量子 $m \times n$ 模型に関するノート

黒木 玄

2004 年 9 月 15 日記号変更 (2004 年 8 月 13 日作成)

目 次

1 斜体上定義された置換群の有理作用

K は可換とは限らない任意の体であるとする.

1.1 横作用の基本公式

$r, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in K^\times$ は以下の条件を満たしていると仮定する:

- r および $x_m \cdots x_2 x_1$, $y_m \cdots y_2 y_1$ は $K^\times$ の中心元である.
- x_i, y_i の添字 i を次の準周期条件によって $\mathbb{Z}$ 全体に拡張しておく:

$$x_{i+m} = r x_i, \qquad y_{i+m} = r y_i.$$

- α を次のように定めると $\alpha \in K^\times$:

$$\alpha := x_{m-1} \cdots x_1 x_0 - y_m \cdots y_2 y_1.$$

次の公式が成立していることに注意せよ:

$$x_{i+m-1} \cdots x_{i+1} x_i = r^i x_{m-1} \cdots x_1 x_0, \qquad y_{i+m} \cdots y_{i+2} y_{i+1} = r^i y_m \cdots y_2 y_1.$$

これらの公式は $x_m x_{m-1} \cdots x_1 = x_{m-1} \cdots x_1 x_m$ などが成立していることに注意すればただちに証明される.

- $\tilde{a}_i$ を次のように定めると $\tilde{a}_i \in K^\times$:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_i &:= \sum_{j=1}^{m} \overbrace{y_{i+m-1}\cdots y_{i+j+1}y_{i+j}}^{m-j}\overbrace{x_{i+j-2}\cdots x_{i+1}x_i}^{j-1} \\ &= y_{i+m-1}\cdots y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+m-1}\cdots y_{i+3}y_{i+2}x_i + y_{i+m-1}\cdots y_{i+3}x_{i+1}x_i \\ &+ \cdots + y_{i+m-1}y_{i+m-2}x_{i+m-4}\cdots x_{i+1}x_i + y_{i+m-1}x_{i+m-3}x_{i+m-4}\cdots x_{i+1}x_i \\ &+ x_{i+m-2}x_{i+m-3}x_{i+m-4}\cdots x_{i+1}x_i.\end{aligned}$$

さらに $a_i \in K^\times$ を次のように定めておく:

$$a_i := r^{-(i-1)}\tilde{a}_i.$$

このとき $\tilde{a}_i$, a_i は次の準周期条件を満たしている:

$$\tilde{a}_{i+m} = r^{m-1}\tilde{a}_i, \qquad a_{i+m} = r^{-1}a_i.$$

例 1.1 $m = 2$ のとき

$$\tilde{a}_1 = y_2 + x_1, \quad \tilde{a}_2 = y_3 + x_2.$$

$m = 3$ のとき

$$\tilde{a}_1 = y_3y_2 + y_3x_1 + x_2x_1, \quad \tilde{a}_2 = y_4y_3 + y_4x_2 + x_3x_2, \quad \tilde{a}_3 = y_5y_4 + y_5x_3 + x_4x_3.$$

$m = 4$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 &= y_4y_3y_2 + y_4y_3x_1 + y_4x_2x_1 + x_3x_2x_1, \\ \tilde{a}_2 &= y_5y_4y_3 + y_5y_4x_2 + y_5x_3x_2 + x_4x_3x_2, \\ \tilde{a}_3 &= y_6y_5y_4 + y_6y_5x_3 + y_6x_4x_3 + x_5x_4x_3, \\ \tilde{a}_4 &= y_7y_6y_5 + y_7y_6x_4 + y_7x_5x_4 + x_6x_5x_4. \quad \square\end{aligned}$$

$K[z]$ の元を成分に持つ行列 $\Lambda(z)$ を次のように定める:

$$\Lambda(z) := E_{12} + \cdots + E_{n-1,n} + zE_{n1}.$$

ここで E_{ij} は $m \times m$ の行列単位である. 対角行列 X, Y, A を次のように定める:

$$\begin{aligned}X &:= \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_m), \\ Y &:= \mathrm{diag}(y_1, \dots, y_m), \\ A &:= \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_m).\end{aligned}$$

