戸田階層と拡大 affine Weyl 群作用

黒木 玄

最終更新: 2003 年 10 月 7 日 15:20 (作成: 2003 年 10 月 7 日)

目 次

1 戸田階層

1.1 可換環 R と $\partial/\partial t_i$ の作用

R は 1 を持つ $\mathbb{C}$ 上の commutative associative algebra であるとし, R には互いに可換な次のように表わされる $\mathbb{C}$-derivations が作用していると仮定する:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} : R \to R \qquad (i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}).$$

さらにある $t_i \in R$ が存在して

$$\frac{\partial t_j}{\partial t_i} = \delta_{i,j} \qquad (i, j \in \mathbb{Z}_{\neq 0})$$

が成立していると仮定し, 不定元 z を含む形式和 $\xi(z)$, $\eta(z)$ を次のように定める:

$$\xi(z) := \sum_{i>0} t_i z^i, \qquad \eta(z) := \sum_{i<0} t_i z^i. \tag{1.1}$$

不定元 z に関する R 係数の形式巾級数環を $R[[z]]$ と書き, R 係数の形式 Lautent 級数環を $R((z))$ と書くことにし, z^{-1} に関するそれらをそれぞれ $R[[z^{-1}]]$, $R((z^{-1}))$ と書くことにする. このとき $\xi(z) \in R[[z]]z$ であり, $\eta(z) \in R[[z^{-1}]]z^{-1}$ である.

R への $\partial/\partial t_i$ の作用は自然に $R((z^{-1}))$, $R((z))$, $R((z^{-1}))e^{\xi(z)}$, $R((z))e^{\eta(z)}$ に作用する. たとえば $f(z) \in R((z^{-1}))$ に対して,

$$\frac{\partial}{\partial t_i} f(z) e^{\xi(z)} = \begin{cases} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial t_i} + z^i f(z)\right) e^{\xi(z)} & (i > 0), \\ \frac{\partial f(z)}{\partial t_i} e^{\xi(z)} & (i < 0). \end{cases}$$

1.2 無限行列環 $M_\infty(R)$ と無限一般線形群 $GL_\infty(R)$

R の元を成分に持つ $\infty \times \infty$ 行列のなす環 $M_\infty(R)$ を次のように定義する:

$$M_\infty(R) := \left\{\, A = [a_{ij}] \in R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;\middle|\; A \text{ の各行には高々有限個しか } 0 \text{ でない元がない} \,\right\}.$$

$M_\infty(R)$ は行列の積に関して 1 を持つ associative algebra をなす. さらに $R^{\mathbb{Z}}$ を縦ベクトルの空間とみなすと $M_\infty(R)$ は $R^{\mathbb{Z}}$ に自然に作用している.

$M_\infty(R)$ の単元全体のなす群を $GL_\infty(R)$ と書くことにする:

$$GL_\infty(R) = M_\infty(R)^\times = \{\, A \in M_\infty(R) \mid \exists B \in M_\infty(R) \text{ s.t. } AB = BA = 1 \,\}.$$

$GL_\infty(R)$ は自然に群をなす. その Lie 代数 $\mathrm{gl}_\infty(R)$ を次のように定義する:

$$\mathrm{gl}_\infty(R) := M_\infty(R).$$

第 (i,j) 成分だけが 1 で他の成分が 0 の行列を E_{ij} と書き, 第 i 成分だけが 1 で他の成分が 0 の縦ベクトルを e_i と書くことにする. また $\infty \times \infty$ の単位行列をも 1 と書くことにする.

例 1.1 (シフト行列 Λ**)** 行列 Λ を次のように定めると $\Lambda \in GL_\infty(R)$ である:

$$\Lambda := [\delta_{i,i+1}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & 0 \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

このとき $\Lambda^{-1} = [\delta_{i,i-1}]$ である. この Λ は今後何度も登場する. □

例 1.2 $\infty\times\infty$ 行列 A, B を次のように定めると $A, B \in GL_\infty(R)$ でかつ $AB = BA = 1$ である:

$$A = 1 + \sum_{i\neq 0} E_{i,0} \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots & & & 0 \\ & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \ddots \\ 0 & & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$B = 1 - \sum_{i\neq 0} E_{i,0} \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots & & & 0 \\ & 1 & & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & & 1 & \ddots \\ 0 & & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

