$n \times n$ の L-operator の q 差分版 (2)

黒木 玄

2004 年 10 月 12 日夜　(2004 年 9 月 30 日作成)

目 次

1 $A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大 affine Weyl 群双有理作用の q 差分版 1

1.1 q 差分版双有理作用の構成 1

1.2 Lax 表示 2

1.3 量子離散 Hamiltonian 構造 4

2 $q \to 1$ での微分極限 10

2.1 双有理作用の極限 10

2.2 Lax 表示の極限 11

2.3 量子離散 Hamiltonian の極限 12

1 $A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大 affine Weyl 群双有理作用の q 差分版

1.1 q 差分版双有理作用の構成

K は標数 0 の任意の可換体であるとし, $q \in K^\times$ を任意に固定する. $\mathcal{A}$ は以下の生成元と基本関係式によって定義される K 上の結合代数であるとする[1]. 生成元:

$$\varphi_i, \quad t_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

φ_i, t_i の添字 i を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{i+1}\varphi_i = q\varphi_i\varphi_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}),\\
&\varphi_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j \qquad (j \not\equiv i \pm 1 \mod n),\\
&t_j t_i = t_i t_j \quad t_j\varphi_i = \varphi_i t_j \qquad (i, j \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

このとき $\mathcal{A}$ は Ore domain になるので, $\mathcal{A}$ の商斜体 $\mathcal{K}$ が自然に構成される.

以下の生成元と基本関係式によって定義される群を $A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大 affine Weyl 群と呼び, $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ と表わす. 生成元:

$$s_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \qquad \omega.$$

[1] 結合代数は 1 を持つもののを考える.

s_i の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく. 基本関係式:

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \qquad (i \in \mathbb{Z}), \tag{1.1}$$
$$s_i s_j = s_j s_i \qquad (j \not\equiv i \pm 1 \mod n). \tag{1.2}$$
$$s_i^2 = 1 \qquad (i \in \mathbb{Z}), \tag{1.3}$$
$$\omega s_i = s_{i+1} \omega \qquad (i \in \mathbb{Z}). \tag{1.4}$$

s_i たちだけで生成される $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の部分群を $A_{n-1}^{(1)}$ 型の affine Weyl 群と呼び, $W(A_{n-1}^{(1)})$ と表わす.

定理 1.1 ($\mathcal{K}$ への自己同型作用) 拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の $\mathcal{K}$ における K 上の表現を次の条件によって定めることができる:

$$\begin{aligned}
&s_i(t_i) = t_{i+1}, \qquad s_i(t_{i+1}) = t_i,\\
&s_i(t_j) = t_j \qquad (j \not\equiv i, i+1 \mod n),\\
&s_i(\varphi_{i-1}) = \varphi_{i-1}\frac{1+t_i\varphi_i}{1+t_{i+1}\varphi_i} = \frac{1+q^{-1}t_i\varphi_i}{1+q^{-1}t_{i+1}\varphi_i}\varphi_{i-1},\\
&s_i(\varphi_{i+1}) = \frac{1+t_{i+1}\varphi_i}{1+t_i\varphi_i}\varphi_{i+1} = \varphi_{i+1}\frac{1+q^{-1}t_{i+1}\varphi_i}{1+q^{-1}t_i\varphi_i},\\
&s_i(\varphi_j) = \varphi_j \qquad (j \not\equiv i \pm 1 \mod n),\\
&\omega(\varphi_i) = \varphi_{i+1}, \quad \omega(t_i) = t_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

さらにこれらの作用はすべて斜体 $\mathcal{K}$ の自己同型になっている.

証明. 上のようにして斜体 $\mathcal{K}$ の K 上の自己同型が定まることを示すためには, $s_i(\varphi_j)$, $s_i(t_j)$ $(j \in \mathbb{Z})$ および $\omega(\varphi_j)$, $\omega(t_j)$ $(j \in \mathbb{Z})$ が φ_j, t_j $(j \in \mathbb{Z})$ の基本関係式を満たしていることを示せば十分である. そのことは直接の計算によって容易に証明される. たとえば $s_i(\varphi_{i-1})$ と $s_i(\varphi_{i+1})$ の可換性はそれらの定義より次のようにして示される:

$$s_i(\varphi_{i-1})s_i(\varphi_{i+1}) = \varphi_{i-1}\varphi_{i+1} = \varphi_{i+1}\varphi_{i-1} = s_i(\varphi_{i+1})s_i(\varphi_{i-1}).$$

さらに斜体 $\mathcal{K}$ への s_i, ω の作用が $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の表現を定めることを示すためには s_i, ω の作用が拡大 affine Weyl 群の基本関係式を満たしていることを示せばよい. (1.2), (1.3), (1.4) の直接の計算による証明は易しい. (1.1) の証明も直接の計算によって遂行可能であるが, かなり面倒である. そこで後の節において直接的な計算以外の方法で証明する. □

1.2 Lax 表示

$\mathcal{K}$ 上の多項式環 $\mathcal{K}[z]$ の元を成分に持つ $n \times n$ 行列 $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}_2(z)$ を次のように定める[2]:

$$\mathcal{K}_1(z) = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & & \\ & t_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & t_n \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \varphi_{n-1} \\ z\varphi_n & & & 1 \end{bmatrix}.$$

[2] ノート (1) の定義では z の代わりに z に $\mathcal{K}^\times$ の中心元 c をかけた cz が使われている. しかし, その違いは本質的なものではない.