さらに $X^{[i]}$, $Y^{[i]}$, $A^{[i]}$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}X^{[i]} &:= \mathrm{diag}(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}), \\ Y^{[i]} &:= \mathrm{diag}(y_{i+1}, \dots, y_{i+m}), \\ A^{[i]} &:= \mathrm{diag}(a_{i+1}, \dots, a_{i+m}).\end{aligned}$$

x_i, y_i, a_i の準周期性より,

$$\begin{aligned}\Lambda(z)X^{[i]}\Lambda(r^{-1}z)^{-1} &= X^{[i+1]}, \\ \Lambda(z)Y^{[i]}\Lambda(r^{-1}z)^{-1} &= Y^{[i+1]}, \\ \Lambda(r^{-1}z)A^{[i]}\Lambda(z)^{-1} &= A^{[i+1]}.\end{aligned}$$

補題 1.2 以上の設定のもとで以下の公式が成立している:

(1) $\tilde{a}_{i+1}x_i - y_{i+m}\tilde{a}_i = x_{i+m-1}\cdots x_{i+1}x_i - y_{i+m}\cdots y_{i+2}y_{i+1} = r^i\alpha$.

(2) $a_{i+1}x_i - y_i a_i = \alpha$.

(3) $\Lambda(r^{-1}z)A\Lambda(z)^{-1}X - YA = \alpha$.

証明. (1) は次のようにして証明される. まず $y_{i+m}\tilde{a}_i$, $\tilde{a}_{i+1}x_i$ を個別に計算すると,

$$\tilde{a}_{i+1}x_i = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{y_{i+m}\cdots y_{i+j+2}y_{i+j+1}}^{m-j}\overbrace{x_{i+j-1}\cdots x_{i+1}x_i}^{j},$$

$$\begin{aligned} y_{i+m}\tilde{a}_i &= \sum_{j=1}^{m} \overbrace{y_{i+m}\cdots y_{i+j+1}y_{i+j}}^{m-j+1}\overbrace{x_{i+j-2}\cdots x_{i+1}x_i}^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \overbrace{y_{i+m}\cdots y_{i+j+2}y_{i+j+1}}^{m-j}\overbrace{x_{i+j-1}\cdots x_{i+1}x_i}^{j}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i+1}x_i - y_{i+m}\tilde{a}_i &= x_{i+m-1}\cdots x_{i+1}x_i - y_{i+m}\cdots y_{i+2}y_{i+1} \\ &= r^i x_{m-1}\cdots x_1x_0 - r^i y_m\cdots y_2y_1 = r^i\alpha. \end{aligned}$$

(2) の結果は (1) の結果に $y_{i+m} = ry_i$, $\tilde{a}_i = r^{i-1}a_i$, $\tilde{a}_{i+1} = r^i a_{i+1}$ を代入して, 全体を r^i で割れば導かれる. (3) は (2) の書き変えに過ぎない. □

補題 1.3 $K^\times$ の元を成分に持つ m 次対角行列

$$X' = \mathrm{diag}(x'_1,\ldots,x'_m), \qquad Y' = \mathrm{diag}(y'_1,\ldots,y'_m)$$

に関する方程式

$$(\Lambda(z)+X)(\Lambda(r^{-1}z)+Y) = (\Lambda(z)+X')(\Lambda(r^{-1}z)+Y'), \tag{1.1}$$
$$x_m\cdots x_2x_1 = ry'_m\cdots y'_2y'_1, \tag{1.2}$$
$$ry_m\cdots y_2y_1 = x'_m\cdots x'_2x'_1 \tag{1.3}$$

は唯一の解を持ち, その解は次の表示を持つ:

$$x'_i = a_{i+1}^{-1}y_ia_i = x_i - \frac{\alpha}{a_{i+1}} = r\tilde{a}_{i+1}^{-1}y_i\tilde{a}_i = x_i - \frac{r^i\alpha}{\tilde{a}_{i+1}}, \tag{1.4}$$
$$y'_i = a_{i+1}x_ia_i^{-1} = y_i + \frac{\alpha}{a_i} = r^{-1}\tilde{a}_{i+1}x_i\tilde{a}_i^{-1} = y_i + \frac{r^{i-1}\alpha}{\tilde{a}_i}. \tag{1.5}$$

この表示は次と同値である:

$$\begin{aligned} X' &= {A^{[1]}}^{-1}YA = X - \alpha {A^{[1]}}^{-1}, \\ Y' &= A^{[1]}XA^{-1} = Y + \alpha A^{-1}. \end{aligned}$$

注意 1.4 K が可換体であるならば $\det(\Lambda(z)+X)=(-1)^{m-1}z+x_1\cdots x_m$ である．よってそのとき条件 (1.2) は $\det(\Lambda(z)+X)$ と $r\det(\Lambda(r^{-1}z)+Y')=(-1)^{m-1}z+ry'_1\cdots y'_m$ が等しいという条件に同値である．条件 (1.3) についても同様である． □