A, B はともに各行に高々 2 個しか 0 でない成分を持たないが, 双方の第 0 列のすべての成分は 0 ではない.　□

1.3　上三角行列群 $G_+(R)$ と下三角行列群 $G_-(R)$

$\infty\times\infty$ な上三角行列で構成された群 $G_+(R)$ と対角成分がすべて 1 であるような下三角行列で構成された群 $G_-(R)$ を次のように定める:

$$G_+(R) := \left\{\, Z = [z_{ij}] \in R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;\middle|\; z_{ij} = 0\ (i > j),\ z_{ii} \in R^\times \,\right\},$$
$$G_-(R) := \left\{\, W = [w_{ij}] \in R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;\middle|\; w_{ij} = 0\ (i < j),\ w_{ii} = 1 \,\right\}.$$

$Z \in G_+(R)$, $W \in G_-(R)$ は次のような形をしている:

$$Z = Z_0 + Z_1\Lambda + Z_2\Lambda^2 + \cdots = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & * \\ & z_{i-1,i-1} & z_{i-1,i} & z_{i-1,i+1} & \\ & & z_{i,i} & z_{i,i+1} & \ddots \\ & & & z_{i+1,i+1} & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix} \in G_+(R),$$

$$W = 1 + W_{-1}\Lambda^{-1} + W_{-2}\Lambda^{-2} + \cdots = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 \\ \ddots & 1 & & & \\ \ddots & w_{i,i-1} & 1 & & \\ & w_{i+1,i-1} & w_{i+1,i} & 1 & \\ * & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \in G_-(R).$$

ここで $z_{i,i} \in R^\times$ でかつ Z_j, W_{-j} は次のように定義された対角行列である:

$$Z_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z_{i,i+j} E_{ii}, \qquad W_{-j} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} w_{i,i-j} E_{ii}.$$

$G_\pm(R)$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}_\pm(R)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_+(R) &:= \left\{\, B = [b_{ij}] \in R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;\middle|\; b_{ij} = 0\ (i > j) \,\right\},\\
\mathfrak{g}_-(R) &:= \left\{\, C = [c_{ij}] \in R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;\middle|\; c_{ij} = 0\ (i \le j) \,\right\}.
\end{aligned}$$

何の制限もおかない無限次の行列の空間 $R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ は R 加群として $\mathfrak{g}_+(R)$ と $\mathfrak{g}_-(R)$ の加群になる．$R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ からそれぞれへの射影を次のように表わす:

$$X = [X]_+ - [X]_-, \qquad X \in R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}, \quad [X]_\pm \in \mathfrak{g}_\pm(R). \tag{1.2}$$

$[X]_-$ の前にマイナスがついていることに注意せよ.

注意 1.3 無限次の行列特有の以下の事情には注意せよ:

1. $G_\pm(R) \not\subset M_\infty(R)$ である．したがって $G_\pm(R) \not\subset GL_\infty(R)$ である．$Z \in G_+(R)$ も $W \in G_-(R)$ も無限個の 0 でない成分を含む行を持つことがありうる.
2. $\Lambda \in GL_\infty(R)$ であったが $\Lambda \notin G_\pm(R)$ である．しかし, $G_\pm(R)$ は Λ による conjugation で閉じている．Λ による conjugation は無限次の正方行列全体の空間 $R^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ に作用し, 行列の成分を左斜め上にシフトする．その作用は $G_\pm(R)$ の外部自己同型を与える.
3. $U \in GL_\infty(R)$, $Z \in G_+(R)$, $W \in G_-(R)$ に対して行列の積 UZ, UW の各成分は有限和になるので well-defined である．□

