東北大学オープンキャンパス２０１３

数学クイズ解答*

担当: 楠岡誠一郎

問題１の解答)

$$P(S_3=x)=\begin{cases}0, & x=-2,0,2\text{ のとき}\\ \frac{3}{8}, & x=-1,1\text{ のとき}\\ \frac{1}{8}, & x=-3,3\text{ のとき}\\ 0, & x>3\text{ または }x<-3\text{ のとき}\end{cases}$$

$$P(S_4=x)=\begin{cases}\frac{3}{8}, & x=0\text{ のとき}\\ 0, & x=-3,-1,1,3\text{ のとき}\\ \frac{1}{4}, & x=-2,2\text{ のとき}\\ \frac{1}{16}, & x=-4,4\text{ のとき}\\ 0, & x>4\text{ または }x<-4\text{ のとき}\end{cases}$$

$$P(S_5=x)=\begin{cases}0, & x=-4,-2,0,2,4\text{ のとき}\\ \frac{5}{16}, & x=-1,1\text{ のとき}\\ \frac{5}{32}, & x=-3,3\text{ のとき}\\ \frac{1}{32}, & x=-5,5\text{ のとき}\\ 0, & x>5\text{ または }x<-5\text{ のとき}\end{cases}$$

問題２の解答) まず、n 回の硬貨投げによって到達できる位置の最大は n であり、最小が $-n$ であるから、

$$n-|x|\text{ が負の数のとき、}\quad P(S_n=x)=0$$

となる。

次に x が n 以下の負でない数の場合の $P(S_n=x)$ を考える。S_n が x となるためには、硬貨を投げた n 回の内、表が出た回数が裏が出た回数よりも x 回多いことが必要十分である。よって、n 回の内、表が出る回数が $x+\frac{n-x}{2}$、裏が出る回数が $\frac{n-x}{2}$ となる確率を求めればよい。ここで、硬貨の裏が出る回数は自然数でなければいけないから、$n-x$ が奇数のときは $S_n=x$ とはならない。つまり、

$$x\text{ が }n\text{ 以下の負でない数で、}n-x\text{ が奇数のとき、}\quad P(S_n=x)=0$$

となることがわかる。$n-x$ が偶数のときを考える。n 回硬貨を投げたときの表裏の出方の総数は 2^n である。そのうち、裏が出る回数が $\frac{n-x}{2}$ となるものの数は n 個の中から $\frac{n-x}{2}$ 個を選ぶ選び方の数と等しいので、組み合わせの記号を使うと ${}_nC_{\frac{n-x}{2}}$ と書くことができる。よって、

$$x \text{ が } n \text{ 以下の負でない数で、} n-x \text{ が偶数のとき、} \quad P(S_n = x) = \frac{{}_nC_{\frac{n-|x|}{2}}}{2^n}$$

となる。

x が n 以上の負の数の場合は上の議論で表と裏を入れ替えれば良く、同様に計算すると

$$x \text{ が } n \text{ 以上の負の数で、} n-|x| \text{ が奇数のとき、} \quad P(S_n = x) = 0$$

$$x \text{ が } n \text{ 以上の負の数で、} n-|x| \text{ が偶数のとき、} \quad P(S_n = x) = \frac{{}_nC_{\frac{n-|x|}{2}}}{2^n}$$

となる。

まとめると次の様になる。

$$P(S_n = x) = \begin{cases} \frac{{}_nC_{\frac{n-|x|}{2}}}{2^n}, & n-|x| \text{ が非負の偶数のとき} \\ 0, & n-|x| \text{ が奇数または負の数のとき} \end{cases}$$

問題３の解答) まず、

$$P(S_1^0 = x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = -1, 1 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0,\ x > 2 \text{ または } x < -2 \text{ のとき} \end{cases}$$