補題 1.3 の証明. まず (1.4), (1.5) それぞれの 2 番目から 4 番目の等号を証明しよう．補題 1.2 の (2) より $a_{i+1}x_i=y_ia_i+\alpha$, $y_ia_i=a_{i+1}x_i-\alpha$ であるから

$$
\begin{aligned}
a_{i+1}x_ia_i^{-1}&=(y_ia_i+\alpha)a_i^{-1}=y_i+\frac{\alpha}{a_i},\\
a_{i+1}^{-1}y_ia_i&=a_{i+1}^{-1}(a_{i+1}x_i-\alpha)=x_i-\frac{\alpha}{a_{i+1}}.
\end{aligned}
$$

これで (1.4), (1.5) それぞれの 2 番目の等号が示された．残りの等号は $a_i=r^{-(i-1)}\tilde{a}_i$, $a_{i+1}=r^{-i}\tilde{a}_{i+1}$ を代入すれば得られる．

次に (1.4), (1.5) から (1.1), (1.2), (1.3) が導かれることを証明しよう．

(1.1) の左辺は次のように表わされる:

$$
(\Lambda(z)+X)(\Lambda(r^{-1}z)+Y)=\Lambda(z)\Lambda(r^{-1}z)+(X+\Lambda(z)Y\Lambda(r^{-1}z)^{-1})\Lambda(r^{-1}z)+XY.
$$

(1.4), (1.5) はそれぞれ次に同値である:

$$
\begin{aligned}
X'&=\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1}YA=X-\alpha\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1},\\
Y'&=\Lambda(r^{-1}z)A\Lambda(z)^{-1}XA^{-1}=Y+\alpha A^{-1}.
\end{aligned}
$$

これらの一番右側の式を (1.1) の右辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
(\Lambda(z)+X')(\Lambda(r^{-1}z)+Y')&=(\Lambda(z)+X-\alpha\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1})(\Lambda(r^{-1}z)+Y+\alpha A^{-1})\\
&=\Lambda(z)\Lambda(r^{-1}z)+(X+\Lambda(z)Y\Lambda(r^{-1}z)^{-1})\Lambda(r^{-1}z)\\
&\quad+XY+\alpha XA^{-1}-\alpha\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1}Y+\alpha^2\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1}A^{-1}.
\end{aligned}
$$

よって (1.1) が成立するための必要十分条件は

$$
XA^{-1}-\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1}Y=\alpha\Lambda(z)A^{-1}\Lambda(r^{-1}z)^{-1}A^{-1}.
$$

この条件は補題 1.2 の (3) と同値である．これで (1.4), (1.5) から (1.1) が導かれることがわかった．

(1.4), (1.5) より

$$
\begin{aligned}
y'_m\cdots y'_1&=a_{m+1}x_ma_m^{-1}\cdots a_3x_2a_2^{-1}a_2x_1a_1^{-1}=r^{-1}a_1x_m\cdots x_1a_1^{-1}=r^{-1}x_m\cdots x_1,\\
x'_m\cdots x'_1&=a_{m+1}^{-1}y_ma_m\cdots a_3^{-1}y_2a_2a_2^{-1}y_1a_1=ra_1^{-1}y_m\cdots y_1a_1=ry_m\cdots y_1.
\end{aligned}
$$

これで (1.4), (1.5) から (1.2), (1.3) が導かれることがわかった．

最後に方程式 (1.1), (1.2), (1.3) の解の一意性を証明しよう．X', Y' は方程式 (1.1), (1.2), (1.3) の解であると仮定する．X', Y' は次の形をしていると仮定しても一般性が失われない:

$$
\begin{aligned}
Y'&=Y+C, &\qquad C&=\mathrm{diag}(c_1,\dots,c_m),\\
X'&=X-D, &\qquad D&=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_m).
\end{aligned}
$$

この仮定のもとで $D = \Lambda(z)C\Lambda(r^{-1}z)^{-1}$ でかつ $c_i = \alpha a_i^{-1} = r^{i-1}\alpha\tilde{a}_i$ となることを示せばよい.