1.4 戸田階層の導入

$f_i \in R((z^{-1}))$, $g_i \in R((z))$ $(i \in \mathbb{Z})$ であるとし, 無限縦ベクトル $\Phi \in [R((z^{-1}))e^{\xi(z)}]^{\mathbb{Z}}$, $\Psi \in [R((z))e^{\eta(z)}]^{\mathbb{Z}}$ を次のように定める:

$$\Phi := \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{i-1}e^{\xi(z)} \\ f_i e^{\xi(z)} \\ f_{i+1}e^{\xi(z)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix} e^{\xi(z)}, \qquad \Psi := \begin{bmatrix} \vdots \\ g_{i-1}e^{\eta(z)} \\ g_i e^{\eta(z)} \\ g_{i+1}e^{\eta(z)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ g_{i-1} \\ g_i \\ g_{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix} e^{\eta(z)}.$$

ここで $\xi(z)$, $\eta(z)$ は (1.1) で定義された.

定義 1.4 (戸田階層) 上のように定められた Φ, Ψ の組が**戸田階層**の R における解であるとは以下の条件が成立することである:

(a) f_i, g_i は次の形をしている:

$$\begin{aligned}
f_i &= \cdots + w_{i,i-\nu} z^{i-\nu} + \cdots + w_{i,i-1} z^{i-1} + z^i \qquad &&\in z^i(1 + R[[z^{-1}]]z^{-1}),\\
g_i &= z_{i,i} z^i + z_{i,i+1} z^{i+1} + \cdots + z_{i,i+\nu} z^{i+\nu} + \cdots &&\in z^i(R^\times + R[[z]]z).
\end{aligned}$$

ただし $w_{ij}, z_{ij} \in R$ かつ $z_{ii} \in R^\times$.

(b) 各 $i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ に対してある $B_i \in M_\infty(R)$ が存在して

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = B_i \Phi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = B_i \Psi \qquad (i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}).$$

条件 (b) の線形微分方程式を**戸田階層の線形問題表示**と呼ぶ. □

注意 1.5 定義 1.4 の流儀による戸田階層の取り扱いには無限次元 Lie 群の定義およびその Gauss 分解に関係した曖昧さがまったく存在しない[1]. □

注意 1.6 (条件 (a) の言い換え) 定義 1.4 の条件 (a) は Φ, Ψ が次のように表わされることと同値である:

$$\Phi = W\vec{z}e^{\xi(z)}, \qquad \Psi = Z\vec{z}e^{\eta(z)}.$$

ここで

$$\vec{z} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^i e_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ z^{i-1} \\ z^i \\ z^{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$Z = \sum_{i\le j} z_{ij}E_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & * \\ & z_{i-1,i-1} & z_{i-1,i} & z_{i-1,i+1} & \\ & & z_{i,i} & z_{i,i+1} & \ddots \\ & & & z_{i+1,i+1} & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix} \in G_+(R),$$

$$W = 1 + \sum_{i>j} w_{ij}E_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 \\ \ddots & 1 & & & \\ \ddots & w_{i,i-1} & 1 & & \\ & w_{i+1,i-1} & w_{i+1,i} & 1 & \\ * & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \in G_-(R).$$

さらに $\vec{z}z = \Lambda\vec{z}$ が成立するので, Φ, Ψ を形式的に次のように表わすこともできる:

$$\Phi = We^{\xi(\Lambda)}\vec{z}, \qquad \Psi = Ze^{\eta(\Lambda)}\vec{z}. \tag{1.3}$$

ここで $\xi(\Lambda) = \sum_{i>0} t_i\Lambda^i$, $\eta(\Lambda) = \sum_{i<0} t_i\Lambda^i$. □

注意 1.7 (条件 (b) の言い換え 1) 定義 1.4 の条件 (a) を仮定し, 条件 (b) を言い換えよう. まず $\mathcal{V}$ を次のように定める:

$$\mathcal{V} := [R((z^{-1}))e^{\xi(z)}] \times [R((z))e^{\eta(z)}].$$

$\mathcal{V}$ は自然に R 加群をなし, $\partial/\partial t_i$ は $\mathcal{V}$ に自然に作用する. さらに $\phi_i \in \mathcal{V}$ を

$$\phi_i := (f_i e^{\xi(z)}, g_i e^{\eta(z)}) \in \mathcal{V} \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

[1] 戸田階層に関する詳しい解説に関しては高崎 [2] を参照せよ.