より、S^0 が時刻 1 までに -2 または 2 に到達することはない。よって、

$$P(S^0 \text{が時刻 1 までに} -2 \text{ にも 2 にも到達しない}) = 1$$

である。$S_1^0 = 1$ のとき 1 回目の硬貨投げで表が出ていて、S^0 が時刻 2 までに -2 にも 2 にも到達しないためには 2 回目の硬貨投げで裏が出る必要がある。同様に $S_1^0 = -1$ のとき 1 回目の硬貨投げで裏が出ていて、S^0 が時刻 2 までに -2 にも 2 にも到達しないためには 2 回目の硬貨投げで表が出る必要がある。よって、

$$\begin{aligned} &P(S^0 \text{が時刻 2 までに} -2 \text{ にも 2 にも到達しない}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、S^0 が時刻 2 までに -2 にも 2 にも到達しないとき、$S_2^0=0$ となっているので 3 回目の硬貨投げで表が出ても裏が出ても時刻 3 で -2 または 2 に到達することはない。よって、

$$\begin{aligned}&P(S^0\text{が時刻 3 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない})\\&=P(S^0\text{が時刻 2 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない})=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成り立ち、そして

$$\begin{aligned}&P(S^0\text{が時刻 3 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない、かつ } S_3^0=1)\\&=P(S^0\text{が時刻 3 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない、かつ } S_3^0=-1)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。先程と同様に、$S_3^0=1$ のとき S^0 が時刻 4 で -2 にも 2 にも到達しないためには 4 回目の硬貨投げで裏が出る必要があり、$S_1^0=-1$ のとき S^0 が時刻 4 で -2 にも 2 にも到達しないためには 4 回目の硬貨投げで表が出る必要がある。よって、

$$\begin{aligned}&P(S^0\text{が時刻 4 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない})\\&=\frac{1}{2}\times P(S^0\text{が時刻 3 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない、かつ } S_3^0=1)\\&\quad+\frac{1}{2}\times P(S^0\text{が時刻 3 までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない、かつ } S_3^0=-1)\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。これを繰り返すと、求める値は

$$P(S^0\text{が時刻 } n \text{ までに} -2 \text{にも 2 にも到達しない})=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} & n\text{が奇数のとき}\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} & n\text{が偶数のとき}\end{cases}$$

となる。

問題 4 の解答)

解答その 1. 時刻 n までに S^0 が -2 よりも先に 2 に到達するとき、このときの n 回の硬貨投げの表裏の出方の表と裏を入れ替えると、入れ替えた後の S^0 は時刻 n までに 2 よりも先に -2 に到達する。これは、時刻 n までに S^0 が -2 よりも先に 2 に到達するような表裏の出方の数と時刻 n までに S^0 が 2 よりも先に -2 に到達するような表裏の出方の数が

等しいことを意味している。従ってこれらの確率も等しいから

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{よりも先に}\, 2\, \text{に到達する}) \\
&= P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が}\, 2\, \text{よりも先に} -2\, \text{に到達する})
\end{aligned}
$$

となる。また、S^0 は「時刻 n までに -2 よりも先に 2 に到達する」,「時刻 n までに 2 よりも先に -2 に到達する」,「時刻 n までに -2 にも 2 にも到達しない」のどれかを必ず満たすので、

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{よりも先に}\, 2\, \text{に到達する}) \\
&+ P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が}\, 2\, \text{よりも先に} -2\, \text{に到達する}) \\
&+ P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{にも}\, 2\, \text{にも到達しない}) = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これと上の式を合わせると、

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{よりも先に}\, 2\, \text{に到達する}) \\
&= \frac{1}{2}\left\{1 - P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{にも}\, 2\, \text{にも到達しない})\right\}
\end{aligned}
$$

が得られる。これと問題 3 の結果を合わせると、

$$
P(\text{時刻}\, n\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{よりも先に}\, 2\, \text{に到達する}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & n\, \text{が奇数のとき} \\ \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} & n\, \text{が偶数のとき} \end{cases}
$$

となる。

解答その 2. まず、

$$
P(S_1^0 = x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = -1, 1\, \text{のとき} \\ 0, & x = 0,\ x > 2\, \text{または}\, x < -2\, \text{のとき} \end{cases}
$$

$$
P(S_2^0 = x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0\, \text{のとき} \\ \frac{1}{4}, & x = -2, 2\, \text{のとき} \\ 0, & x = -1, 1,\ x > 3\, \text{または}\, x < -3\, \text{のとき} \end{cases}
$$

