$ homotope à l , où $\delta \subset U_q$ et γ est engendré par γ_0 , γ_1 et γ_2 . Cette décomposition est unique à un élément de $\pi_1((U_q \cap \Omega(r)) \setminus \Sigma_q)$ près.

D'abord, nous exprimons $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_\gamma$ par $\tilde{f}_q(\xi, \eta; A; g)$. Il suffit de considérer $(\tilde{f}_k)_{\gamma_j}$, continuation de \tilde{f}_k le long de γ_j pour $j, k = 0, 1, 2$. Dans le cas où $j = k$, $(\tilde{f}_k)_{\gamma_j} = \tilde{f}_k(\zeta_0)$ parce que $\gamma_j = \gamma_k$ dans U_k où \tilde{f}_k est uniforme. Dans le cas où $j \neq k$, nous remplaçons \tilde{f}_k par \tilde{f}_j en utilisant l'égalité (4.3.3) ou (4.3.4). Plus précisément, nous utilisons (4.3.3) si $j \equiv k + 1 \pmod{3}$ et (4.3.4) si $j \equiv k + 2 \pmod{3}$. Ceci étant fait, nous voyons que la multiformité vient seulement des coefficients de \tilde{f}_j qui sont de la forme $z^\lambda(1-z)^\mu$ (voir (4.4.6)), parce que \tilde{f}_j est uniforme sur γ_j .

Exemple 4.6.1. S'il s'agit de la continuation de \tilde{f}_0 le long de $\gamma_1(t)$, on exprime à l'avance \tilde{f}_0 par \tilde{f}_1 ;

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(\xi, \eta; A; g) = & C_S(A) z^{\lambda_S(A)} (1-z)^{\mu_S(A)} \tilde{f}_1(\xi, \eta; SA; g) \\ & + C_T(A) z^{\lambda_T(A)} \tilde{f}_1(\xi, \eta; TA; QAg). \end{aligned}$$

Le germe au point final après la continuation est égal à

$$\begin{aligned} & \exp\{2\pi i \mu_S(A)\} C_S(A) z^{\lambda_S(A)} (1-z)^{\mu_S(A)} \tilde{f}_1(\xi, \eta; SA; g) \\ & + C_T(A) z^{\lambda_T(A)} \tilde{f}_1(\xi, \eta; TA; QAg). \end{aligned}$$

$(p_*(\gamma_1))$ tourne positivement autour de z_1 . Voir la preuve du Corollaire 4.5.2. Signalons que $\mu_T(A) = 0$.) Voilà l'effet du prolongement qui s'est dévoilé comme les facteurs exponentiels.

Ensuite, nous continuons $\tilde{f}_q(\xi, \eta; A; g)$ le long de δ . Puisque $\tilde{f}_q(\xi, \eta; A; g)$ est uniforme dans $U_q \cap \Omega(r)$, il n'est plus nécessaire d'appliquer la formule de continuation.

Par conséquent, $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{\zeta_1}$ est exprimé par \tilde{f}_q à coefficients de la forme $z^\lambda(1-z)^\mu$.

Plus précisément, il existe $n \equiv q \pmod{3}$ tel que $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l$ soit exprimé comme suit (voir le Lemme 4.4.2):

Lemme 4.6.2. *Le germe $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l$ est exprimé par*

$$(4.6.1) \quad (\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l = \sum_{\sigma \in \{S, T\}^n} C_{l, \sigma}(A) z^{\lambda_\sigma(A)} (1-z)^{\mu_\sigma(A)} \tilde{f}_q(\xi, \eta; \hat{\sigma} A; g^\sigma)$$

où, pour chaque σ , g^σ est une fonction holomorphe dans $\omega(r)$,

$$(4.6.2) \quad C_{l, \sigma}(A) = \exp\{\pi i s_{l, \sigma}(A)\} C_{\sigma_n}(\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 A) \cdots C_{\sigma_2}(\sigma_1 A) C_{\sigma_1}(A),$$

si $\sigma = (\sigma_n, \dots, \sigma_1)$, et de plus

$$C_{l, \sigma}(A) = C_{l', \sigma}(A)$$

si $p(l)$ et $p(l')$ sont homotopes dans $\tilde{\mathcal{E}}$.

