平成 31 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 ─ 選択問題

平成 30 年 8 月 22 日 (13 時 30 分 から 15 時 30 分まで)

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.

2) 問題は 8 題ある. 3 題を選択して解答すること.

3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること.

4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し, 受験番号を ( ) 内に記入すること. また, 氏名は書かないこと.

5) 問題冊子は, このページを含め全 7 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ G を 4 次対称群，G の 2 つの巡回置換 $(1,2,3,4)$, $(2,4)$ をそれぞれ σ, τ と表し，σ, τ で生成される G の部分群を H とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 部分群 H が非可換であることを示せ．

(2) 商集合 G/H の元それぞれに対して，その代表元を一つずつ求めよ．

(3) $K = \{g \in G \mid$ 任意の $x \in G$ に対して $(gx)H = xH\}$ とするとき，K は G の正規部分群であることを示せ．

(4) 剰余群 G/K は 3 次対称群と同型であることを示せ．

$\boxed{2}$ 体 k 上の 2 変数多項式環を $R = k[x,y]$ とする．R の元

$$f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f_{ij}x^i y^j \quad (n \in \mathbb{N},\ f_{ij} \in k)$$

に対して f の位数 $\mathrm{ord}(f)$ を

$$\mathrm{ord}(f) = \begin{cases} \min\{i+j \mid f_{ij} \neq 0\} & (f \neq 0 \text{ のとき}), \\ +\infty & (f = 0 \text{ のとき}), \end{cases}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) R のイデアル (x^2, xy, y^2) は部分集合

$$\{f \in R \mid \mathrm{ord}(f) \geq 2\}$$

と一致することを示せ．

(2) イデアル (x^2, xy) は素イデアルかどうか判定せよ．

(3) 2 つのイデアル (x^2, xy), $(x) \cap (x^2, xy, y^2)$ は一致するかどうか判定せよ．

$\boxed{3}$ ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\mathbb{Z}^2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ を，ベクトルの和によって定まる可換群と考える．写像 $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$((a,b),(x,y)) \mapsto (a,b)\cdot(x,y) = (x+a, y+b)$$

で定め，この写像により $\mathbb{Z}^2$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を定める．また，実数 $a, r > 0$ に対して，$\mathbb{R}^2$ から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への写像 $\Phi_{a,r}$ を次で定める．

$$\Phi_{a,r}(x,y) = ((a + r\cos(2\pi y))\cos(2\pi x),\ (a + r\cos(2\pi y))\sin(2\pi x),\ r\sin(2\pi y)).$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関係 $\sim$ を次で定義する．すなわち $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ に対して $(x,y) \sim (x',y')$ となるのは，$(x',y') = (a,b)\cdot(x,y)$ となる $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ が存在するときとする．このとき $\sim$ は $\mathbb{R}^2$ の同値関係となることを示せ．

以後，同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}^2$ の商集合を $T = \mathbb{R}^2/\!\sim$ とし，$\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ を自然な射影とする．また T の位相を商位相で定める．

(2) T には，π が局所微分同相となる微分可能多様体の構造が定まることを示せ．ただし，$\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ が局所微分同相であるとは，$\mathbb{R}^2$ の任意の点 p に対して，p の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$ と $\pi(p) \in T$ の近傍 $V \subset T$ で，π の U への制限が U から V への微分同相写像となるものが存在するときをいう．

(3) 実数 $a, r > 0$ に対し，微分可能写像 $\phi_{a,r} : T \to \mathbb{R}^3$ で，$\phi_{a,r}(\pi(x,y)) = \Phi_{a,r}(x,y)$ が任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して成り立つものが存在することを示せ．

(4) 設問 (3) の写像 $\phi_{a,r} : T \to \mathbb{R}^3$ がはめ込みとなる正の実数の組 (a,r) の範囲を，ar 平面に図示せよ．

$\boxed{4}$ n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の $k+1$ 個の点 $a_0, a_1, \ldots, a_k$ は，$\sum_{i=0}^{k} t_i = 0$ を満たす $k+1$ 個の実数 $t_0, t_1, \ldots, t_k$ で $\sum_{i=0}^{k} t_i a_i = 0$ を満たすものは $t_i = 0$ $(i = 0, \ldots, k)$ 以外に存在しないとき，一般の位置にあるといわれる．このとき k 単体 $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ を

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i a_i \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0\ (i = 0, 1, \ldots, k) \right\}$$

と定める．k 単体 $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ の m 辺単体とは，集合 $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ の $m+1$ 個の点からなる部分集合が定める m 単体のことである．

$n \geq 3$ とし，$\mathbb{R}^n$ 内に $n+2$ 個の点 $a, b, a_1, \ldots, a_n$ で，$a, a_1, \ldots, a_n$ と $b, a_1, \ldots, a_n$ がそれぞれ一般の位置にあるものが与えられているとし，n 単体 σ, τ を $\sigma = [a, a_1, \ldots, a_n]$，$\tau = [b, a_1, \ldots, a_n]$ で定める．ただし $\sigma \cap \tau = [a_1, \ldots, a_n]$ と仮定する．以下の問いに答えよ．

