令和 3 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

$\boxed{\text{数学 − 共通問題}}$

令和 2 年 8 月 20 日（9 時 30 分 から 12 時 まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること.
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること.
4) 受験番号を（　）内に記入すること．また，<u>氏名は書かないこと</u>.
5) 問題冊子は，このページを含め全 3 ページである.

記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合

$\boxed{1}$ V を 2 次実正方行列全体のなす線形空間とし，V の部分空間 W を

$$W = \{Z \in V \mid \mathrm{tr}(Z) = 0\}$$

と定める．ただし，$\mathrm{tr}(Z)$ は Z のトレースのことである．2 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ に対して

$$f(X) = AX - XA$$

で線形写像 $f : V \longrightarrow V$ を定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(W) \subset W$ を示せ．

(2) f を W 上に制限した線形写像を $g : W \longrightarrow W$ と表す．W の基底

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に関する g の表現行列 R を求めよ．

(3) (2) で求めた行列 R の固有値をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ 実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ にユークリッド距離位相を入れておく．$\mathbb{R}$ の同値関係 $\sim$ を二つの実数 x, y に対して

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \text{ が有理数}$$

と定義し，商集合 $\mathbb{R}/\sim$ を X とおく．X に自然な射影 $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ から定まる商位相を入れる．以下の問いに答えよ．

(1) 位相空間 X は連結かどうか，理由とともに答えよ．

(2) 位相空間 X はコンパクトかどうか，理由とともに答えよ．

(3) 位相空間 X はハウスドルフかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{3}$ 関数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ は以下の条件 (a) と (b) を満たすとする.

(a) f は $\mathbb{R}$ で微分可能であり，f' は $\mathbb{R}$ で有界である.

(b) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ は収束する.

以下の問いに答えよ.

(1) 一般に「関数 $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ で一様連続である」という定義を書け.

(2) f は $\mathbb{R}$ で一様連続であることを示せ.

(3) $f(t)$ は $t\to\infty$ とするとき 0 に収束することを示せ.

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 極限

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x-a_0-a_1(x-1)-a_2(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

が有限確定となるような実数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\log x}{(x-1)^2}dx$ が存在することを示せ.