数学クイズの解説と解答例

2011 年 7 月 27 日 (水) – 28 日 (木)　東北大学理学部オープンキャンパス
担当　古宇田 悠哉

1.　(解答例) $a \neq 0$ であるから，$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ が成り立つとき，$x \neq 0$ であることに注意して下さい．まず，与えられた方程式の両辺を x^2 で割ると

$$ax^2 + bx + c + bx^{-1} + ax^{-2} = 0$$

を得るので，これを整理して

$$a(x^2 + x^{-2}) + b(x + x^{-1}) + c = 0 \tag{1}$$

と書きます．ここで，$X = x + x^{-1}$ とおくと，$X^2 = (x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$ なので，上式 (1) は

$$a(X^2 - 2) + bX + c = 0$$

と書け，従って

$$aX^2 + bX - 2a + c = 0 \tag{2}$$

を得ます．これは X に関する 2 次方程式ですから，2 次方程式の解の公式を用いて

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(-2a + c)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2 - 4ac}}{2a} \tag{3}$$

となります．ここで，$x + x^{-1} = X$ でしたから，この両辺を x 倍して得られる式 $x^2 - Xx + 1 = 0$ に，2 次方程式の解の公式を適用すると

$$x = \frac{X \pm \sqrt{X^2 - 4}}{2}$$

を得ます．まとめると

$$x = \frac{\frac{-b+\varepsilon_1\sqrt{b^2+8a^2-4ac}}{2a} + \varepsilon_2\sqrt{\left(\frac{-b+\varepsilon_1\sqrt{b^2+8a^2-4ac}}{2a}\right)^2 - 4}}{2}$$

(但し，$\varepsilon_1 = 1$ または -1, $\varepsilon_2 = 1$ または -1) が求める解の公式になります (この式をどう見やすく整理するかは皆さんにお任せします).

(コメント) 一般に $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) の形で表される式を n 次の**代数方程式**といい，この解を係数 $a_n, a_{n-1} \ldots, a_1, a_0$ の情報から導く式を，その方程式の**解の公式**といいます．特に，係数の四則演算とべき根のみを使って導かれる解の公式を，**代数的解の公式**などといいます．1 次方程式 $a_1 x + a_0 = 0$ に対して

$$x = -\frac{a_0}{a_1}$$

は代数的解の公式ですし，2 次方程式 $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ に対して

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

は代数的解の公式です．一般の 3 次，4 次方程式の代数的解の公式も，それぞれ 16 世紀頃には知られてました (自信のある皆さんは，自力で挑戦してみて下さい)．今回の問題は，係数が特別な形の 4 次方程式の解の公式を求める，というものでした．この場合は，上で解説したように，一般の 4 次方程式の解の公式よりはるかに易しく解を求めることができます．一方で，5 次以上の一般の方程式には，代数的解の公式が**存在しません**．このことが証明されたのは，19 世紀に入ってからで，アーベル，ガロアといった数学者の革命的なアイデアによるものでした．大学の数学科では，およそ 3 年生のカリキュラムを終えるころには，これらの事実の厳密な証明を理解出来るようになります．

なお，問題に出てきた特殊な係数の多項式，一般には

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ a_i = a_{n-i}\ (i = 0, 1, \ldots, n)$$

と表せる多項式を，**パリンドロミック多項式**とよびます．「パリンドロミック (palindromic)」というのは，「前後どちらから読んでも同じになる，回文的な」というような意味で，係数が回文のようになっているからこうよばれているようです．パリンドロミック多項式は，最先端の数学の中でも随所に現れ，大変重要な役割を果たしています．将来，大学の数学科で数学を学びたいと考えている皆さんは，是非，パリンドロミック多項式がどのような場面で出てくるのか，楽しみにしていて下さい．