Nous ne précisons pas le nombre $s_{l, \sigma}(A)$. Mais il faut signaler que $s_{l, \sigma}(A)$ est une fonction linéaire de A à coefficients réels. Donc, $C_{l, \sigma}(A)$ admet éventuellement des pôles à $\{a \in \mathbb{Z}\} \cup \{b \in \mathbb{Z}\} \cup \{c \in \mathbb{Z}\}$.

En prolongeant le germe $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l$ sur $(U_q \cap \Omega(r)) \setminus \Sigma_q$, nous obtenons une fonction multiforme sur $(U_q \cap \Omega(r)) \setminus \Sigma_q$. Nous la notons par $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l, q}$.

Ecrivons $l \sim l'$ si et seulement si $p(l)$ et $p(l')$ sont homotopes dans $\tilde{\mathcal{E}}$ et $l \sim_q l'$ si et seulement s'il existe un chemin δ dans $(U_q \cap \Omega(r)) \setminus \Sigma_q$ tel que $l' = \delta \circ l$. Alors,

Remarque 4.6.3.

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_l = (\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l'} \quad \text{si } l \sim l',$$

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l, q} = (\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l', q} \quad \text{si } l \sim_q l'.$$

Nous précisons finalement la singularité de $(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l, q}$.

Proposition 4.6.4. *Supposons que $g(s)$ soit holomorphe dans $\omega(r)$. Alors,*

$$(4.6.3) \quad (\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l,0} = h_{l,0}^1\left(\frac{\eta}{\xi}, \xi, \eta, A\right) + h_{l,0}^2\left(\frac{\eta}{\xi}, \xi, \eta, A\right)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^a$$

$$(4.6.4) \quad (\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l,1} = h_{l,1}^1\left(\frac{\eta}{\xi}, \xi, \eta, A\right) + h_{l,1}^2\left(\frac{\eta}{\xi}, \xi, \eta, A\right)\left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)^b$$

$$(4.6.5)$$

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l,2} = h_{l,2}^1\left(\frac{\eta}{\xi}, \xi, \eta, A\right)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{(-a-b-c+1)/2} + h_{l,2}^2\left(\frac{\eta}{\xi}, \xi, \eta, A\right)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{(-a-b+c+1)/2}$$

où les $h_{l,j}^m(z, \xi, \eta, A)$ sont holomorphes dans $(\hat{\mathbb{C}} \setminus I_j) \times \Omega(r) \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})^3$ et elles admettent au plus des pôles à $\{a \in \mathbb{Z}\} \cup \{b \in \mathbb{Z}\} \cup \{c \in \mathbb{Z}\}$ ($j = 0, 1, 2$, $m = 1, 2$). De plus,

$$(4.6.6) \quad h_{l,j}^m(z, \xi, \eta, A) = h_{l',j}^m(z, \xi, \eta, A) \quad \text{si} \quad p(l) = p(l').$$

Preuve. Démontrons d'abord (4.6.3). Puisque $q = 0$, $n = 3m$ pour un entier non-négatif m dans le Lemme 4.6.2. Dans ce cas-là, il s'agit de la puissance $\lambda_\sigma(A)$ de z . Soient $\{S, T\}_\pm^{3m}$ des sous-ensembles de $\{S, T\}^{3m}$ définis par

$$\{S, T\}_\pm^{3m} = \{\sigma \in \{S, T\}^{3m}; \quad \prod_{j=1}^m \delta_{3j}(\sigma) = \pm 1\}.$$

Alors, $\{S, T\}^{3m}$ est la réunion disjointe de $\{S, T\}_+^{3m}$ et $\{S, T\}_-^{3m}$. D'après le Lemme 4.4.2 (4.4.3), on a

