

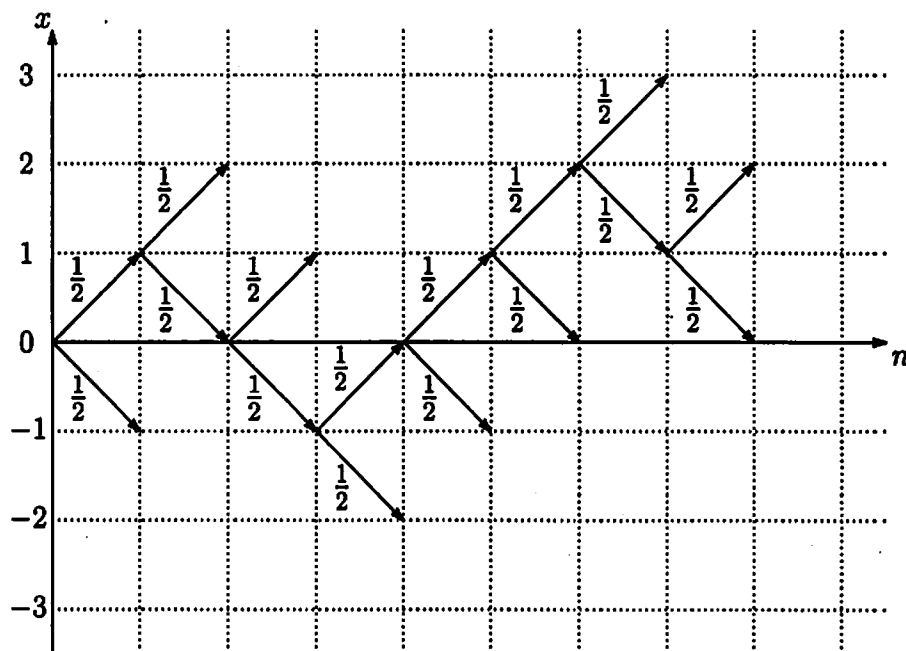
数学クイズ*

担当: 楠岡誠一郎

日常生活の中で確率という言葉をよく耳にする。例えば、天気予報での降水確率、宝くじの当選確率はよく聞く言葉であろう。また、誰しも何かを決断するとき、成功する確率が高いから挑戦すると決めたり、逆に失敗する確率が高いからやめておこうと考えたことがあるに違いない。では、確率とは何かについて考えたことはあるだろうか？ もし「確率とは何か？」と誰かに聞かれたらその場で分かりやすく説明できるだろうか？ おそらく、「確率」とは何かを説明するのは非常に難しいことであり、日常生活では何となく確率という言葉を使っていることが多いであろう。

ところで、数学には確率論という分野があり、この「確率論」においては確率とは何か唯一つの決まりの下で定義されている。「確率論」での確率の定義を学ぶには大学の理学部の3年生程度の数学の専門知識が必要なため、ここでは紹介することはできない。しかし、大学で習う知識がなくとも扱うことのできる確率の話題はたくさんあり、実際高校での数学の授業でも「確率」という内容がある。そこで「確率とは何か？」を考えるのは辞め、今日は高校までの知識で扱うことのできる話題の一つであるランダムウォークについて考えることにしよう。

ここでは1次元のランダムウォークを考える。紙面の関係上、先に図を書くことにしよう。



時刻0に位置0に人が立っているとし、時刻が1進むごとに硬貨を投げ、表が出たら+1だけ移動し、裏が出たら-1だけ移動するとする。ただし、硬貨の表が出る確率と裏が出る確率は共に $\frac{1}{2}$ であり、硬貨の表裏の出方は他の時刻に投げた結果とは無関係である。(独立である)とする。この人が時刻 n で立っている位置を S_n と書くことにすると、 S_n は整数であり、 n 回投げた硬貨の表裏の出方で決まっている。つまり、 S_n は硬貨の表裏の出方によって決まる関数である。この S_n をランダムウォークと呼ぶ。日本語では「酔歩」とも呼ばれる。それは酔っぱらいの様に不規則にジグザグと動くからである。硬貨の表裏の出方には確率が与えられているから、 S_n が x となる確率というものを考えることができる。これを $P(S_n = x)$ と書くことにしよう。

さて、ランダムウォークとは何かを理解するため次の問題を考えてみよう。

問題1

時刻 $n = 3, 4, 5$ において、この人が位置 x に立っている確率 $P(S_n = x)$ を求めよ。

問題2

時刻 n において、この人が位置 x に立っている確率 $P(S_n = x)$ を求めよ。

これまで時刻0で位置0から出発するランダムウォークのみを考えてきたが、他の位置から出発するランダムウォークも考えよう。時刻0に位置 x に人が立っているとし、先程と同様に時刻が1進むごとに硬貨を投げ、表が出たら+1だけ移動し、裏が出たら-1だけ移動するとする。この時刻0に位置 x に立っていた人が時刻 n で立っている位置を S_n^x と書くことにする。この記号を使うと、先程の S_n は S_n^0 と書くことができる。

