令和 2 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 − 選択問題

令和元年 8 月 21 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 8 題ある．3 題を選択して解答すること．
3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること．
4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号を（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
5) 問題冊子は，このページを含め全 7 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 集合 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に，次のように積を定めた群を G とする．

$$(a, x) \cdot (b, y) = (a + 2^x b,\ x + y) \qquad (a, b \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

ただし，$d, n \in \mathbb{Z}$ に対し n の $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ における類を $[n]_d$ として $2^{[n]_3} = [2^n]_7$ と定める．以下の問いに答えよ．

(1) G の部分群 $H = \{(a, [0]_3) \mid a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\}$ と $K = \{([0]_7, x) \mid x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ が正規かどうか，理由とともに答えよ．

(2) G の中心を求めよ．

(3) G の共役類の個数を求めよ．

(4) 位数が 3 である G の元の個数を求めよ．

$\boxed{2}$ p を 4 で割った余りが 3 となる素数，$F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を p 元体とする．F 係数の多項式環 $F[x]$ の $x^2 + 1 \in F[x]$ で生成されるイデアル $(x^2 + 1)$ による剰余環を $E = F[x]/(x^2 + 1)$ とおく．$E^\times$, $F^\times$ をそれぞれ E, F の乗法群とし，$x \in F[x]$ の E における類を i とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a^2 = -1$ を満たす F の元 a は存在しないことを示せ．

(2) E は F の 2 次拡大体であることを示せ．

(3) 写像 $N_0 : E \to F$ を

$$N_0(a + bi) = a^2 + b^2 \quad (a, b \in F)$$

により定める．任意の $\alpha \in E^\times$ に対し $N_0(\alpha) \in F^\times$ となることを示せ．また，N_0 の制限により定まる写像 $N : E^\times \to F^\times$ は群準同型であることを示せ．

(4) 前問の写像 $N : E^\times \to F^\times$ は全射であることを示せ．また，N の核 $\ker(N)$ の位数を求めよ．

$\boxed{3}$ 4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合を次のように定める．

$$Y_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\},$$
$$Y_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = w^2,\ |w| \leq 1\}.$$

また，$X = Y_1 \cup Y_2$ とし，写像 $f : X \to X$ を

$$f(x, y, z, w) = (-x, -y, -z, -w)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) Y_2 が可縮であることを示せ．

(2) 非負整数 q に対し，X の整係数ホモロジー群 $H_q(X, \mathbb{Z})$ を求めよ．

(3) 写像 f と恒等写像 id_X がホモトピックかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{4}$ 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ と $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1,\ x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2),$$
$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

と定める．また，$M = f^{-1}(\{(1, 0)\})$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ での f のヤコビ行列 $(Jf)_p$ を求めよ．

(2) $p \in \mathbb{R}^4$ が $g(p) \neq 0$ を満たすとき $(Jf)_p$ の階数を求めよ．

(3) M が $\mathbb{R}^4$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し，その次元を求めよ．

$\boxed{5}$ μ を $[0,\infty)$ 上の σ-有限なボレル測度とする．以下の問いに答えよ．

(1) E を $[0,\infty)$ のボレル可測集合とし，χ_E を E の定義関数とする．次を示せ．

$$\mu(E) = \int_0^1 \mu(\{x \in [0,\infty) \mid \chi_E(x) \geq \lambda\})d\lambda.$$

(2) 任意の $t > 0$ に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_{[0,\infty)} e^{-tx} d\mu(x) = \int_0^\infty te^{-ty}\mu([0,y])dy.$$

(3) 次を満たす $\gamma > 0,\ A \geq 0$ が存在することを仮定する．

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\mu([0,a])}{a^\gamma} = A.$$

このとき，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t>0,\ t\to 0} t^\gamma \int_{[0,\infty)} e^{-tx} d\mu(x) = A \int_0^\infty x^\gamma e^{-x} dx.$$

$\boxed{6}$ $(X,\ \|\cdot\|_X)$ と $(Y,\ \|\cdot\|_Y)$ をバナッハ空間とする．X, Y はノルムが定める位相により位相空間とみなす．X から Y への有界線形作用素全体からなる空間 $\mathcal{L}(X,Y)$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を次のように定める．

$$\|F\| = \sup_{u\in X,\ \|u\|_X=1} \|F(u)\|_Y \qquad (F \in \mathcal{L}(X,Y)).$$

また，次の二条件を満たす $\mathcal{L}(X,Y)$ の元の列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を固定する．

- 任意の $u \in X$ に対し $\{F_n(u)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y で収束する．
- $\sup\limits_{n\geq 1} \|F_n\| < \infty$.