$i = 1, \ldots, n-1$ に対して, ある 2×2 ブロックを除いて単位行列に等しい $\mathcal{K}$ の元を成分に持つ $n \times n$ 行列 $\mathcal{G}_{1,i}$, $\mathcal{G}_{2,i}$ を次のように定める:

$$\mathcal{G}_{1,i} = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & A_i & 0 & \\ & B_i & 1 & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}_{2,i} = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & B_i & A_i & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}.$$

ここで 1_k は $k \times k$ の単位行列であり,

$$A_i = \frac{1 + t_{i+1}\varphi_i}{1 + t_i\varphi_i}, \qquad B_i = \frac{t_i - t_{i+1}}{1 + t_i\varphi_i}.$$

A_i, B_i は次の条件で一意に特徴付けられる:

$$A_i t_i - B_i = t_{i+1}, \tag{1.5}$$

$$A_i + B_i\varphi_i = 1. \tag{1.6}$$

定理 1.2 (Lax 表示) 定理 1.1 における s_i の $\mathcal{K}$ への作用は次の条件を満たしている:

$$s_i(\mathcal{K}_1(z)) = \mathcal{G}_{1,i}\mathcal{K}_1(z)\mathcal{G}_{2,i}^{-1}, \qquad s_i(\mathcal{K}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}. \tag{1.7}$$

ここで $s_i(\mathcal{K}_i(z))$ は行列 $\mathcal{K}_i(z)$ の各成分に s_i を作用させて得られる行列である. 逆に s_i の $\mathcal{K}$ への K 上の自己同型作用は上の条件で一意に特徴付けられる. この結果を s_i の $\mathcal{K}$ への作用の **Lax 表示**と呼び, $\mathcal{K}_i(z)$ を **local L-operators** と呼ぶ. □

証明. $s_i(\mathcal{K}_1(z))$ は $\mathcal{K}_1(z)$ の中の t_i と t_{i+1} を交換してできる行列に等しい. $\mathcal{G}_{1,i}\mathcal{K}_1(z)\mathcal{G}_{2,i}^{-1}$ が実際にその形になることは添字 $i-1, i, i+1, i+2$ に対応する 4×4 ブロックの計算によって確かめられる. その計算は次の通り:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{1,i}\mathcal{K}_1(z)\mathcal{G}_{2,i} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & A_i & 0 & \\ & B_i & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{i-1} & 1 & & \\ & t_i & 1 & \\ & & t_{i+1} & 1 \\ & & & t_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & -A_i^{-1}B_i & A_i^{-1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_{i-1} & 1 & & \\ & At_i - B_i & 1 & \\ & Bt_i - (B_i + t_{i+1})A_i^{-1}B_i & (B_i + t_{i+1})A_i^{-1} & 1 \\ & & & t_{i+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t_{i-1} & 1 & & \\ & t_{i+1} & 1 & \\ & & t_i & 1 \\ & & & t_{i+2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

最後の等号で (1.5) を用いた.

A_i を用いて $s_i(\varphi_j)$ を表わすと次のようになる:

$$s_i(\varphi_j) = \begin{cases} \varphi_{i-1}A_i^{-1} & (j \equiv i-1 \mod n), \\ A_i\varphi_{i+1} & (j \equiv i+1 \mod n), \\ \varphi_j & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n). \end{cases}$$

よって $s_i(\mathcal{K}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}$ を証明するためには添字 $i-1, i, i+1, i+2$ に対応する 4×4 のブロックのみを計算すれば十分である. その計算は以下の通り:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & B_i & A_i & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \varphi_{i-1} & & \\ & 1 & \varphi_i & \\ & & 1 & \varphi_{i+1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & A_i^{-1} & 0 & \\ & -A_i^{-1}B_i & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{i-1}A_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_i^{-1} - \varphi_i A_i^{-1} B_i & \varphi_i & 0 \\ 0 & B_i A_i^{-1} - (B_i\varphi_i + A_i)A_i^{-1}B_i & B_i\varphi_i + A_i & A_i\varphi_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{i-1}A_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_i\varphi_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

最後の等号で (1.6) を用いた. これで $s_i(\mathcal{K}_2(z)) = \mathcal{G}_{2,i}\mathcal{K}_2(z)\mathcal{G}_{1,i}^{-1}$ も証明された.

条件 (1.7) で $\mathcal{K}$ への K 上の自己同型作用 s_i が一意に特徴付けられることは以上の計算から明らかである. □

1.3 量子離散 Hamiltonian 構造

定義 1.3 (量子離散 Hamiltonian 構造) $\mathcal{K}$ は非可換結合代数であり, Γ は群であり, $\alpha : \Gamma \to \operatorname{Aut}\mathcal{K}$, $g \mapsto \alpha_g$ は Γ の $\mathcal{K}$ への自己同型作用であるとする. このとき $\mathcal{K}$ を含む非可換結合代数 $\widetilde{\mathcal{K}}$ と写像 $U : \Gamma \to \widetilde{\mathcal{K}}^\times$, $g \mapsto U_g$ の組で以下の条件を満たすものを作用 α の $\widetilde{\mathcal{K}}$ における**量子離散 Hamiltonian 構造**と呼ぶことにする:

(1) 写像 $U : \Gamma \to \widetilde{\mathcal{K}}^\times$, $g \mapsto U_g$ は群の準同型である.