先程 S_n が x となる確率を $P(S_n = x)$ と書くことにしたが、もっと一般的に A という事象がおこる確率を $P(A)$ と書くことにしよう。例えば、 n を自然数、 x, y を整数とし、 A を「時刻 n での位置 S_n^x が y である」という事象とすると、

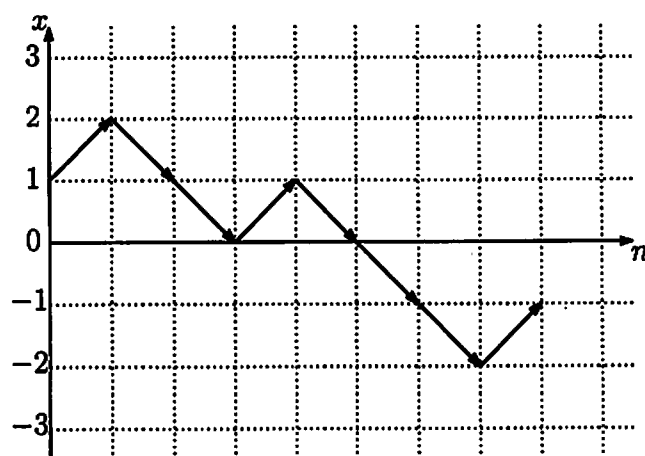
$$\begin{aligned} A \text{ が起こる確率} &= P(\text{時刻 } n \text{ での位置 } S_n^x \text{ が } y \text{ である}) \\ &= P(S_n^x = y) \end{aligned}$$

となるのである。

また、これからは自然数 n を決めるごとのランダムウォークの位置 S_n^x だけでなく、ランダムウォークの動きの軌跡、つまり S_n^x の $n = 1, 2, 3, \dots$ を同時に考えたものである $(S_0^x, S_1^x, S_2^x, \dots)$ を考えるので、位置 x を出発するランダムウォークを S^x と書くことにする。例えば、コインの表裏の出方が

(表、裏、裏、表、裏、裏、裏、表)

である場合、位置1を出発するランダムウォーク S^1 の時刻8までの軌跡は次のようになる。



このとき、勿論 $S_1^x = 2, S_2^x = 1, S_3^x = 0, S_4^x = 1, S_5^x = 0, S_6^x = -1, S_7^x = -2, S_8^x = -1$ である。

ランダムウォークの軌跡 S^x を扱う例を考えよう。 n を自然数、 x を 0 でない整数とし、 A を「 S^x が時刻 n までに 0 に到達する」という事象とする。この A という事象はもちろん S_n^x の値だけで決まるものではない。自然数 k によりひとつずつ決まる S_k^x の値を n 以下の全ての自然数 k に対して考えることによって初めて A は決まるのである。このことを同値関係の記号 $\Leftrightarrow$ を使って分かりやすく書き直すと次のようになる。

S^x が時刻 n までに 0 に到達する

$\Leftrightarrow$ ある n 以下の自然数 k が存在して $S_k^x = 0$ を満たす

これでランダムウォークの軌跡 S^x を考えるとはどういうことかはっきりしたことであろう。それではランダムウォークの軌跡に関する問題を考えてみよう。

問題 3

n を自然数とし、 S^0 が時刻 n までに -2 にも 2 にも到達しない確率

$$P(S^0 \text{ が時刻 } n \text{ までに } -2 \text{ にも } 2 \text{ にも到達しない})$$

を求めよ。

問題 4

n を自然数とし、時刻 n までに S^0 が -2 よりも先に 2 に到達する確率

$$P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{ が } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})$$

を求めよ。

問題5

n を自然数とし、時刻 n までに S^{-1} が -2 よりも先に 2 に到達する確率

$$P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^{-1} \text{ が } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})$$

を求めよ。

問題6

n を自然数とし、時刻 n までに S^0 が -1 よりも先に 2 に到達する確率

$$P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{ が } -1 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})$$

を求めよ。

さて、ランダムウォークにも慣れてきたことであろう。いよいよ難問に取り組むことにしよう。次の問題は大学の授業で扱うこともある問題である。しかし、ここまでの問題を解いてきた諸君にとって、次の問題を解くことは決して不可能ではないはずである。

問題7

n, x, y を自然数とする。「 S^x が時刻 n までに 0 に到達することなく、時刻 n で y にいる確率」が、「 S^x が時刻 n で y にいる確率」から「 S^x が時刻 n で $-y$ にいる確率」を引いたものに等しいこと、すなわち

$$\begin{aligned} (*) \quad & P(S_n^x = y \text{ かつ、全ての } k = 1, 2, \dots, n-1 \text{ に対して } S_k^x \neq 0) \\ & = P(S_n^x = y) - P(S_n^x = -y) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ。

問題7で示す式(*)はランダムウォークの反射原理と呼ばれるものである。この「反射」という言葉は問題を解くヒントになるだろう。

諸君の健闘を祈る！