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{F}}_{Ag})_{l,0} &= \sum_{\sigma \in \{S, T\}_+^{3m}} C_{l,\sigma}(A)(1-z)^{\mu_\sigma(A)} \tilde{f}_0(\xi, \eta; \hat{\sigma}A; g^\sigma) \\ &+ \sum_{\sigma \in \{S, T\}_-^{3m}} C_{l,\sigma}(A)(1-z)^{\mu_\sigma(A)} \tilde{f}_0(\xi, \eta; \hat{\sigma}A; g^\sigma) z^a. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} h_{l,0}^1(z, \xi, \eta; A) &= \sum_{\sigma \in \{S, T\}_+^{3m}} C_{l,\sigma}(A)(1-z)^{\mu_\sigma(A)} \tilde{f}_0(\xi, \eta; \hat{\sigma}A; g^\sigma), \\ h_{l,0}^2(z, \xi, \eta; A) &= \sum_{\sigma \in \{S, T\}_-^{3m}} C_{l,\sigma}(A)(1-z)^{\mu_\sigma(A)} \tilde{f}_0(\xi, \eta; \hat{\sigma}A; g^\sigma). \end{aligned}$$

Alors, $h_{l,0}^m(z, \xi, \eta; A)$ ($m = 1, 2$) sont holomorphes dans $(\hat{\mathbb{C}} \setminus I_0) \times \Omega(r) \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})^3$ et admettent au plus des pôles à $\{a \in \mathbb{Z}\} \cup \{b \in \mathbb{Z}\} \cup \{c \in \mathbb{Z}\}$ par la Proposition 4.1.1.

Donc, nous avons établi (4.6.3).

On peut démontrer (4.6.4) [resp. (4.6.5)] de la même manière en notant qu'il s'agit de $(1 - z)^{\mu_\sigma(A)}$ [resp. $(z^{-1})^{-\lambda_\sigma(A) - \mu_\sigma(A)}$] dans le Lemme 4.6.2.

Comme nous avons vu après le Lemme 4.6.2, $C_{l,\sigma}(A) = C_{l',\sigma}(A)$ si $p(l) = p(l')$.

Donc (4.6.6) est évidente.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 5. SUJETS D'AVENIR

Nous nous sommes bornés à un opérateur particulier, mais en revanche, nous avons obtenu des résultats précis qui nous donnent des informations sans doute universelles et qui nous imposent de nouveaux problèmes intéressants.

Ce qu'il faut faire d'abord est de vérifier si la représentation hypergéométrique de la solution reste encore valable après des perturbations de L . Regardons la formule (2.1.12) de la solution. Elle montre que L se réduit à un opérateur différentiel ordinaire fuchsien du premier ordre M_ρ par un changement d'inconnue. Ce changement défini par une série infinie des termes différentiels est un opérateur d'évolution $S^\kappa(\gamma; t, R(\partial_x))$ d'un problème de Cauchy fuchsien (voir la Proposition 2.1.1 et la Remarque 2.1.2). Cela nous amène à l'idée suivante: Nous pourrions développer des opérateurs d'évolution plus généraux en séries des termes différentiels et déterminer la famille des opérateurs aux dérivées partielles L qui se réduisent à M_ρ . Pour telles équations, les solutions devront se représenter par des fonctions hypergéométriques.

Deuxièmement, il est aussi important de caractériser les équations dont les solutions admettent des représentations hypergéométriques. Rappelons-nous que l'espace vectoriel des solutions ramifiées $L^{-1}f$ quand f varie est uni-dimensionnel *modulo* les fonctions holomorphes. Il y a dans ce sens une analogie entre ce problème et la théorie des équations différentielles ordinaires. Comme nous avons vu, notre solution se représente par $(F_{(\alpha, \beta, \gamma)}g)(\xi, \eta)$ et son comportement local près de chaque source des branches correspond à celui global de la fonction hy-

pergéométrie de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$. D'autre part, d'après la théorie globale des équations différentielles ordinaires, $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ est caractérisée comme la solution des équations fuchsienues qui ont trois points singuliers réguliers. Alors, le problème mentionné ci-dessus est équivalent au suivant: *caractériser les variétés qui portent les singularités et qui correspondent aux points singuliers réguliers*. Cela nous amènera à une autre définition du mot *fuchsien* en théorie des équations aux dérivées partielles que celle de Baouendi-Goulaouic [1].