と定め, $\mathcal{V}$ の R 部分加群 $\mathcal{F}$ を次のように定める:

$$\mathcal{F} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} R\phi_i \subset \mathcal{V}.$$

条件 (a) より ϕ_i は $\mathcal{F}$ の R 自由基底になっている[2]. 条件 (b) は $\partial\phi_j/\partial t_i$ が ϕ_i たちの有限 R 一次結合で表わされることを意味している. よって条件 (b) は $\mathcal{F}$ が $\partial/\partial t_i$ の作用で閉じていることと同値である:

$$\text{(b)} \quad \iff \quad \frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \quad (i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}).$$

行列 B_i の第 j 行がその一次結合の係数になっている. 特に条件 (a) のもとで条件 (b) の B_i は存在するとすれば一意的である.

以上の言い換えを利用すれば, R として具体的な函数環をうまく選んで, $\partial/\partial t_i$ の作用で閉じている具体的な函数空間 $\mathcal{F}$ とその R 基底 ϕ_i の組をうまく構成して, ϕ_i の $z=\infty$ での展開と $z=0$ での展開の組 $(f_i e^{\xi(z)}, g_i e^{\eta(z)})$ が (a) の条件を満たしていれば戸田階層の解が構成できたことになる. この方法の要点は函数ではなく, 函数空間を構成するという発想である. 抽象的には函数よりも函数空間の方が構成し易いことが多い. コンパクト Riemann 面に付随した Baker-Akhiezer 函数の理論の代数幾何的解釈 (Krichever 構成) はまさにこのような方法の一例になっている. □

注意 1.8 (条件 (b) の言い換え 2) 定義 1.4 の条件 (b) では $B_i \in M_\infty(R)$ の存在のみを仮定したが, 条件 (a) のもとで条件 (b) の B_i の形には強い制限がつく. まず, 注意 1.7 で述べたように条件 (a) のもとで条件 (b) の B_i は一意的である. さらに B_i は次を満たしている:

$$B_i = [W\Lambda^i W^{-1}]_+ = \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} + W\Lambda^i W^{-1} = \frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1} \qquad (i>0),$$
$$B_i = -[Z\Lambda^i Z^{-1}]_- = \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} = \frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1} + Z\Lambda^i Z^{-1} \qquad (i<0).$$

ここで $[\ ]_\pm$ は (1.2) で定義された. 実際 (1.3) より, $i>0$ のとき

$$B_i\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i}\bigl(We^{\xi(\Lambda)}\vec{z}\bigr) = \left[\frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} + W\Lambda^i W^{-1}\right]\Phi,$$
$$B_i\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i}\bigl(Ze^{\eta(\Lambda)}\vec{z}\bigr) = \left[\frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1}\right]\Psi$$

であるから,

$$B_i = \frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1} \in \mathfrak{g}_+, \quad \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} \in \mathfrak{g}_-, \quad W\Lambda^i W^{-1} = B_i - \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1}.$$

同様にして $i<0$ のとき

$$B_i\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i}\bigl(We^{\xi(\Lambda)}\vec{z}\bigr) = \left[\frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1}\right]\Phi,$$
$$B_i\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i}\bigl(Ze^{\eta(\Lambda)}\vec{z}\bigr) = \left[\frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1} + Z\Lambda^i Z^{-1}\right]\Psi$$

[2]実は条件 (a) も $\mathcal{F}$ の言葉で言い換えることができるがここでは省略した.

であるから,

$$\frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1} \in \mathfrak{g}_+, \quad B_i = \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} \in \mathfrak{g}_-, \quad -Z\Lambda^i Z^{-1} = \frac{\partial Z}{\partial t_i}Z^{-1} - B_i.$$

以上のように条件 (b) の B_i は条件 (a) に登場する z_{ij}, w_{ij} の多項式で表わされる．したがって戸田階層の線形問題表示は z_{ij}, w_{ij} たちに関する非線形偏微分方程式系とみなされる． □

2 拡大 Weyl 群の作用

この節では R は体になっていると仮定する.