に注意すると、

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻}\, 1\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{よりも先に}\, 2\, \text{に到達する}) = 0 \\
&P(\text{時刻}\, 2\, \text{までに}\, S^0 \text{が} -2\, \text{よりも先に}\, 2\, \text{に到達する}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

となる。以後、n が 3 以上の場合について考える。$S_2^0=2$ のとき、S^0 は時刻 2 までに -2 より先に 2 に到達している。逆に $S_2^0=-2$ のとき、S^0 は時刻 2 までに 2 より先に -2 に到達している。$S_2^0=0$ のときは、S^0 は時刻 2 において未だ 2 にも -2 にも到達していなく、これ以降 -2 より先に 2 に到達する確率は S^0 が時刻 3 から時刻 n までに -2 より先に 2 に到達する確率に等しい。従って、次の方程式が立てられる。

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{が } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\\
&= \frac{1}{4} + P(S^0\text{が時刻 } 2 \text{ までに } -2 \text{ または } 2 \text{ に到達せず、}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{時刻 } 3 \text{ から時刻 } n \text{ までに } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})
\end{aligned}
$$

同様に S_4^0 について考えると、

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{が } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\\
&= \frac{1}{4} + P(S^0\text{が時刻 } 2 \text{ までに } -2 \text{ または } 2 \text{ に到達せず、時刻 } 4 \text{ で } 2 \text{ に到達する})\\
&\quad + P(S^0\text{が時刻 } 4 \text{ までに } -2 \text{ または } 2 \text{ に到達せず、}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{時刻 } 5 \text{ から時刻 } n \text{ までに } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + P(S^0\text{が時刻 } 4 \text{ までに } -2 \text{ または } 2 \text{ に到達せず、}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{時刻 } 5 \text{ から時刻 } n \text{ までに } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})
\end{aligned}
$$

が得られる。これを繰り返すことにより、k を n より小さい最大の偶数とすると、

$$
\begin{aligned}
&P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{が } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \cdots + \overbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}^{(\frac{k}{2}-1)\text{個}}\times\frac{1}{4}\\
&\quad + P(S^0\text{が時刻 } k+1 \text{ から時刻 } n \text{ までに } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} + P(S^0\text{が時刻 } k \text{ までに } -2 \text{ または } 2 \text{ に到達せず、}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{時刻 } k+1 \text{ から時刻 } n \text{ までに } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})
\end{aligned}
$$

が得られる。n が 3 以上の奇数のとき $n=k+1$ であり、奇数時刻で 2 に到達することはない。よって、n が 3 以上の奇数のとき

$$
P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{が } -2 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}
$$

となる。

n が 3 以上の偶数のとき $n=k+2$ である。また、偶数時刻では S^0 の位置は偶数に限られるから、S^0 が時刻 k までに -2 または 2 に到達しないということは $S^0_k=0$ である。よって、問題 3 の結果を使うと、

$P(S^0$が時刻 k までに -2 または 2 に到達せず、

時刻 $k+1$ から時刻 n までに -2 よりも先に 2 に到達する$)$

$=P(S^0$が時刻 k までに -2 または 2 に到達せず、

$k+1, k+2$ 回目の硬貨投げで表が出る$)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}\times\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

従って、上の式と合わせると、n が 3 以上の偶数のとき

$P($時刻 n までに S^0が -2 よりも先に 2 に到達する$)$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

となる。

以上をまとめると、

$$P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0\text{が } -2 \text{ よりも先に 2 に到達する})=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & n\text{ が奇数のとき}\\ \dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} & n\text{ が偶数のとき}\end{cases}$$

となる。

問題 5 の解答)

$$P(S_1^{-1}=x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\text{ のとき}\\ \frac{1}{2}, & x=-2\text{ のとき}\\ 0, & x=-1,\ x>1\text{ または } x<-3\text{ のとき}\end{cases}$$

であるから、

(1) $P($時刻 n までに S^{-1}が -2 よりも先に 2 に到達する$)$
$=P(S_1^{-1}=0$ であり、S^{-1}が時刻 2 から時刻 n までに -2 よりも先に 2 に到達する$)$