APPENDICE

On appelle

$$(a) \quad E(p, q) : \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{q}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{p}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

équation d'Euler-Poisson-Darboux. On voit facilement que $u = (\xi - a)^{-p}(\eta - a)^{-q}$ est une solution de $E(p, q)$ quel que soit a , et que si u est une solution de $E(1 - q, 1 - p)$, alors $(\eta - \xi)^{1-p-q}u$ est une solution de $E(p, q)$ ([3] §346).

Posons

$$(b) \quad (D_{(p,q)}\phi)(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1} \phi(\xi + (\eta - \xi)t) dt$$

où $\phi(s)$ est une fonction arbitraire. On voit facilement que

$$(D_{(p,q)}\phi)(\xi, \eta) = (D_{(q,p)}\phi)(\eta, \xi).$$

$D_{(p,q)}\phi$ s'écrit, par un changement de variable, comme

$$(D_{(p,q)}\phi)(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} (\eta - \xi)^{1-p-q} \int_{\xi}^{\eta} (s - \xi)^{q-1} (\eta - s)^{p-1} \phi(s) ds,$$

et elle est une solution de $E(p, q)$. De plus, sa restriction à la variété $\{\xi = \eta\}$ est égale à $\phi(\xi)$.

Si l'on pose $x = \xi + \eta$, $t = \xi - \eta$, alors (a) devient

$$(c) \quad t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + (p+q) \frac{\partial u}{\partial t} - (p-q) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

C'est une équation fuchsienne par rapport à l'hypersurface initiale $\{t = 0\}$ dont les exposants sont 0 et $1 - p - q$. Si donc $1 - p - q$ n'est pas entier positif, cette

équation a une et une seule solution holomorphe si l'on se donne une condition initiale holomorphe $u|_{t=0} = u_0(x)$ d'après le théorème de Baouendi-Goulaouic [1].

Soit $\phi(s)$ une fonction analytique dans un voisinage de l'origine ayant éventuellement une singularité à l'origine. Si $p + q$ n'est pas entier non positif, $(D_{(p,q)}\phi)(\xi, \eta)$ est égale à la solution unique u de $E(p, q)$ sous la condition initiale $u|_{\xi=\eta} = \phi(\xi)$.

Maintenant, nous allons exprimer $(F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ au moyen des $D_{(p,q)}\phi$. Rappelons le théorème de M. Appell qui caractérise les solutions de l'équations $E(p, q)$ (voir [3] §354).

Théorème A (M. Appell). *Si $u(\xi, \eta)$ est une solution de $E(p, q)$, alors il existe deux fonctions $\phi(s)$ et $\psi(s)$ telles que*

$$(d) \quad u = D_{(p,q)}\phi + (\eta - \xi)^{1-p-q} D_{(1-q,1-p)}\psi.$$

Puisque $(F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g)(\xi, \eta)$ est une solution de $E(\alpha, \beta - \gamma + 1)$, elle doit s'exprimer sous la forme (d).