$Y' = Y + C$, $X' = X - D$ を (1.1) の右辺に代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda(z)+X')(\Lambda(r^{-1}z)+Y') = (\Lambda(z)+X-D)(\Lambda(r^{-1}z)+Y+C)\\
&\quad = \Lambda(z)\Lambda(r^{-1}z) + (X + \Lambda(z)Y\Lambda(r^{-1}z)^{-1} - D + \Lambda(z)C\Lambda(r^{-1}z)^{-1})\Lambda(r^{-1}z)\\
&\quad + XY + XC - DY - DC.
\end{aligned}
$$

よって (1.1) が成立するための必要十分条件は次が成立することである:

$$D = \Lambda(z)C\Lambda(r^{-1}z)^{-1}, \qquad XC - DY = DC.$$

$c_{i+m} = rc_i$ $(i = 1, \dots, m)$ と置くことによって, この条件は次のように書き直される:

$$
\begin{aligned}
&d_i = c_{i+1} \qquad (i = 1, \dots, m),\\
&x_i c_i - c_{i+1} y_i = c_{i+1} c_i \qquad (i = 1, \dots, m).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

もしも $c_i = 0$ を満たす i が存在するならば $c_{i+1}y_i = 0$ となるので, $y_i \in K^\times$ という仮定より $c_{i+1} = 0$ も導かれる. したがってどれか一つでも c_i が 0 になれば残りもすべて 0 になる. しかしそのとき $Y' = Y$ となるので (1.2) より

$$\alpha = r^{-1}x_m \cdots x_1 - y_m \cdots y_1 = y'_m \cdots y'_1 - y_m \cdots y_1 = y_m \cdots y_1 - y_m \cdots y_1 = 0$$

となって最初の $\alpha \in K^\times$ という仮定に反する. これで $c_i \in K^\times$ $(i = 1, \dots, m)$ であることがわかった. よって $u_i = c_i^{-1}$ とおいて (1.6) を次のように書き直すことができる:

$$u_{i+1}x_i - y_i u_i = 1 \qquad (i = 1, \dots, m).$$

これは u_i に関する連立方程式である. その連立方程式は $y_m \cdots y_1$, $x_m \cdots x_1$ が $K^\times$ の中心元でかつ $\alpha \in K^\times$ という仮定のもとで一意に解けることがわかる. たとえば, i 番目の方程式の両辺に左から $y_m \cdots y_{i+1}$ をかけ, 右から $x_{i-1} \cdots x_1$ をかけ, その結果を $i = 1, \dots, m$ について足し合わせると次が得られる:

$$r^{-1}u_1 x_m \cdots x_1 - y_m \cdots y_1 u_1 = \sum_{i=1}^{m} \overbrace{y_m \cdots y_{i+1}}^{m-i}\,\overbrace{x_{i-1} \cdots x_1}^{i-1}.$$

これの左辺は αu_1 に等しく, 右辺は $\tilde{a}_1$ に等しいので $u_1 = \alpha^{-1}\tilde{a}_1$ すなわち $c_1 = \alpha\tilde{a}_1^{-1}$ である. 他の c_i についても同様の計算によって $c_i = r^{i-1}\alpha\tilde{a}_i^{-1}$ となることがわかる. これで方程式 (1.1), (1.2), (1.3) の解の一意性が示された. □

例 1.5 ($m = 2$ の場合) $m = 2$ のとき $\alpha = x_1 x_0 - y_2 y_1$ であり,

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= r(y_3 + x_2)^{-1}y_1(y_2 + x_1) = x_1 - \frac{r\alpha}{y_3 + x_2},\\
x'_2 &= r(y_4 + x_3)^{-1}y_2(y_3 + x_2) = x_2 - \frac{r^2\alpha}{y_4 + x_3},\\
y'_1 &= r^{-1}(y_3 + x_2)x_1(y_2 + x_1)^{-1} = y_1 + \frac{\alpha}{y_2 + x_1},\\
y'_2 &= r^{-1}(y_4 + x_3)x_2(y_3 + x_2)^{-1} = y_2 + \frac{r\alpha}{y_3 + x_2}. \quad \square
\end{aligned}
$$