が成り立つ。ここで、$S_1^{-1}=0$ のときの S^{-1} の時刻 2 から時刻 n までの軌跡と S^0 の時刻

1から時刻$n-1$までの軌跡の出方はどちらも$n-1$回の硬貨投げによって決まるので

$(S_1^{-1}=0$であり､S^{-1}が時刻2から時刻nまでに-2よりも先に2に到達する

ようなn回の硬貨投げの表裏の出方の総数)

$=(S^0$が時刻$n-1$までに-2よりも先に2に到達するような

$n-1$回の硬貨投げの表裏の出方の総数)

が成り立つ。よって、

$P(S_1^{-1}=0$であり､S^{-1}が時刻2から時刻nまでに-2よりも先に2に到達する)

$=\dfrac{1}{2^n}\times(S_1^{-1}=0$であり､$S^{-1}$が時刻2から時刻$n$までに$-2$よりも先に2に

到達するような硬貨投げの表裏の出方の総数)

$=\dfrac{1}{2^n}\times(S^0$が時刻$n-1$までに$-2$よりも先に2に到達するような

硬貨投げの表裏の出方の総数)

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}\times(S^0$が時刻$n-1$までに$-2$よりも先に2に到達するような

硬貨投げの表裏の出方の総数)

$=\dfrac{1}{2}\times P(S^0$が時刻$n-1$までに$-2$よりも先に2に到達する)

となる。(1)と合わせると、

$P($時刻nまでにS^{-1}が-2よりも先に2に到達する)

$=\dfrac{1}{2}\times P(S^0$が時刻$n-1$までに$-2$よりも先に2に到達する)

となる。問題4の結果より、

$$P(\text{時刻}n\text{までに}S^{-1}\text{が}-2\text{よりも先に}2\text{に到達する})=\begin{cases}\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} & n\text{が偶数のとき}\\[2ex] \dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+3}{2}} & n\text{が奇数のとき}\end{cases}$$

が得られる。

問題6の解答) $n=1,2$のときは簡単であるので、$n\geq 3$の場合を考えよう。時刻2までのS^0の動きを見てみると、

1回目､2回目の硬貨投げの結果が(表、表) $\Longrightarrow$ -1よりも先に2に到達

1回目､2回目の硬貨投げの結果が(表、裏) $\Longrightarrow$ 時刻2までに-1にも2にも到達しない

1回目の硬貨投げの結果が(裏) $\Longrightarrow$ 2により先に-1に到達

であるから、

$$P(\text{時刻}\,n\,\text{までに}\,S^0\text{が}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$
$$=\frac{1}{4}+P(1\,\text{回目、}2\,\text{回目の硬貨投げの結果が (表、裏) であり、}$$
$$S^0\text{が時刻}\,3\,\text{から時刻}\,n\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$

が成り立つ。ここで、1回目、2回目の硬貨投げの結果が (表、裏) のときの S^0 の時刻3から時刻 n までの軌跡と S^0 の時刻1から時刻 $n-2$ までの軌跡の出方はどちらも $n-2$ 回の硬貨投げによって決まるので、

$$(1\,\text{回目、}2\,\text{回目の硬貨投げの結果が (表、裏) であり、}S^0\text{が時刻}\,3\,\text{から時刻}\,n-2\,\text{までに}$$
$$-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達するような}\,n\,\text{回の硬貨投げの表裏の出方の総数})$$
$$=(S^0\text{が時刻}\,n-2\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達するような}$$
$$n-2\,\text{回の硬貨投げの表裏の出方の総数})$$

が成り立つ。よって、

$$P(1\,\text{回目、}2\,\text{回目の硬貨投げの結果が (表、裏) であり、}$$
$$S^0\text{が時刻}\,3\,\text{から時刻}\,n\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$
$$=\frac{1}{2^n}\times(1\,\text{回目、}2\,\text{回目の硬貨投げの結果が (表、裏) であり、}S^0\text{が時刻}\,3\,\text{から時刻}\,n-2$$
$$\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達するような}\,n\,\text{回の硬貨投げの表裏の出方の総数})$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^{n-2}}\times(S^0\text{が時刻}\,n-2\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達するような}$$
$$n-2\,\text{回の硬貨投げの表裏の出方の総数})$$
$$=\frac{1}{4}\times P(S^0\text{が時刻}\,n-2\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$

となる。これらを合わせると、

$$P(\text{時刻}\,n\,\text{までに}\,S^0\text{が}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times P(S^0\text{が時刻}\,n-2\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$