2. (解答例) 下の図 1 のように結び目を動かしていけばよいです (4 つ目の結び目は，3 つ目の結び目の左が上になるように描き直したものです)．

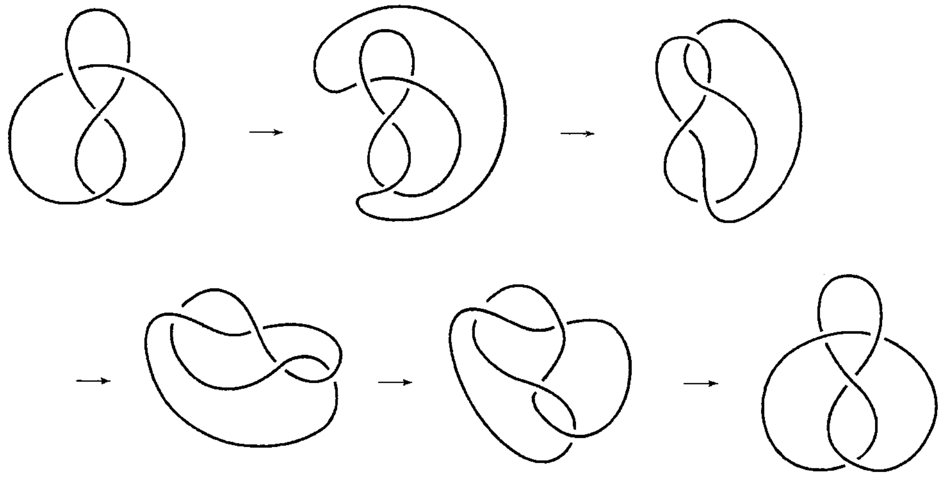

図 1

(コメント) 問題プリントの図 2 にある結び目は，**8 の字結び目**とよばれています．ここで描か

れた 2 つの結び目の図は，お互いに鏡に映したような形になっていることに気付いた人は多いと思います．もう少しだけ正確に言うと，これら 2 つの結び目は，図の上下，奥行きは変えずに，左右だけを逆にすることで，移り合います．このとき，図の右に描かれた結び目は，左に描かれた結び目の**鏡映**であるといいます．逆に，左に描かれた結び目は，右に描かれた結び目の鏡映です．この問題は，8 の字結び目と，その鏡映は同じ結び目であるということを確認するというものでした．さて，それでは，8 の字結び目以外のどんな結び目でも，やはりその鏡映と同じ結び目になるでしょうか．実は，そうではありません．下の図 2 に描かれた 2 つの結び目を見て下さい．これらはそれぞれ**左手型 3 葉結び目**，**右手型 3 葉結び目**とよばれています．これら 2 つ

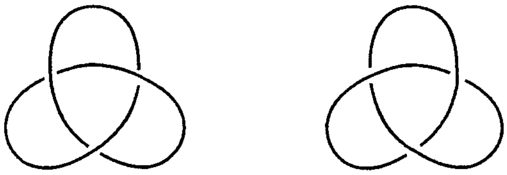

図 2　左手型 3 葉結び目 (左) と右手型 3 葉結び目 (右)

の結び目はお互いに鏡映の関係にありますが，同じ結び目**ではない**ことが知られています．すなわち，空間の中で紐を切らないで一方を他方の形に動かすことはできません．同じ結び目であることをいう為には，今回の問題のように実際に紐の動かし方を説明して見せればよいのですが，同じ結び目では**ない**ということを数学的に証明することは，決して簡単ではありません．この為には，例えば**位相不変量**とよばれる数学的な道具を利用する必要があります．
最後に，鏡映と同じ結び目になるかならないかという話は，どこかで聞いた話と似ていると思った人がいるかもしれません．皆さんは，化学でキラルという言葉を聞いたことはありませんか? 分子がキラルというのは，その分子が鏡映と異なるときをいいます．キラルという概念は，分子だけでなく，結び目などの空間内の図形に対してもそのまま適用できます．この言葉を使うと，3 葉結び目はキラルであり，8 の字結び目はキラルでないということができます．与えられた結び目がキラルであるかどうかを判定することは大変難しい問題で，現在も完全には未解決です．

3.　(解答例 1) $\sqrt{2}$ は無理数です．$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ は有理数か無理数のいずれかです．もし $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が有理数であるとすれば，$\sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$ 乗が「無理数の無理数乗で有理数であるもの」の例になります．もし $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ が無理数であるとすれば，$((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ は $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ですから，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ の $\sqrt{2}$ 乗が「無理数の無理数乗で有理数であるもの」の例になります．従って，「無理数の無理数乗で有理数であるもの」は存在します．