作用素 $F : X \to Y$ を各 $u \in X$ に対し $F(u) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(u)$ により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) F は $\mathcal{L}(X,Y)$ に属し，次を満たすことを示せ．

$$\|F\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\| < \infty.$$

(2) バナッハ空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ のコンパクト集合 K に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in K} \|F_n(u) - F(u)\|_Y = 0.$$

(3) $X = Y = L^1(\mathbb{R})$ とし，$F_n : X \to Y$ が次で与えられるときを考える．

$$F_n(u)(x) = u\left(x + \frac{1}{n}\right) \qquad (u \in X,\ x \in \mathbb{R}).$$

このとき $\limsup\limits_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$ が成り立つかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{7}$ $f(z)$ を次の三条件を満たす $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数とする．

(i) $f(0) = 0$.

(ii) すべての $z \in D$ に対し $|f(z)| < 1$.

(iii) 複素数 α で，すべての $z \in D$ に対し $f(z) = \alpha z$ を満たすものは存在しない．

以下の問いに答えよ．

(1) D 上の正則関数 $g(z)$ で，任意の $z \in D,\ z \neq 0$ に対し

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

を満たすものが存在することを示せ．

(2) 任意の $z \in D,\ z \neq 0$ に対し $|f(z)| < |z|$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < r < 1$ を満たす実数 r に対し，次を満たす実数 K が存在することを示せ．

$$0 \leq K < 1, \qquad z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r \text{ ならば } |f(z)| \leq K|z|.$$

(4) $z_1 \in D$ を任意に取り，$z_{n+1} = f(z_n)$ $(n \geq 1)$ により複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める．このとき $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ となることを示せ．

$\boxed{8}$

$\mathbb{N}=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq 1\}$ とおく．また，$n\in\mathbb{N}$ と無限集合 X に対し，ちょうど n 個の元からなる X の部分集合全体の集合を $[X]^n$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) $[\mathbb{N}]^2$ の部分集合 A,B,C が次を満たすと仮定する．

$$A\cup B\cup C=[\mathbb{N}]^2,\qquad A\cap B=B\cap C=C\cap A=\emptyset.$$

$\mathcal{T}=\{A,B,C\}$ とおく．以下は $\mathbb{N}$ の無限部分集合 H と $S_*\in\mathcal{T}$ で $[H]^2\subset S_*$ となるものが存在するという命題の証明である．文中の小問 (a), (b), (c) に答えよ．

$\mathbb{N}$ の無限部分集合の減少列

$$X_1\supset X_2\supset\cdots\supset X_k\supset\cdots$$

を以下のように帰納的に定める．まず $X_1=\mathbb{N}$ とする．次に $\mathbb{N}$ の無限部分集合 X_k が定義されていると仮定し，X_k の最小元を x_k として，各 $S\in\mathcal{T}$ に対して $X_k(S)=\{x\in X_k\mid\{x_k,x\}\in S\}$ とおく．

(a) $X_k(S)$ が無限集合となる $S\in\mathcal{T}$ が存在することを示せ．

そこで $X_k(S_k)$ が無限集合となる $S_k\in\mathcal{T}$ を選び，$X_{k+1}=X_k(S_k)$ と定める．

(b) $x_k<x_{k+1}$ が成り立つことを示せ．

最後に $\{k\in\mathbb{N}\mid S_k=S_*\}$ が無限集合となる $S_*\in\mathcal{T}$ を選び，H を次で定める．

$$H=\{x_k\mid k\in\mathbb{N},\ S_k=S_*\}.$$

(c) H は無限集合で $[H]^2\subset S_*$ が成り立つことを示せ．

(2) 任意の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，次のいずれかが成り立つような部分列 $\{a_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ が存在することを示せ．

- $\{a_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ は狭義単調増加数列である．
- $\{a_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ は狭義単調減少数列である．
- 任意の $i,j\in\mathbb{N}$ に対し $a_{n(i)}=a_{n(j)}$ である．