令和 3 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

数学 − 選択問題

令和 2 年 8 月 20 日（13 時 30 分 から 15 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.

2) 問題は 8 題ある. 3 題を選択して解答すること.

3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること.

4) 解答用紙の左肩上部の $\boxed{}$ に選択した問題番号を記入し，受験番号を（　）内に記入すること. また，氏名は書かないこと.

5) 問題冊子は，このページを含め全 7 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合
$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 奇素数 p に対して, $\mathbb{C}$ の部分体 $K_p = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ を考える. ただし, $\zeta_p = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}$ とする.

(1) ζ_p の $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Q}$ 上共役な元をすべて求めよ.

(2) 任意の体の準同型 $\sigma : K_p \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して, $\sigma(K_p) \subset K_p$ が成り立つことを示せ.

(3) 体の拡大 $K_p/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示し, そのガロア群 $\mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q})$ は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ と群として同型であることを示せ.

(4) ガロア群 $\mathrm{Gal}(K_p/\mathbb{Q})$ の位数 2 の部分群がただ一つ存在することを示せ. さらに, その群を H とするとき, ガロア対応により対応する拡大 $K_p/\mathbb{Q}$ の中間体 K_p^H が $\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ となることを示せ.

$\boxed{2}$ 素数 p に対して $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) A を単項イデアル整域, f を A の 0 でない元とする. $A\left[\dfrac{1}{f}\right]$ も単項イデアル整域であることを示せ.

(2) 剰余環 $\mathbb{F}_5[x,y]/(x^2+y^2-1)$ と $\mathbb{F}_5[u,v]/(uv-1)$ との間に環同型があることを示すことによって, $\mathbb{F}_5[x,y]/(x^2+y^2-1)$ が単項イデアル整域であることを示せ.

(3) 環準同型 $\mathbb{F}_5[x,y]/(x^2+y^2-1) \longrightarrow \mathbb{F}_5$ の個数を求めよ.

(4) 剰余環 $\mathbb{F}_3[x,y]/(x^2+y^2-1)$ が一意分解整域（素元分解整域）でないことを示すことによって，$\mathbb{F}_3[x,y]/(x^2+y^2-1)$ は単項イデアル整域でないことを示せ.

$\boxed{3}$ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の次の部分位相空間 X の整係数ホモロジー群 $H_k(X;\mathbb{Z})$ $(k=0,1,2,\dots)$ をすべて求めよ．

$$X=\{(x,y,z)\ |\ y^2+z^2\leq 2,\ x=-1,0,1\}\cup\{(x,y,z)\ |\ y^2+z^2=1,\ -1\leq x\leq 1\}$$

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}P^3$ を 3 次元実射影空間として，$\pi:\mathbb{R}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}P^3$ を自然な射影とする．$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}$ に対して $\mathbb{R}P^3$ の点 $\pi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ を $[x_1:x_2:x_3:x_4]$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式で定義される $f:\mathbb{R}P^3\longrightarrow\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}P^3$ 上の C^∞ 級関数になるかどうか，理由とともに答えよ．

$$f([x_1:x_2:x_3:x_4])=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

ただし，$\mathbb{R}P^3$ には π が C^∞ 級写像となるように C^∞ 級多様体の構造を定めるものとする．

(2) $f^{-1}(0)$ は $\mathbb{R}P^3$ 内の部分多様体であるかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{5}$ 1 より真に大きい二つの実数 p, q が

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする．$\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数 f, g と $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数の列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，次の条件 (i),(ii),(iii) をすべて満たすとする．

(i) f は非負値で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \{f(x)\}^p m(dx) < \infty$

(ii) $\displaystyle\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^q m(dx) < \infty$

(iii) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| m(dx) = 0$

ただし，m は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度である．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} f(x)|g_n(x)| m(dx) < \infty$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q m(dx) < \infty$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g_n(x) m(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) m(dx)$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ $(H,(\cdot,\cdot))$ を実ヒルベルト空間とし，K を空でない H の閉凸部分集合とする．また，$f \in H$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\|f-u\| = \inf_{v\in K} \|f-v\|$ が成り立つような $u \in K$ が存在することを示せ．
ただし，$\|w\| = \sqrt{(w,w)}$ である．

(2) (1) の u に対して

$$(f-u, v-u) \leq 0 \quad (v \in K)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) の u は一意であることを示せ．

$\boxed{7}$ 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対し，有理型関数 f を

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極全体のなす集合は $\mathbb{Z}$ であり，$z = n \in \mathbb{Z}$ における留数は $\dfrac{(-1)^n}{\pi}$ であることを示せ.

(2) n を正の整数とし，S_n を正方形

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} < n + \frac{1}{2} \right\}$$

の境界を正の向きに一周する閉曲線とする.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_n} \frac{f(z)}{z^2} dz = 0$$

を示せ.

(3) 関数 $\dfrac{f(z)}{z^2}$ の $z = 0$ におけるローラン展開の主要部は

$$\frac{1}{\pi} z^{-3} + \frac{\pi}{6} z^{-1}$$

であることを示せ.

(4) (1),(2),(3) を用いて，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

の値を求めよ.

$\boxed{8}$ $\mathbb{N}$ を 0 以上の整数全体のなす集合とし，$\mathcal{B}$ を空列を除く $\{0,1\}$ の有限列全体のなす集合とする．また，$f \in \mathcal{B}$ に対し，$\mathrm{lh}(f)$ は f の長さをあらわし，$i < \mathrm{lh}(f)$ について，$f(i)$ は $i+1$ 番目の f の値をあらわす．例えば，$f = 0101$ のとき，$\mathrm{lh}(f) = 4$, $f(0) = f(2) = 0$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $F : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ を $F(f) = \sum_{i=0}^{\mathrm{lh}(f)-1} f(i)2^i + 2^{\mathrm{lh}(f)} - 2$ と定める．F は全単射であることを示せ．

(2) $\mathcal{B}$ の無限列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n < \mathrm{lh}(f_n)$」を満たすとき，次の性質 $(*)$ を満たす関数 $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ が存在することを示せ．

$(*)$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，次のような f_m が存在する．

$$n < \mathrm{lh}(f_m) \text{ かつ，任意の } i \leq n \text{ について } g(i) = f_m(i).$$

(3) 「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n < \mathrm{lh}(f_n)$」を満たす $\mathcal{B}$ の計算可能な無限列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ のうち，$(*)$ を満たすどんな関数 g も計算可能とならないものを一つあげよ．ここで，$f \in \mathcal{B}$ は (1) の対応によって自然数とみなしている．