(2) $\alpha_g(a) = U_g a U_g^{-1} \quad (g \in \Gamma,\ a \in \mathcal{K})$.

このとき $g \in \Gamma$ に対して U_g を g の**量子離散 Hamiltonian** と呼ぶことにする[3]. □

---

[3] $\mathcal{K}$ は可換体 K 上の非可換結合代数であり, $\mathfrak{g}$ は K 上の Lie 代数であり, $\delta : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}_K \mathcal{K}$, $A \mapsto \delta_A$ は K 上の Lie 代数の準同型であるとする. ここで $\operatorname{Der}_K \mathcal{K}$ は $\mathcal{K}$ の K-derivations 全体のなす Lie 代数である. このとき $\mathcal{K}$ を含む非可換結合代数 $\widetilde{\mathcal{K}}$ と K 上の線形写像 $H : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathcal{K}}$, $A \mapsto H_A$ の組で以下の条件を満たすものを δ の**量子 Hamiltonian 構造**と呼ぶことにする:

(1) 線形写像 $H : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathcal{K}}$, $A \mapsto H_A$ は K 上の Lie 代数の準同型である.

(2) $\delta_A(a) = [H_A, a] \quad (A \in \mathfrak{g},\ a \in \mathcal{K})$.

このとき $A \in \mathfrak{g}$ に対して H_A を A の**量子 Hamiltonian** と呼ぶことにする. もしも $\mathcal{K}$ が Planck 定数 $\hbar$ を含むならば条件 (2) を次の条件に置き換えて量子 Hamiltonian 構造を定義する:

(2)' $\delta_A(a) = \hbar^{-1}[H_A, a] \quad (A \in \mathfrak{g},\ a \in \mathcal{K})$.

さらに $\mathcal{K}$ が $i = \sqrt{-1}$ を含む場合には物理学の習慣に合わせて条件 (2) を次の条件に置き換えて量子 Hamiltonian 構造を定義する場合もある:

(2)" $\delta_A(a) = i\hbar^{-1}[H_A, a] \quad (A \in \mathfrak{g},\ a \in \mathcal{K})$.

これ以後この節では q は不定元であり, K は標数 0 の可換体 K_0 上の形式 Larent 級数体 $K_0((q))$ に等しいと仮定する:

$$K = K_0((q)).$$

この節の目標は第 1.1 節で構成された A_{n-1} 型の affine Weyl 群の斜体 $\mathcal{K}$ への自己同型作用の量子離散 Hamiltonian 構造を構成することである.

φ_i, t_i $(i = 1, \dots, n)$ から形式巾級数環 $K_0[[q]]$ 上生成される $\mathcal{A}$ の部分代数を $\mathcal{A}_0$ と書くことにする. $\mathcal{A}_0$ の q 進完備化を $\widehat{\mathcal{A}}_0$ と書くことにする:

$$\widehat{\mathcal{A}}_0 = \operatorname*{proj\,lim}_{k\to\infty} \mathcal{A}_0/q^k\mathcal{A}_0.$$

$\mathcal{K}$ は斜体として $\mathcal{A}_0$ から生成される. $\widehat{\mathcal{A}}_0$ の商斜体 $\widehat{\mathcal{K}}$ を構成し, $\mathcal{K}$ に関する結果を $\widehat{\mathcal{K}}$ に拡張することを考えたい.

予想 1.4 $\widehat{\mathcal{A}}_0$ は Ore domain である. □

この予想の証明は難しくないと思われるが (一晩考えればできそう), 今日は面倒なのでこの予想が成立することを仮定して先に進むことにする. この予想が成立すれば $\widehat{\mathcal{A}}_0$ の商斜体 $\widehat{\mathcal{K}}$ が自然に構成される. 以下の計算はすべて $\widehat{\mathcal{K}}$ の中で正当化される.

注意 1.5 $\mathcal{K}$ 自身の “q 進完備化” を考えるのはそう簡単ではない. なぜならば以下のような例があるからだ. 素朴に考えれば q 進完備化の中で次の公式が成立する:

$$(1 - q\varphi_i)^{-1} = 1 + q\varphi_i + q^2\varphi_i^2 + q^3\varphi_i^3 + \cdots.$$

しかし, この等式の両辺に左から φ_{i-1} をかけて右から φ_{i-1}^{-1} をかけてその操作と右辺の無限和を交換すると, $\varphi_{i-1}\varphi_i\varphi_{i-1}^{-1} = q^{-1}\varphi_i$ より次の等式が導かれる:

$$(1 - \varphi_i)^{-1} = 1 + \varphi_i + \varphi_i^2 + \varphi_i^3 + \cdots.$$

確かにこの等式は形式的には正しいが, 右辺の無限和はもはや q 進位相で収束性が保証されない. このような例があるので割り算が自由にできる $\mathcal{K}$ の q 進完備化の構成は単純に考えるとうまく行かない. □

