Boussinesq 方程式

黒木 玄

2002 年 9 月 15 日

目 次

1 KP 階層から KP 方程式へ

$\partial = \partial/\partial x$, $L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots$, $B_i = (L^i)_+$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ と置く. このとき, 記号の簡単のため $u_1 = u$, $u_2 = v$ と置くと,

$$B_1 = \partial, \quad B_2 = \partial^2 + 2u, \quad B_3 = \partial^3 + 3u\partial + 3u_x + 3v.$$

次の方程式系を **Kadomtsev-Petviashvili 階層 (KP 階層)** と呼ぶ:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_i, \frac{\partial}{\partial t_j} - B_j\right] = -\frac{\partial B_j}{\partial t_i} + \frac{\partial B_i}{\partial t_j} + [B_i, B_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots).$$

$B_1 = \partial$ より, KP 階層は $u_{t_1} = u_x$, $v_{t_1} = v_x$, etc. という方程式を含んでいることがわかる. よって, $t_1 = x$ と仮定しても一般性は失われない. 以下では, 記号の簡単のため $(t_1, t_2, t_3) = (x, y, t)$ と置く.

上の公式より,

$$\frac{\partial B_3}{\partial t_2} - \frac{\partial B_2}{\partial t_3} = \frac{\partial B_3}{\partial t} - \frac{\partial B_2}{\partial y} = 3u_y\partial + 3u_{xy} + 3v_y - 2u_t,$$
$$[B_2, B_3] = (3u_{xx} + 6v_x)\partial + u_{xxx} - 3(u^2)_x + 3v_{xx}.$$

よって, KP 階層は次の方程式を含む:

$$3u_y = 3u_{xx} + 6v_x, \tag{1.1}$$
$$3u_{xy} + 3v_y - 2u_t = u_{xxx} - 3(u^2)_x + 3v_{xx}. \tag{1.2}$$

この 2 つの式から v を削除することを考える. (1.1) より,

$$6v_x = 3u_y - 3u_{xx}. \tag{1.3}$$

(1.2) の両辺を x で偏微分して 2 倍して, $-4u_{tx}$ を右辺に移項すると,

$$6u_{xxy} + 6v_{xy} = 4u_{tx} + 2u_{xxxx} - 6(u^2)_{xx} + 6v_{xxx}. \tag{1.4}$$

(1.3) を (1.4) に代入すると, 両辺の u_{xxy} の定数倍の項がキャンセルし,

$$3u_{yy} = 4u_{tx} - u_{xxxx} - 6(u^2)_{xx}.$$

これを次のように書き直して, **KP 方程式**と呼ぶ:

$$3u_{yy} = (4u_t - u_{xxx} - 12uu_x)_x. \tag{1.5}$$

この方程式において (x, y, t, u) に (Ax, y, Bt, Cu) $(ABC \neq 0)$ を代入すると,

$$3u_{yy} = 4ABu_{tx} - A^4 u_{xxxx} - 12A^2C(uu_x)_x.$$

よって, もしも y に $\sqrt{-1}y$ を代入することが許されるならば, KP 方程式の右辺の各項の係数は自由に選べる. そこで, 次の方程式も KP 方程式と呼ぶ:

$$u_{yy} = (au_t - bu_{xxx} - cuu_x)_x \qquad (a,\ b,\ c \text{ はゼロでない定数}).$$

2 KP 階層から KdV 方程式へ

もしも 2-reduction の条件 $L^2 = B_2$ が成立しているならば, L は t_{2i} $(i = 1, 2, \ldots$ に依存しなくなる. 特に u, v は y に依存しなくなる. そのとき, (1.1), (1.2) は次のように書き直される:

$$0 = 3u_{xx} + 6v_x, \tag{2.1}$$

$$-2u_t = u_{xxx} - 3(u^2)_x + 3v_{xx}. \tag{2.2}$$

この 2 つの式から v を削除することを考える. (2.1) より,

$$6v_x = -3u_{xx}.$$

これを (2.2) の両辺を 2 倍にした結果に代入すると,

$$-4u_t = -u_{xxx} - 6(u^2)_x. \tag{2.3}$$

これを次のように書き直して, **KdV 方程式**と呼ぶ:

$$4u_t = u_{xxx} + 12uu_x. \tag{2.4}$$

この方程式において (x, u) に (Ax, Bu) $(AB \neq 0)$ を代入すると,

$$4u_t = A^3 u_{xxx} + 12ABuu_x.$$

よって, KdV 方程式の右辺の各項の係数は自由に選べる. そこで, 次の方程式も KdV 方程式と呼ぶ:

$$u_t = au_{xxx} + buu_x \qquad (a,\ b \text{ はゼロでない定数}).$$

3 KP 階層から Boussinesq 方程式へ

もしも 3-reduction の条件 $L^3 = B_3$ が成立しているならば, L は t_{3i} $(i = 1, 2, \dots)$ に依存しなくなる．特に u, v は t に依存しなくなる．よって, KP 方程式 (1.5) は次の形になる:

