１次元 Kardar-Parisi-Zhang 方程式

Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式は、界面の成長を記述するモデル方程式として 1986 年に提案された非線形確率偏微分方程式である。時刻 $t(\geq 0)$、位置 $x \in \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ における界面高さ $h = h(x,t)$ の時間微分が、拡散項、非線形項、ノイズ項の和と等しいというシンプルな方程式であるが、幅広い応用を持ち、物理を始めいくつかの分野で盛んに研究されてきた。$d = 1$ 次元の場合、方程式は次のようになる $(x \in \mathbb{R})$:

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \eta$$

ノイズ項 $\eta = \eta(x,t)$ としてはガウシアンホワイトノイズを取るのが標準の KPZ 方程式である。

近年この１次元 KPZ 方程式の性質に関する理解が進展し、新たな興味を呼んでいる。一つのきっかけは、2010 年に界面の高さ分布に対する明示公式が得られたことである。振り返ってみると、KPZ 方程式はシンプルとはいえ、非線形性、ノイズ、無限自由度を持つ方程式であり、いきなり方程式を解くという訳にはいかなかったが、四半世紀に渡って少しずつ理解が深められてきた結果、気がつけば上記のような具体的な結果を得る事が出来る段階まで来ていたということのようである。また、同じ年に高さ分布が液晶乱流を用いた実験において確認され、揺らぎの性質を精密に調べることに関する関心を高めることとなった。

その後さらに、KPZ 方程式に対する新たな「定義」が与えられたり（上記 KPZ 方程式はそのままでは well-defined では無い!)、明示公式が存在する背後には Macdonald 多項式との関係があることが見いだされるなど、いくつかの興味深い発展があった。

本講演では、方程式の導入、物理的な興味の説明から始め、近年の進展について概観する。

参考文献

[1] T. Sasamoto, H. Spohn, One-dimensional Kardar- Parisi-Zhang equation: an exact solution and its universality, Phys. Rev . Lett. 104 (2010) 230602.

[2] K. A. Takeuchi, M. Sano, T. Sasamoto and H. Spohn, Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale invari ance, Sci. Rep. 1 (2011) 34.

[3] A. Borodin, I. Corwin, T. Sasamoto, From duality to determinants for q-TASEP and ASEP, arXiv:1207.5035, to appear in Ann. Prob.