注意 1.6 $\widehat{\mathcal{A}}_0$ の q 進位相で収束する無限積 $\prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^k\varphi_i)$ に関しては

$$\varphi_{i-1}\left(\prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^k\varphi_i)\right)\varphi_{i-1}^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^{k-1}\varphi_i)$$

という公式が成立する. 実際, 右辺の無限積は $q^{-1}\widehat{\mathcal{A}}_0$ において q 進位相で収束することに注意し, $q^{-1}\widehat{\mathcal{A}}_0$ の元に $\widehat{\mathcal{A}}_0$ の元をかける演算と q 進位相に関する極限が交換することを使うと

$$\begin{aligned}
\varphi_{i-1}\left(\prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^k\varphi_i)\right) &= \prod_{k=0}^{\infty}(\varphi_{i-1} + q^k\varphi_{i-1}\varphi_i) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}(\varphi_{i-1} + q^{k-1}\varphi_i\varphi_{i-1}) = \left(\prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^{k-1}\varphi_i)\right)\varphi_{i-1}
\end{aligned}$$

となることがわかる. □

$u_i \in \widehat{\mathcal{K}}$ を次のように定める:

$$u_i = u_i(\varphi_i) = u(t_i, t_{i+1}; \varphi_i).$$

ここで

$$u(t_i, t_{i+1}; \varphi_i) = \frac{E_q(t_{i+1}\varphi_i)}{E_q(t_i\varphi_i)}, \qquad E_q(x) = \prod_{k=0}^{\infty}(1+q^k x).$$

$E_q(x)$ は次の q 差分方程式で一意に特徴付けられる:

$$E_q(qx) = \frac{1}{1+x}E_q(x), \qquad E_q(0) = 1.$$

よって $u_i(\varphi_i)$ は次の q 差分方程式で一意に特徴付けられる:

$$\frac{u_i(q\varphi_i)}{u_i(\varphi_i)} = \frac{1+t_i\varphi_i}{1+t_{i+1}\varphi_i} = A_i^{-1}, \qquad u_i(0) = 1.$$

補題 1.7 $s_i(\varphi_j) = u_i\varphi_j u_i^{-1} \quad (i, j \in \mathbb{Z})$.

証明. $j \not\equiv i \pm 1 \mod n$ のとき $s_i(\varphi_j) = \varphi_j$ でかつ u_i と φ_j は可換なので $s_i(\varphi_j) = u_i\varphi_j u_i^{-1}$ が成立することはすぐにわかる. $j \equiv i \pm 1 \mod n$ の場合は以下のようにして証明される:

$$\begin{aligned}
u_i\varphi_{i-1}u_i^{-1} &= \varphi_{i-1}(\varphi_{i-1}^{-1}u_i\varphi_{i-1})u_i^{-1} = \varphi_{i-1}u_i(q\varphi_i)u_i(\varphi_i)^{-1} = \varphi_{i-1}A_i^{-1} = s_i(\varphi_{i-1}),\\
u_i\varphi_{i+1}u_i^{-1} &= u_i(\varphi_{i+1}u_i^{-1}\varphi_{i+1}^{-1})\varphi_{i+1} = u_i(\varphi_i)u_i(q\varphi_i)^{-1}\varphi_{i+1} = A_i\varphi_{i+1} = s_i(\varphi_{i+1}). \quad \square
\end{aligned}$$

$e_q(x)$ を次のように定める:

$$e_q(x) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k x)}.$$

$e_q(x)$ は次の q 差分方程式で一意に特徴付けられる:

$$e_q(qx) = (1-x)e_q(x), \qquad e_q(0) = 1.$$

補題 1.8 $yx = qxy$ のとき以下の公式が成立する:

(1) $e_q(x)e_q(y) = e_q(x+y)$.

(2) $e_q(y)x = x(1-y)e_q(y) = (x-xy)e_q(y)$.

(3) $e_q(y)e_q(x) = e_q(x-xy)e_q(y)$.

(4) $e_q(y)e_q(x) = e_q(x+y-xy)$.

(5) $e_q(y)e_q(x) = e_q(x)e_q(y-xy)$.

(6) $e_q(y)e_q(x) = e_q(x)e_q(-xy)e_q(y)$.