$$3u_{yy} = -u_{xxxx} - 6(u^2)_{xx}.$$

この方程式の, u を $u + C$ (C は定数) で置き換えると,

$$3u_{yy} = -u_{xxxx} - 12Cu_{xx} - 6(u^2)_{xx}.$$

これを **Boussinesq 方程式**と呼ぶ．KP 方程式の場合と同様に, y に $\sqrt{-1}y$ を代入することが許されるならば, x, u にそれらの定数倍を代入することによって, Boussinesq 方程式の右辺の各項の係数は自由に選べる．そこで, 次の方程式も Boussinesq 方程式と呼ぶ:

$$u_{yy} = au_{xx} + b(u^2)_{xx} + cu_{xxxx} \qquad (a,\ b,\ c \text{ はゼロでない定数}).$$

Boussinesq 方程式は浅い水の波の方程式として表われることが知られている (時間変数は y で空間変数は x).

4 Boussinesq 方程式から KdV 方程式へ

戸田盛和 [1], [2] にしたがい, Boussinesq 方程式を次のように書く:

$$c_0^{-2} w_{tt} = w_{xx} + \frac{\varepsilon}{2}(w^2)_{xx} + \frac{h^2}{12} w_{xxxx}.$$

この方程式は次の方程式の両辺を x で偏微分して, $v_x = w$ と置けば得られる:

$$c_0^{-2} v_{tt} = (1 + \varepsilon v_x) v_{xx} + \frac{h^2}{12} v_{xxxx}. \tag{4.1}$$

次節で説明するように, この方程式はある種の非線形格子を連続体近似として得られる．戸田 [2] p.113 はこの方程式を **Zabusky 方程式**と呼んでもよいだろうと述べている．

独立変数 (t, x) を (τ, ξ) に次のように変数変換する:

$$\xi = x - c_0 t, \qquad \tau = \frac{1}{2}\varepsilon c_0 t.$$

この ξ は速度 c_0 で右に進む座標である．このとき, $u = v_\xi$ と置くと, 上の方程式 (4.1) は

$$-\varepsilon u_\tau + \frac{1}{4}\varepsilon^2 v_{\tau\tau} = \varepsilon u u_\xi + \frac{h^2}{12} u_{\xi\xi\xi}$$

となる．ここで, $|\varepsilon| \sim h^2 \ll 1$ であるとし, $\varepsilon^2 v_{\tau\tau}$ の項を無視できるとすれば, 結局,

$$u_\tau + u u_\xi + \frac{h^2}{12\varepsilon} u_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{4.2}$$

を得る．これは KdV 方程式である．そこで,

$$A^3 = -\frac{h^2}{3\varepsilon}, \qquad B = 3A$$

と置き, 方程式 (4.2) の (τ, ξ, u) に (At, x, Bu) を代入すると, 方程式 (2.4) が得られる．

5 非線形格子から Boussinesq 方程式へ

戸田盛和 [1], [2] にしたがい, 次の非線形格子を考える:

$$m\frac{d^2v_n}{dt^2} = -\phi'(v_n - v_{n-1}) + \phi'(v_{n+1} - v_n). \tag{5.1}$$

相互作用ポテンシャルが $\phi(x) = k(e^{-ax} + ax - 1)$ の場合が戸田格子である.

格子波動 $v_n(t)$ は $x = nh$ (h は格子の粒子間の平均距離) の連続函数 $v = v(x,t)$ でよく近似されていると仮定する. このとき,

$$v_{n\pm1} = v(t, x\pm h) = v \pm hv_x + \frac{h^2}{2!}v_{xx} \pm \frac{h^3}{3!}v_{xxx} + \frac{h^4}{4!}v_{xxxx} \pm \cdots .$$

さらに, 相互作用ポテンシャルは次のように展開可能だと仮定する:

$$\phi(x) = \kappa\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 + \frac{1}{4}\alpha_1 x^4 + \cdots\right).$$

ただし, α は h と同じ程度の微小量であり, α_1 以下は h より高次の微小量であると仮定する. 戸田格子の場合は $\kappa = ka^2$, $\alpha = -a/2$, $\alpha_1 = a^2/6$ であるから, a が h と同程度の微小量であれば仮定は成立している.

以上の等式を非線形格子の運動方程式 (5.1) に代入し, 右辺を $\kappa h^4 \sim \kappa\alpha h^3$ と同じ程度の微小な項まで計算して, 両辺を κh^2 で割ると,

$$\frac{m}{\kappa h^2}v_{tt} = v_{xx} + \frac{h^2}{12}v_{xxxx} + 2\alpha h v_x v_{xx} + \cdots .$$

ここで, $\cdots$ は $h^2 \sim \alpha h$ より高次の微小量である. よって, $c_0^2 = \kappa h^2/m$, $\varepsilon = 2\alpha h$ と置き, 高次の微小量を無視すれば方程式 (4.1) が得られる.

参考文献

[1] 戸田盛和: 波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店, 1995, ii+229 pp.

[2] 戸田盛和: 非線形波動とソリトン [新版], 日本評論社, 2000, xi+320 pp.