例 1.6 ($m=3$ **の場合**) $m=3$ のとき $\alpha = x_2x_1x_0 - y_3y_2y_1$ であり,

$$
\begin{aligned}
x_1' &= r(y_4y_3+y_4x_2+x_3x_2)^{-1}y_1(y_3y_2+y_3x_1+x_2x_1) = x_1 - \frac{r\alpha}{y_4y_3+y_4x_2+x_3x_2},\\
x_2' &= r(y_5y_4+y_5x_3+x_4x_3)^{-1}y_2(y_4y_3+y_4x_2+x_3x_2) = x_2 - \frac{r^2\alpha}{y_5y_4+y_5x_3+x_4x_3},\\
x_3' &= r(y_6y_5+y_6x_4+x_5x_4)^{-1}y_3(y_5y_4+y_5x_3+x_4x_3) = x_3 - \frac{r^3\alpha}{y_6y_5+y_6x_4+x_5x_4},\\
y_1' &= r^{-1}(y_4y_3+y_4x_2+x_3x_2)x_1(y_3y_2+y_3x_1+x_2x_1)^{-1} = y_1 + \frac{\alpha}{y_3y_2+y_3x_1+x_2x_1},\\
y_2' &= r^{-1}(y_5y_4+y_5x_3+x_4x_3)x_2(y_4y_3+y_4x_2+x_3x_2)^{-1} = y_2 + \frac{r\alpha}{y_4y_3+y_4x_2+x_3x_2},\\
y_3' &= r^{-1}(y_6y_5+y_6x_4+x_5x_4)x_3(y_5y_4+y_5x_3+x_4x_3)^{-1} = y_3 + \frac{r^2\alpha}{y_5y_4+y_5x_3+x_4x_3}. \quad \square
\end{aligned}
$$

1.2 縦作用の基本公式

1.3 可換な場合の行列式公式

定理 1.7 K は任意の可換体であるとし, $x_{ij} \in K$ $(i=1,\dots,m,\ j=1\dots,n)$ とする. $n \times n$ 行列 $K_1(z),\dots,K_m(z)$ と $m \times m$ 行列 $V_1(w),\dots,V_m(w)$ を次のように定める:

$$
K_i(z) = \begin{bmatrix} x_{i1} & 1 & & \\ & x_{i2} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & x_{in} \end{bmatrix}, \qquad V_j(z) = \begin{bmatrix} x_{1j} & 1 & & \\ & x_{2j} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ w & & & x_{mj} \end{bmatrix}.
$$

このとき次の公式が成立している:

$$
\det\bigl((-1)^{m-1}w + K_1(z)\cdots K_m(z)\bigr) = \det\bigl((-1)^{n-1}z + V_1(w)\cdots V_n(w)\bigr). \quad \square
$$

注意 1.8 定理 1.7 の公式は古典 $m \times n$ モデルの保存量が $m \times m$ の local L-operators の言葉でも $n \times n$ の local L-operators の言葉でも表現可能なことを意味している. $\square$

例 1.9 ($m=1$ **の場合**) $m=1$ のとき $x_j = x_{1j}$ と書くと

$$
K_1(z) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & & \\ & x_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & x_n \end{bmatrix}, \qquad V_j(w) = w + x_j.
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&\det\bigl(w + K_1(z)\bigr) = (-1)^{n-1}z + (w+x_1)\cdots(w+x_n),\\
&\det\bigl((-1)^{n-1}z + V_1(w)\cdots V_n(w)\bigr) = (-1)^{n-1}z + (w+x_1)\cdots(w+x_n)
\end{aligned}
$$

なので, $m=1$ の場合は確かに定理 1.7 の結果が確かに成立している. $\square$

例 1.10 ($m=2$ の場合) $m=2$ であるとし, $x_j=x_{1j}$, $y_j=y_{2j}$ と書き, x_j, y_j の添字を n 周期的に整数全体に拡張しておき, 以下のように置く:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_j = x_j y_j, \qquad f_j = x_j + y_{j+1}, \qquad L(z) = K_1(z)K_2(z), \\
&F_j(w) = P_j^{-1} V_j(w) P_{j+1}, \qquad P_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y_j & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

このとき

$$
L(z) = \begin{bmatrix}
\varepsilon_1 & f_1 & 1 & & \\
 & \varepsilon_2 & f_2 & \ddots & \\
 & & \varepsilon_3 & \ddots & 1 \\
z & & & \ddots & f_{n-1} \\
z f_n & z & & & \varepsilon_n
\end{bmatrix}, \qquad
F_j(w) = \begin{bmatrix} f_j & 1 \\ w-\varepsilon_j & 0 \end{bmatrix}.
$$

よって定理 1.7 の $m=2$ の場合の結果は次の公式と同値である:

$$
\det\bigl(-w+L(z)\bigr) = \det\bigl((-1)^{n-1}z + F_1(w)\cdots F_n(w)\bigr).
$$

この公式は $\det\bigl(-w+L(z)\bigr)$ を余因子展開を用いて n に関する帰納法で計算するための公式と $F_1(w)\cdots F_n(w)$ を n に関して帰納的に計算するための公式を比較すれば容易に証明される. □