証明. $e_q(x)$ の q 差分方程式による特徴付けから

$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

が成立することがわかる. 実際右辺を $f(x)$ と書くと $f(0)=1$ でかつ

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^{k+1})x^{k+1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{k+1})} \\ &= f(x) - (f(x) - f(qx)) = f(qx).\end{aligned}$$

よって (1) は次の q 二項定理と同値である:

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^l)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)\cdot(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{l-k})} x^k y^{l-k} = (x+y)^l.$$

この q 二項定理は l に関する帰納法で容易に証明される. (2) は $e_q(y)$ の満たす q 差分方程式から次のようにして導かれる:

$$e_q(y)x = x(x^{-1}e_q(y)x) = xe_q(qy) = x(1-y)e_q(y) = (x-xy)e_q(y).$$

(2) から (3) が次のようにして導かれる:

$$e_q(y)e_q(x) = (e_q(y)e_q(x)e_q(y)^{-1})e_q(y) = e_q(x-xy)e_q(y).$$

$y(x-xy) = q(x-xy)y$ なので (1) を (3) に適用すると (4) が得られる:

$$e_q(y)e_q(x) = e_q(x-xy)e_q(y) = e_q(x+y-xy).$$

$(y-xy)x = qx(y-xy)$ なので (1) を (4) に適用すると (5) が得られる:

$$e_q(y)e_q(x) = e_q(x+y-xy) = e_q(x)e_q(y-xy).$$

$y(-xy) = q(-xy)y$ なので (1) を (5) に適用すると (6) が得られる:

$$e_q(y)e_q(x) = e_q(x)e_q(y-xy) = e_q(x)e_q(-xy)e_q(y). \quad \square$$

$E_q(x) = e_q(-x)^{-1}$ なので補題 1.8 の公式は次のように書き直される. (e_q, x, y, $-xy$ をそれぞれ E_q, x, y, xy に置き換えて積の順序をひっくり返せばよい.)

補題 1.9 $yx = qxy$ のとき以下の公式が成立する:

(1) $E_q(y)E_q(x) = E_q(x+y)$.

(2) $E_q(x)y = (1+x)yE_q(x) = (x+xy)E_q(x)$.

(3) $E_q(x)E_q(y) = E_q(y+xy)E_q(x)$.

(4) $E_q(x)E_q(y) = E_q(x+y+xy)$.

(5) $E_q(x)E_q(y) = E_q(y)E_q(x+xy)$.

(6) $E_q(x)E_q(y) = E_q(y)E_q(xy)E_q(x)$. □

補題 1.10 $\lambda = t_i$, $\mu = t_{i+1}$, $\nu = t_{i+1}$, $x = \varphi_i$, $y = \varphi_{i+1}$ と置くと,

$$u(\lambda, \mu; x)u(\lambda, \nu; y)u(\mu, \nu; x) = u(\mu, \nu; y)u(\lambda, \nu; x)u(\lambda, \mu; y).$$

証明. $yx = qxy$ であるから補題 1.9 を用いて次を示せばよい:

$$\frac{E_q(\mu x)}{E_q(\lambda x)}\frac{E_q(\nu y)}{E_q(\lambda y)}\frac{E_q(\nu x)}{E_q(\mu x)} = \frac{E_q(\nu y)}{E_q(\mu y)}\frac{E_q(\nu x)}{E_q(\lambda x)}\frac{E_q(\mu y)}{E_q(\lambda y)}.$$

左辺と右辺は補題 1.9 の (6) だけを用いてそれぞれ次のように変形される:

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= E_q(\lambda x)^{-1}E_q(\mu x)\frac{E_q(\nu y)}{E_q(\lambda y)}E_q(\mu x)^{-1}E_q(\nu x) \\
&= E_q(\lambda x)^{-1}\frac{E_q(\mu x)E_q(\nu y)E_q(\mu x)^{-1}}{E_q(\mu x)E_q(\lambda y)E_q(\mu x)^{-1}}E_q(\nu x) = E_q(\lambda x)^{-1}\frac{E_q(\nu y)E_q(\mu\nu xy)}{E_q(\lambda y)E_q(\lambda\mu xy)}E_q(\nu x) \\
&= E_q(\lambda x)^{-1}E_q(\nu y)E_q(\mu\nu xy)E_q(\lambda\mu xy)^{-1}E_q(\lambda y)^{-1}E_q(\nu x) \\
&= E_q(\lambda x)^{-1}E_q(\nu y)E_q(\mu\nu xy)E_q(\lambda\mu xy)^{-1}E_q(\lambda\nu xy)E_q(\nu x)E_q(\lambda y)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= E_q(\nu y)E_q(\mu y)^{-1}\frac{E_q(\nu x)}{E_q(\lambda x)}E_q(\mu y)E_q(\lambda y)^{-1} \\
&= E_q(\nu y)\frac{E_q(\mu y)^{-1}E_q(\nu x)E_q(\mu y)}{E_q(\mu y)^{-1}E_q(\lambda x)E_q(\mu y)}E_q(\lambda y)^{-1} = E_q(\nu y)\frac{E_q(\mu\nu xy)E_q(\nu x)}{E_q(\lambda\mu xy)E_q(\lambda x)}E_q(\lambda y)^{-1} \\
&= E_q(\nu y)E_q(\lambda x)^{-1}E_q(\lambda\mu xy)^{-1}E_q(\mu\nu xy)E_q(\nu x)E_q(\lambda y)^{-1} \\
&= E_q(\lambda x)^{-1}E_q(\nu y)E_q(\lambda\nu xy)E_q(\lambda\mu xy)^{-1}E_q(\mu\nu xy)E_q(\nu x)E_q(\lambda y)^{-1}.
\end{aligned}$$

