平成 31 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 ー 共通問題

平成 30 年 8 月 22 日 (9 時 30 分 から 12 時 まで)

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.
2) 問題は 4 題ある. 全問に解答すること.
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること.
4) 受験番号を ( ) 内に記入すること. また, 氏名は書かないこと.
5) 問題冊子は, このページを含め全 3 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 3次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．また，固有値それぞれに対応する固有空間の基底を 1 組求めよ．

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の点 $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\sqrt{x_0^2 + x_1^2}$ を $|x|$ で表す．関数 $d : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & (x, y \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \text{ のとき}), \\ 0 & (x, y \in \mathbb{R}^2,\ x = y \text{ のとき}), \end{cases}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間となることを示せ．

(2) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ は完備であることを示せ．

(3) 原点 $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ を含む部分集合 A を考える．A が d の定める位相について開集合であることと，$B_r \subset A$ となる正の数 r が存在することとが同値であることを示せ．ただし $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r\}$ とする．

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 Φ が凸関数であるとき，すなわち任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $t \in (0,1)$ に対して

$$\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1) Φ は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$ を満たす $t_j > 0$ と $x_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j \Phi(x_j)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a > 0$ とする．区間 $[0, a]$ 上の実数値連続関数 f に対して

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{a}\int_0^a \Phi(f(x))\,dx$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．

(1) Ω をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の空でない開集合とし，f を Ω 上の実数値 C^1 級関数とする．f が点 $(a, b) \in \Omega$ で極大値をとるとき，点 (a, b) は f の臨界点である，すなわち f の (a, b) での x, y に関する偏微分係数は 0 になる，ことを示せ．

(2) $f(x, y) = (4x^5 - 5x^4 + 10)e^{y^2}$ の $\mathbb{R}^2$ における極大値，極小値が存在するなら，それらをすべて求めよ．

(3) f は設問 (2) と同じものとする．f の $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2\}$ における最大値，最小値が存在するなら，それらをすべて求めよ．