D'autre part, en comparant (b) avec (4.1.7), on obtient

$$(e) \quad f_1(\xi, \eta; \alpha, \beta, \gamma; g) = \eta^\alpha (D(\beta, \gamma - \beta; \xi, \eta; s^{-\alpha}g(s)))(\xi, \eta).$$

Ceci et la formule de continuation (4.2.2) impliquent la relation que nous voulions:

Proposition B.

$$F_{(\alpha,\beta,\gamma)}g = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\beta)} D_{(\alpha,\beta-\gamma+1)}(s^{\gamma-\alpha-1}Q_{\gamma-\alpha}^\beta g) \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (\xi - \eta)^{\gamma-\alpha-\beta} D_{(\gamma-\beta,1-\alpha)}(s^{\beta-1}g).$$

Par cette proposition avec le Théorème 1.2.1 et le Corollaire 1.1.3, la solution ramifiée $L^{-1}f$ s'exprime par des $D_{(p,q)}\phi$.

Notre équation est une modification de l'équation d'Euler-Poisson-Darboux au cas des exposants variables (comparer (1.1.1) avec (c)). Alors, nous pouvons dire ce que nous avons fait dans cet article comme suit :

Les singularités de la solution du problème de Cauchy de l'équation d'Euler-Poisson-Darboux à exposants variables et à donnée holomorphe s'expriment par celles de l'équation d'Euler-Poisson-Darboux à donnée singulière.

Des études plus générales sur celles-ci, c'est-à-dire les singularités des problèmes de Cauchy du type fuchsien à données singulières ont été faites par exemple par Urabe [17] et par l'auteur [6].

REMERCIEMENTS

Lorsque l'auteur a commencé à s'attaquer au comportement des solutions des équations fuchsiennes aux dérivées partielles aux voisinages des points où des exposants admettent des valeurs entières, le problème lui a paru difficile parce que personne ne l'avait abordé.

L'auteur voudrait à cette occasion remercier du fond du cœur à Professeur Norio Shimakura de son encouragement et des discussions utiles.

Pour finir, l'auteur voudrait également remercier à tous ses collègues à l'Université de Tohoku de lui donné la chance d'aller étudier en France.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Cauchy problem with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 455-475
- [2] M. Y. Chi, *On the Cauchy problem for second order hyperbolic equation in two variables with initial data given on the parabolic degenerating line*, Scientia Sinica **12-10** (1963), 1413-1424
- [3] J. G. Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, livre IV*, Gauthier-Villars et C^{ie}, (1915)
- [4] J. Dunau, *Un problème de Cauchy caractéristique*, J. Math. pures et appl. **69** (1990), 369-402
- [5] A. Erdélyi *et al.*, *Higher Transcendental Functions Vol 1*, McGraw-Hill, (1953)
- [6] S. Fujiié, *Singular Cauchy problems of higher order with characteristic initial surface*, J. of Math. of Kyoto Univ. **33-1** (1993), 1-27
- [7] S. Fujiié, *Représentation hypergéométrique des singularités de la solution du problème de Cauchy caractéristique à données holomorphes*, Comm. Partial Differential Equations **18 (9 & 10)** (1993), 1589-1629
- [8] L. Gårding, T. Kotake et J. Leray, *Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (problème de Cauchy; I bis VI)*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 263-361
- [9] V. Guillemin and D. Schaeffer, *On a certain class of Fuchsian partial differential equations*, Duke. Math. J. **44** (1977), 157-199
- [10] Y. Hamada, *The singularities of solutions of Cauchy problem*, Pure. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **5** (1969), 21-40
- [11] J. Leray, *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389-429
- [12] S. Ouchi, *Singularities of solution of equations with noninvolution characteristics I; The case of second order Fuchsian equations*, J. Math. Soc. Japan **45-2** (1993)
- [13] H. Tahara, *Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations*, Japan. J. Math. **5-2** (1979), 245-347
- [14] N. Takayama, *Propagation of singularities of solutions of the Euler-Darboux equation and a global structure of the space of holonomic solutions I*, Funkcial.-Ekvac. **35-2** (1992), 343-403
- [15] J. Urabe, *Hamada's theorem for a certain type of the operators with double characteristics*, J. of Math. of Kyoto Univ. **23-2** (1983), 301-339
- [16] J. Urabe, *Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problem II*, J. Math. Kyoto Univ. **28-2** (1988), 335-342