これより左辺と右辺が等しいことがわかる. □

補題 1.11 $\lambda = t_i$, $\mu = t_{i+1}$, $x = \varphi_i$ と置くと,

$$u(\lambda, \mu; x)u(\mu, \lambda; x) = 1.$$

証明. $u(\lambda, \mu; x) = E_q(\mu x)/E_q(\lambda x)$ なので明らか. □

拡大 affine Weyl 群 $\widehat{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の $\mathcal{A}_0$ への自己同型作用を

$$\begin{aligned}
&s_i : \begin{cases} \varphi_j \mapsto \varphi_j & (j \in \mathbb{Z}), \\ t_i \mapsto t_{i+1},\ t_{i+1} \mapsto t_i,\ t_j \mapsto t_j & (j \not\equiv i, i+1 \mod n), \end{cases} \\
&\omega : \varphi_j \mapsto \varphi_{j+1},\ t_j \mapsto t_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

という条件によって一意に定めることができる. この作用は $\widehat{\mathcal{K}}$ への $\widehat{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の自己同型作用を誘導する. その作用に関する捻られた群環を $\widetilde{\mathcal{K}} = \widehat{\mathcal{K}}[\widehat{W}(A_{n-1}^{(1)})]$ と書くことにし, $\widetilde{\mathcal{K}}$ の中の s_i, ω のコピーをそれぞれ $\tilde{s}_i$, $\tilde{\omega}$ と書くことにする. このとき $\widetilde{\mathcal{K}}$ の中では次の関係式が成立している:

$$\tilde{s}_i\tilde{s}_{i+1}\tilde{s}_i = \tilde{s}_{i+1}\tilde{s}_i\tilde{s}_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}),$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{s}_i\tilde{s}_j = \tilde{s}_j\tilde{s}_i \qquad (j \not\equiv i \pm 1 \mod n),\\
&\tilde{s}_i^2 = 1 \qquad (i \in \mathbb{Z}),\\
&\tilde{\omega}\tilde{s}_i = \tilde{s}_{i+1}\tilde{\omega} \qquad (i \in \mathbb{Z}),\\
&\tilde{s}_i\varphi_j\tilde{s}_i^{-1} = \varphi_j \qquad (i, j \in \mathbb{Z}),\\
&\tilde{s}_i t_i \tilde{s}_i^{-1} = t_{i+1}, \quad \tilde{s}_i t_{i+1}\tilde{s}_i^{-1} = t_i \qquad (i \in \mathbb{Z}),\\
&\tilde{s}_i t_j \tilde{s}_i^{-1} = t_j \qquad (j \not\equiv i, i+1 \mod n),\\
&\tilde{\omega}\varphi_j\tilde{\omega}^{-1} = \varphi_{j+1}, \quad \tilde{\omega} t_j \tilde{\omega}^{-1} = t_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

$\tilde{s}_i$ たちの $\widetilde{\mathcal{K}}$ への内部自己同型作用は φ_j を動かさずに t_j のみを動かす.

$U_i \in \widehat{\mathcal{K}}$ を次のように定める:

$$U_i = u_i\tilde{s}_i = u(t_i, t_{i+1}; \varphi_i)\tilde{s}_i \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

定理 1.12 (量子離散 Hamiltonian 構造) $s_i, \omega \in \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ のそれぞれに対して $U_i, \tilde{\omega} \in \widetilde{\mathcal{K}}^\times$ を対応させることによって, 定理 1.1 で構成された $\widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の $\mathcal{K}$ への自己同型作用の $\widetilde{\mathcal{K}}$ における量子離散 Hamiltonian 構造が定まる.

証明. 定理の条件によって群の準同型写像 $U : \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) \to \widetilde{\mathcal{K}}^\times$ が定まることを示すためには

$$U_iU_{i+1}U_i = U_{i+1}U_iU_{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}), \tag{1.8}$$
$$U_iU_j = U_jU_i \qquad (j \not\equiv i \pm 1 \mod n), \tag{1.9}$$
$$U_i^2 = 1 \qquad (i \in \mathbb{Z}), \tag{1.10}$$
$$\tilde{\omega}U_i = U_{i+1}\tilde{\omega} \qquad (i \in \mathbb{Z}) \tag{1.11}$$

を示せば十分である. (1.9), (1.11) は容易に確かめられる. $\lambda = t_i$, $\mu = t_{i+1}$, $\nu = t_{i+1}$, $x = \varphi_i$, $y = \varphi_{i+1}$ と置くと, (1.8) の両辺はそれぞれ次に等しい:

$$
\begin{aligned}
U_iU_{i+1}U_i &= u(\lambda, \mu; x)u(\lambda, \nu; y)u(\mu, \nu; x)\tilde{s}_i\tilde{s}_{i+1}\tilde{s}_i,\\
U_{i+1}U_iU_{i+1} &= u(\mu, \nu; y)u(\lambda, \nu; x)u(\lambda, \mu; y)\tilde{s}_{i+1}\tilde{s}_i\tilde{s}_{i+1}.
\end{aligned}
$$

よって補題 1.10 より (1.8) が成立することがわかる. 同様に (1.3) の左辺は次に等しい:

$$U_i^2 = u(\lambda, \mu; x)u(\mu, \lambda; x)\tilde{s}_i^2.$$

よって補題 1.11 より (1.10) が成立することがわかる.

