令和 8 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学　共通問題

令和 7 年 8 月 21 日（9 時 30 分 から 12 時 まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること．
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること．
4) 受験番号をすべての解答用紙の（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
5) 問題冊子は，このページを含め全 3 ページである．

記号

$\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$：正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$：実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ n を 2 以上の整数とし，A を複素数を成分とする n 次正方行列とする．$\mathbb{C}$ 上 1 次独立な列ベクトル $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}^n$ が

$$Au_k = u_{k+1}\ (1 \leq k \leq n-1),\ Au_n = u_1$$

を満たしているとする．以下の問いに答えよ．

(1) $A^n = I$ を示せ．ただし，I は n 次単位行列を表す．

(2) $c \in \mathbb{C}$ を A の固有値とする．このとき，$c^n = 1$ を示せ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．また，各固有値に対応する固有空間を $u_1, \ldots, u_n$ を用いて表せ．必要ならば，1 の原始 n 乗根 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$ (ただし，i は虚数単位であるとする) を用いてもよい．

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ のユークリッド位相の開集合系とする．$X = \mathbb{R} \times \{1, -1\}$ とする．X の位相 $\mathcal{O}_X$ を

$$\mathcal{O}_X = \{(U \times \{1\}) \cup (U' \times \{-1\}) \mid U, U' \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\}$$

と定める．X 上の同値関係 $\sim$ を，$p, q \in \mathbb{R},\ s, t \in \{1, -1\}$ に対し

$$(p, s) \sim (q, t) \quad \Leftrightarrow \quad (p, s) = (q, t) \text{ または } p = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

と定める．$Y = X/\sim$ とおき，標準的射影を $\pi\colon X \to Y$ とおく．π の定める Y 上の商位相を $\mathcal{O}_Y$ とおく．位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ はハウスドルフ空間であるかどうか，理由とともに答えよ．

(2) Z をハウスドルフな位相空間とし，W を位相空間とする．$f\colon Z \to W$ は全射であり，かつ，任意の $w \in W$ に対し $f^{-1}(\{w\})$ が有限集合であるとする．このとき，以下の (i), (ii) の命題はそれぞれ真であるか．真であるならばそのことを証明せよ．偽であるならば反例をあげ，実際に反例になっていることを証明せよ．

(i) f が連続な開写像であるならば，W はハウスドルフ空間である．

(ii) f が閉写像であるならば，W はハウスドルフ空間である．

ここで，写像 $f\colon Z \to W$ について，f が開写像であるとは Z の任意の開集合 U に対し $f(U)$ が W の開集合であることをいい，f が閉写像であるとは Z の任意の閉集合 F に対し $f(F)$ が W の閉集合であることをいう．

$\boxed{3}$ f を $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0, \infty)$ で定義された実数値関数とし，I 上の実数値関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，次の三つの条件 (A), (B), (C) を満たすとする．

(A) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束する．

(B) 任意の正の整数 n に対して f_n は I 上で連続である．

(C) 任意の正の整数 n に対して極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ が存在して a_n に等しい．

以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を α とする． $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ が成り立つことを示せ．

(3) f は I 上で一様連続であることを示せ．

(4) α を設問 (2) で定めた定数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f_n(x)\, dx = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x + y < 2,\ 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}$ における広義重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{xy \log(x + y - 1)}\, dxdy$$

の値を求めよ．