(コメント) 有理数とは，分子，分母ともに整数である分数として表すことのできる数のことをいい，有理数でない実数を無理数とよびました．有理数を小数展開すると，必ず巡回する (途中からすべて 0 になる場合も含む) のに対し，無理数を小数展開しても，巡回しません．
さて，この問題は，私自身が高校生のころに知った問題で，おそらく「知っている人は知っている」という類の問題です．皆さんの多くは，おそらく無理数は有理数より「複雑」な数だという感覚をお持ちだと思いますので，「複雑」な数の「複雑」な数乗が，有理数のような「単純」な数

になるような例は，一見しただけでは想像しづらいのではないかと思います．上の解答例 1 は簡潔で鮮やかですが，結局『「無理数の無理数乗で有理数になるもの」は，どれか』という問いには答えていません．ただ，そういうものが存在する（しかも，この場合，2 つの候補のうちのどちらかである）ということを証明したのです．「・・・であるものが存在する」ということを証明する際，実際に見つけてきてみせることができればそれでよいのですが，見せることはなくても，存在性を証明することは出来ます．そして，数学ではしばしばそういう類の存在証明が大変重要な役割を果たします．

そうとはいえ，やはり，解答例 1 に挙げた 2 つの候補のうち，どちらが「無理数の無理数乗で有理数になるもの」の例になっているのか，気になる人はいると思います．実は，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ は無理数であることが知られています．従って，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ の $\sqrt{2}$ 乗が「無理数の無理数乗で有理数であるもの」の例になります．一般には，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ についてだけではなく，次の事実が知られています．

ゲルフォント-シュタイナーの定理

0 でも 1 でもない代数的数の代数的無理数乗は，超越数である．

定理で使われている言葉の意味を説明します．**代数的数**というのは，有理数を係数に持つ代数方程式の解となる複素数のことであり，代数的でない複素数のことを**超越数**といいます．例えば，円周率 π や自然対数の底 e は超越数であることが知られています．また，代数的数である無理数のことを**代数的無理数**とよびます．有理数は，整数を係数に持つ 1 次方程式の解になりますから，代数的数であることに注意して下さい．この対偶を述べると，超越数は無理数です．上の定理は，ヒルベルトの第 7 問題とよばれる有名な問題への答えでした．

$\sqrt{2}$ は，方程式 $x^2-2=0$ の一つの解ですから代数的数です．しかも，$\sqrt{2}$ は無理数でしたから，特に代数的無理数です．従って，ゲルフォント-シュタイナーの定理より，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ は超越数です．特に，$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ は無理数だということが分かります．

(解答例 2) a を無理数とします．任意の正の数 b に対して，$a^{\log_a b}=b$ が成り立ちますから，$\log_a b$ が無理数であるような有理数 b が存在することを証明すればよいです．さて，2 と 3 は共に有理数です．ここで，$\log_a 2$ と $\log_a 3$ が共に有理数であると仮定します．このとき，$\log_a 2=n_1/m_1$ と $\log_a 3=n_2/m_2$ を満たす整数 m_1,n_1,m_2,n_2 (但し m_1,n_1,m_2,n_2 はいずれも 0 でない) が存在します．すると $a^{n_1/m_1}=2$, $b^{n_2/m_2}=3$ が成り立つので，これを整理して $a=2^{m_1/n_1}=3^{m_2/n_2}$ を得ます．これを n_1n_2 乗すると $2^{m_1n_2}=3^{m_2n_1}$ となりますが，m_1,n_1,m_2,n_2 はいずれも 0 ではなかったので，これは素因数分解の一意性に反します．従って，仮定は成り立ちません．つまり，$\log_a 2$ と $\log_a 3$ のどちらかは無理数です．結局 $a^{\log_a 2}$ か $a^{\log_a 3}$ が「無理数の無理数乗で有理数であるもの」の例になります．

上の解答例 2 は，解答例 1 より少し長いですが，問題で求められていることよりも，より強い事実を証明していることに気付いたでしょうか．すなわち，この解答は「任意の無理数に対して，その無理数乗で有理数であるものが存在する」ということを言っています．さらに，解答の中の a として $\sqrt{2}$ を使うと，$\log_{\sqrt{2}} 2$ と $\log_{\sqrt{2}} 3$ のどちらかは無理数ということになりますが，$\log_{\sqrt{2}} 2=2$ は有理数なので，$\log_{\sqrt{2}} 3$ が無理数であることがわかります．従って，$(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3}$ が「無理数の無理数乗で有理数であるもの」の具体例です．