$\tilde{s}_i$ の定義と補題 1.7 より

$$U_i\varphi_jU_i^{-1} = u_i\tilde{s}_i\varphi_j\tilde{s}_i^{-1}u_i^{-1} = u_i\varphi_ju_i^{-1} = s_i(\varphi_j).$$

$\tilde{s}_i$ の定義より

$$U_it_jU_i = u_i\tilde{s}_it_j\tilde{s}_i^{-1}u_i^{-1} = u_is_i(t_j)u_i^{-1} = s_i(t_j).$$

さらに $\tilde{\omega}$ の定義より次が成立することもわかる:

$$\omega(\varphi_j) = \tilde{\omega}\varphi_j\tilde{\omega}^{-1}, \quad \omega(t_j) = \tilde{\omega}t_j\tilde{\omega}^{-1}.$$

これで定義 1.3 の条件 (2) も成立することが示された. □

注意 1.13 定理 1.1 では作用が (1.1) を満たすことの証明を省略したが, 上の定理の証明によってそのことも同時に証明された. □

2 $q \to 1$ での微分極限

この節では少しラフに話を進める．

次の生成元と基本関係式を持つ結合代数を考える．生成元:

$$f_i, \quad \varepsilon_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

f_i, ε_i の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておく．基本関係式:

$$\begin{aligned}
&[f_{i+1}, f_i] = \hbar \quad (i \in \mathbb{Z}), \\
&[f_i, f_j] = 0 \quad (i - j \not\equiv \pm 1), \\
&[f_i, \varepsilon_j] = 0, \quad [\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0 \quad (i, j \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

このとき，

$$\varphi_i = -e^{\eta f_i}, \quad q = e^{\eta^2 \hbar}, \quad t_i = e^{-\eta^2 \varepsilon_i} = q^{-\varepsilon_i/\hbar}$$

と置くと，φ_i, t_i は第 1.1 節の基本関係式を満たしている．

以下では $\hbar \neq 0$ を固定して $\eta \to 0$ とする**微分極限**を調べる．$\hbar \neq 0$ の固定は量子系のまま極限を取ることを意味しており，$\eta \to 0$ の極限は q 差分系から微分系に移ることを意味している．表現論的には量子群から Lie 代数への極限に対応している[4]．

2.1 双有理作用の極限

A_i, B_i は次のように定義されたのであった:

$$A_i = \frac{1 + t_{i+1}\varphi_i}{1 + t_i \varphi_i}, \qquad B_i = \frac{t_i - t_{i+1}}{1 + t_i \varphi_i}.$$

$\eta \to 0$ において $t_i - t_{i+1} = -\eta^2(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} + O(\eta))$, $1 + t_i \varphi_i = -\eta(f_i + O(\eta))$ であるから，

$$B_i = \eta \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{f_i} + O(\eta^2), \qquad A_i = 1 - B_i \varphi_i = 1 + \eta \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{f_i} + O(\eta^2).$$

$\varphi_j = -(1 + \eta f_j + O(\eta^2))$ であるから

$$\begin{aligned}
&s_i(\varphi_{i-1}) = -(1 + \eta s_i(f_{i-1}) + O(\eta^2)), \\
&s_i(\varphi_{i-1}) = \varphi_{i-1} A_i^{-1} = -\left(1 + \eta \left(f_{i-1} - \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{f_i}\right) + O(\eta^2)\right), \\
&s_i(\varphi_{i+1}) = -(1 + \eta s_i(f_{i+1}) + O(\eta^2)), \\
&s_i(\varphi_{i+1}) = A_i \varphi_{i+1} = -\left(1 + \eta \left(f_{i+1} + \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{f_i}\right) + O(\eta^2)\right).
\end{aligned}$$

よって s_i の φ_j への作用は f_j への次の作用を誘導する:

$$s_i(f_j) = \begin{cases}
f_{i-1} - \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{f_i} & (j \equiv i - 1 \mod n), \\
f_{i+1} + \dfrac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{f_i} & (j \equiv i + 1 \mod n), \\
f_j & (j \not\equiv i \pm 1 \mod n).
\end{cases}$$

これは微分版の affine Weyl 群の双有理作用に一致している．

[4] $\eta \neq 0$ を固定して $\hbar \to 0$ とする極限操作は q 差分系のまま古典極限を取ることに意味している．表現論的には量子群から Poisson Lie 群への極限に対応している．

2.2 Lax 表示の極限

$\mathcal{K}_j(z)$ の定義を次のように変えても第 1.2 節の議論はそのまま成立している[5]:

$$\mathcal{K}_1(z) = \begin{bmatrix} t_1 & z & & \\ & t_2 & \ddots & \\ & & \ddots & z \\ z & & & t_n \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & z\varphi_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & z\varphi_{n-1} \\ z\varphi_n & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{L}(z) = \mathcal{K}_1(z)\mathcal{K}_2(z)$ と置くと,

$$\mathcal{L}(z) = \begin{bmatrix} t_1 & z(1+t_1\varphi_1) & z^2\varphi_2 & & \\ & t_2 & z(1+t_2\varphi_2) & \ddots & \\ & & t_3 & \ddots & z^2\varphi_{n-1} \\ z^2\varphi_n & & & \ddots & z(1+t_{n-1}\varphi_{n-1}) \\ z(1+t_n\varphi_n) & z^2\varphi_1 & & & t_n \end{bmatrix}.$$