となる。これを繰り返すと、n が奇数のとき、

$$P(\text{時刻}\,n\,\text{までに}\,S^0\text{が}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$
$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$
$$+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\times P(S^0\text{が時刻}\,1\,\text{までに}-1\text{よりも先に}\,2\,\text{に到達する})$$

となり、n が偶数のとき、

$$\begin{aligned}&P(\text{時刻 } n \text{ までに } S^0 \text{が} -1 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}\\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} \times P(S^0 \text{が時刻 } 2 \text{ までに} -1 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する})\end{aligned}$$

となる。一方、具体的に計算することにより、

$$P(S^0 \text{が時刻 } 1 \text{ までに} -1 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する}) = 0$$
$$P(S^0 \text{が時刻 } 2 \text{ までに} -1 \text{ よりも先に } 2 \text{ に到達する}) = \frac{1}{4}$$

であるから、等比級数の和の公式から

$$P(\text{時刻} n \text{までに} S^0 \text{が} -1 \text{よりも先に} 2 \text{に到達する}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & n \text{ が奇数のとき} \\ \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

が得られる。

問題 7 の解答) S^x が時刻 n で y にいるような n 回の硬貨投げの表裏の出方の総数を A と書き、S^x が時刻 n までに 0 に到達することなく、時刻 n で y にいるような n 回の硬貨投げの表裏の出方の総数を B と書くことにする。このとき、B を用いると

$$P(S_n^x = y \text{ かつ、全ての } k = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ に対して } S_k^x \neq 0) = \frac{B}{2^n}$$

と表せる。次に、$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して S^x が時刻 n で y にいるような n 回の硬貨投げの表裏の出方の中で、S^x が時刻 k で初めて 0 に到達するような表裏の出方の総数を A_k と書くことにする。このとき、

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + B \tag{2}$$

である。ここで、A_k について考える。S^x が時刻 k で初めて 0 に到達し、時刻 n で y にいるような硬貨投げの表裏の出方に対して、$k+1$ 回目から n 回目の硬貨投げの表裏の出方の表と裏を入れ替えたものを考えると、入れ替えた後の S^x は時刻 k で初めて 0 に到達し、時刻 n で $-y$ にいる。従って、「S^x が時刻 k で初めて 0 に到達し、時刻 n で y にいるような硬貨投げの表裏の出方」の総数と、「S^x が時刻 k で初めて 0 に到達し、時刻 n で $-y$ に

いるような硬貨投げの表裏の出方」の総数は等しく、その数は A_k である。このことを数式で書くと、

$$
\begin{aligned}
&(S^x\text{が時刻 } k \text{ で初めて } 0 \text{ に到達し、} S_n^x = y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数})\\
&= (S^x\text{が時刻 } k \text{ で初めて } 0 \text{ に到達し、} S_n^x = -y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数})\\
&= A_k
\end{aligned}
$$

となる。これを $k=1$ から $k=n-1$ まで足し合わせると、

$$
\begin{aligned}
&(S^x\text{が時刻 } n \text{ までに } 0 \text{ に到達し、} S_n^x = y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数})\\
&= (S^x\text{が時刻 } n \text{ までに } 0 \text{ に到達し、} S_n^x = -y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数})\\
&= A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、S^x が時刻 n で $-y$ にいるとき必ず 0 を通過しなくてはいけないから、

$$
\begin{aligned}
&(S^x\text{が時刻 } n \text{ までに } 0 \text{ に到達し、} S_n^x = -y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数})\\
&= (S_n^x = -y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数})
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって、

$$(S_n^x = -y \text{ となる硬貨投げの表裏の出方の総数}) = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$$

であり、これを確率の形で書くと、

$$P(S_n^x = -y) = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}}{2^n}$$

となる。これを踏まえると、(2) から

$$
\begin{aligned}
&P(S_n^x = y \text{ かつ、全ての } k = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ に対して } S_k^x \neq 0)\\
&= \frac{B}{2^n} = \frac{A}{2^n} - \frac{1}{2^n} \times (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}) = P(S_n^x = y) - P(S_n^x = -y)
\end{aligned}
$$

となる。よって、(*) は示された。