(1) τ の $(n-1)$ 辺単体全体の和集合を Y_{n-1} とする．このとき Y_{n-1} の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) σ の $(n-2)$ 辺単体全体の和集合を X_{n-2} とする．このとき X_{n-2} の整係数ホモロジー群を求めよ．

(3) Y_{n-1}, X_{n-2} を設問 (1)，(2) の通りとする．このとき $X_{n-2} \cup Y_{n-1}$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2x^2+1)} \quad (x \in \mathbb{R},\, n = 1, 2, \ldots)$$

で定義する．m は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度として，以下の問いに答えよ．

(1) 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dm(x)$$

の値を求めよ．ただし，非負の関数に関しては，$\mathbb{R}$ 上で広義リーマン積分可能ならばルベーグ積分可能であり，双方の意味での積分の値は一致するという事実は使用してよい．

(2) $\mathbb{R}$ 上の有界な実数値ルベーグ可測関数 $g(x)$ が $x = 0$ で連続であるとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)\, dm(x) = g(0)$$

を証明せよ．

(3) $\mathbb{R}$ 上の有界な実数値ルベーグ可測関数 $g(x)$ の $x = 0$ での左極限 $\lim\limits_{x<0,\, x\to 0} g(x)$ と右極限 $\lim\limits_{x>0,\, x\to 0} g(x)$ がそれぞれ存在すると仮定する．

$$a = \lim_{x<0,\, x\to 0} g(x), \quad b = \lim_{x>0,\, x\to 0} g(x)$$

とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)\, dm(x)$$

の値を a, b を用いて表せ．

$\boxed{6}$ H を実ヒルベルト空間とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ をその内積，$\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ をノルムとする．空でない集合 $A \subset H$ に対して

$$A^{\perp} = \{x \in H \mid \text{任意の } a \in A \text{ に対して } \langle x, a\rangle = 0\}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$ を示せ．

(2) $A^{\perp}$ は H の閉部分空間であることを示せ．

(3) A が閉部分空間であることと $A = (A^{\perp})^{\perp}$ が成り立つこととが，同値であることを示せ．

(4) $A \subset H$ に対して，$A' \subset H$ を

$$A' = \left\{x \in H \,\middle|\, \underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\, a_n = x \text{ となる } A \text{ の点列 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が存在する}\right\}$$

で定義する．このとき $A^{\perp} = (A')^{\perp}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\, a_n = x$ とは a_n が $n \to \infty$ のときに x に弱収束することとする．

$\boxed{7}$ 正の実数 t に対して $\Delta(t) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < t\}$ とおく．また，$\mathbb{C}$ の部分集合 A, B に対して，$A \setminus B = A \cap B^c$ とおく．さて，$0 < r < R < +\infty$ とし，$f(z)$ を $\Delta(R)$ 上の有理型関数で，点 $a \in \Delta(r)$ で 1 位の零点，点 $b \in \Delta(r)$ で 1 位の極，点 a, b 以外の $\Delta(R)$ の点 z で正則かつ $f(z) \neq 0$ であるとする．$\Omega = \Delta(R) \setminus \overline{\Delta(r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) Ω 上の正則関数 $\dfrac{f'}{f}$ に対して，$\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ が成り立つことを示せ．ここに C は Ω 内の任意の区分的に滑らかな単純閉曲線である．

(2) $\dfrac{f'}{f}$ は Ω 上で原始関数 F を持つことを示せ．つまり $F'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ を満たす Ω 上の正則関数 F が存在することを示せ．

(3) F は設問 (2) と同じものとする．Ω 上で $e^{F(z)} = C_0 f(z)$ が成り立つことを示せ．ここで C_0 は 0 でない定数である．

(4) $r < \rho < R$ となる ρ を任意にとる．このとき $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ 上の C^∞ 級関数 φ で，

(a) 任意の $z \in \Delta(r) \setminus \{b\}$ に対して $\varphi(z) = f(z)$,

(b) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta(r)$ に対して $\varphi(z) \neq 0$,

(c) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta(\rho)$ に対して $\varphi(z) = 1$,

となるものが存在することを示せ．

$\boxed{8}$ A を任意の集合として，その部分集合全体を $\mathcal{P}(A)$ で表す．そして，$\mathcal{P}(A)$ の空でない部分集合 $\mathcal{B}$ で，集合ブール演算で閉じているものを考える．すなわち，任意の $X, Y \in \mathcal{B}$ について，

$$X^c \in \mathcal{B}, \quad X \cap Y \in \mathcal{B}, \quad X \cup Y \in \mathcal{B}$$

とする．ただし，$X^c = \{x \in A \mid x \notin X\}$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{B}$ が有限集合であれば，その濃度は 2 のベキ乗 2^n であることを示せ．

(2) A が無限集合であるとき，$\mathcal{P}(A)$ は非可算集合であることを示せ．

(3) A が無限集合であるとき，可算無限集合となる $\mathcal{B}$ が存在することを示せ．