よって $\eta \to 0$ で次の漸近公式が成立している:

$$\mathcal{L}(\eta z) = 1_n - \eta^2 L(z) + O(\eta^3).$$

ここで 1_n は n 次の単位行列であり,

$$L(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & zf_1 & z^2 & & \\ & \varepsilon_2 & zf_2 & \ddots & \\ & & \varepsilon_3 & \ddots & z^2 \\ z^2 & & & \ddots & zf_{n-1} \\ zf_n & z^2 & & & \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

これは微分版の L-operator と一致している.

$\mathcal{K}_j(z)$ の定義を上のように変更したとき, $\mathcal{G}_{j,i}$ の定義を次のように変更しなければいけない:

$$\mathcal{G}_{1,i}(z) = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & A_i & 0 & \\ & z^{-1}B_i & 1 & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}_{2,i}(z) = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & z^{-1}B_i & A_i & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{G}_{1,i}(\eta z)$ は $\eta \to 0$ で次の漸近公式を満たしている:

$$\mathcal{G}_{1,i}(\eta z) = G_{1,i}(z) + O(\eta).$$

ここで

$$G_{1,i}(z) = \begin{bmatrix} 1_{i-1} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & z^{-1}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})/f_i & 1 & \\ & & & 1_{n-i-1} \end{bmatrix}.$$

[5] $\mathcal{K}_1(z)$, $\mathcal{K}_2(z)$ を適当な対角行列で相似変換すると実際にこの形にできる.

よって

$$
\begin{aligned}
s_i(\mathcal{L}(\eta z)) &= 1_n - \eta^2 s_i(L(z)) + O(\eta^3),\\
s_i(\mathcal{L}(\eta z)) &= \mathcal{G}_{1,i}(\eta z)\mathcal{L}(\eta z)\mathcal{G}_{1,i}(\eta z)^{-1} = 1_n - \eta^2\mathcal{G}_{1,i}(\eta z)L(z)\mathcal{G}_{1,i}(\eta z)^{-1} + O(\eta^3)\\
&= 1_n - \eta^2 G_{1,i}(z)L(z)G_{1,i}(z)^{-1} + O(\eta^3).
\end{aligned}
$$

よって s_i の $\mathcal{L}(\eta z)$ への作用は $L(z)$ への次の作用を誘導する:

$$
s_i(L(z)) = G_{1,i}(z)L(z)G_{1,i}(z)^{-1}.
$$

これは微分版の affine Weyl 群の双有理作用の Lax 表示に一致している.

2.3 量子離散 Hamiltonian の極限

x が q に依存していなければ

$$
\lim_{q\to 1}\frac{E_q(q^\beta x)}{E_q(q^\alpha x)} = (1+x)^{\alpha-\beta}
$$

という公式が成立することが知られている[6]. この公式を $q=e^{\eta^2\hbar}$, $\alpha=-\varepsilon_i/\hbar$, $\beta=-\varepsilon_{i+1}/\hbar$, $x=-e^{\eta' f_i}$ の場合に適用すると,

$$
\lim_{\eta\to 0}\frac{E_q(t_{i+1}x)}{E_q(t_i x)} = (1+x)^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar} = \bigl(-\eta'(f_i+O(\eta'))\bigr)^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}.
$$

したがって

$$
\lim_{\eta\to 0}(-\eta)^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}u_i = \lim_{\eta'\to 0}\lim_{\eta\to 0}(-\eta')^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}\frac{E_q(t_{i+1}x)}{E_q(t_i x)} = f_i^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}.
$$

この結果は微分版の affine Weyl 群作用の量子離散 Hamiltonian 構造に関する結果と整合的である.

$f_i^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}$ の内部自己同型作用が s_i の f_j たちへの作用を与えることは以下のようにして確かめられる. f_j たちの交換関係より

$$
\begin{aligned}
\left[f_{i-1}, f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}\right] &= -\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}{f_i}f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar},\\
\left[f_{i+1}, f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}\right] &= \frac{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}{f_i}f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar},\\
\left[f_j, f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}\right] &= 0 \qquad (j\not\equiv i\pm 1 \mod n).
\end{aligned}
$$

したがって $j\not\equiv i\pm 1 \mod n$ のとき

$$
\begin{aligned}
f_i^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}f_{i-1}f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar} &= f_{i-1} - \frac{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}{f_i} = s_i(f_{i-1}),\\
f_i^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}f_{i+1}f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar} &= f_{i+1} + \frac{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}{f_i} = s_i(f_{i+1}),\\
f_i^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar}f_j f_i^{(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})/\hbar} &= f_j = s_i(f_j) \qquad (j\not\equiv i\pm 1 \mod n).
\end{aligned}
$$

[6] $\alpha-\beta$ が整数ならば自明である. $\alpha-\beta$ が整数でない場合は q 二項展開から導かれる.