2.1 拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_\infty)$

A_∞ 型の拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_\infty)$ とは生成元 ϖ, r_i $(i \in \mathbb{Z})$ と基本関係式

$$r_i r_{i+1} r_i = r_{i+1} r_i r_{i+1}, \qquad r_i^4 = 1, \qquad \varpi r_i \varpi^{-1} = r_{i+1}$$

で定義される無限離散群のことである.

無限次の行列 $S_i \in GL_\infty(R)$ を次のように定義する:

$$S_i := E_{i,i+1} - E_{i+1,i} + \sum_{j \neq i,i+1} E_{jj} \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

このとき, Λ, S_i は以下の関係式を満たしている:

$$S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}, \qquad S_i^4 = 1, \qquad \Lambda^{-1} S_i \Lambda = S_{i+1}.$$

$S_i^2 = -E_{ii} - E_{i+1,i+1} + \sum_{j \neq i,i+1} E_{jj} \neq 1$ なので実際に $S_i^2 \neq 1$ である．よって Λ^{-1}, S_i $(i \in \mathbb{Z})$ は A_∞ 型の拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_\infty)$ の $GL_\infty(R)$ における実現になっている.

2.2 $G_+(R) = \{Z\}$ への有理作用

対角成分が可逆であるような無限次上三角行列のなす群 $G_+(R)$ への $\widetilde{W}(A_\infty)$ の有理作用を構成しよう[3].

任意に generic な $Z = [z_{ij}] \in G_+(R)$ を取る．$ZS_i^{-1} \notin G_+(R)$ であるが, $G_i(Z)$ を

$$G_i(Z) := 1 - \frac{z_{i+1,i+1}}{z_{i,i+1}} E_{i+1,i} \in G_-(R)$$

と定めると

$$\rho_{r_i}(Z) := G_i(Z) Z S_i^{-1} \in G_+(R)$$

が成立する．ρ_{r_i} たちの $G_+(R)$ への有理作用は r_i $(i \in \mathbb{Z})$ で生成される $\widetilde{W}(A_\infty)$ の部分群の $G_+(R)$ への有理作用を定める．(証明の概略: $Zg^{-1} = G_g(Z)^{-1}\rho_g(Z)$ のとき

$$Z(gh)^{-1} = G_{gh}(Z)^{-1}\rho_{gh}(Z),$$

[3]以下の説明は野海 [1] 第 7 章に含まれている.

$$
\begin{aligned}
Zh^{-1}g^{-1} &= G_h(Z)^{-1}\rho_h(Z)g^{-1} = G_h(Z)^{-1}G_g(\rho_h(Z))^{-1}\rho_g(\rho_h(Z)) \\
&= [G_g(\rho_h(Z))G_h(Z)]^{-1}(\rho_g\rho_h)(Z).
\end{aligned}
$$

よって $G_{gh}(Z) = G_g(\rho_h(Z))G_h(Z)$ かつ $\rho_{gh} = \rho_g\rho_h$ が成立する.) そこで $\rho_{r_i}(Z)$ を $r_i(Z)$ と書くことにする.

$G_+(R)$ に対する ϖ の作用を

$$
\varpi(Z) := \Lambda^{-1}Z\Lambda \in G_+(R) \qquad (Z \in G_+(R))
$$

と定める. この作用は $\varpi(r_i(Z)) = r_{i+1}(\varpi(Z))$ をみたしている. 実際

$$
\begin{aligned}
&\Lambda^{-1}ZS_i\Lambda = \Lambda^{-1}G_i(Z)^{-1}r_i(Z)\Lambda = \Lambda^{-1}G_i(Z)^{-1}\Lambda\varpi(r_i(Z)), \\
&\Lambda^{-1}ZS_i\Lambda = \Lambda^{-1}Z\Lambda\Lambda^{-1}S_i\Lambda = \varpi(Z)S_{i+1} = G_{i+1}(\varpi(Z))r_{i+1}(\varpi(Z))
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\Lambda^{-1}G_i(Z)^{-1}\Lambda = G_{i+1}(\varpi(Z)), \qquad \varpi(r_i(Z)) = r_{i+1}(\varpi(Z)).
$$

したがって $G_+(R)$ への ϖ, r_i の作用は $\widetilde{W}(A_\infty)$ の基本関係式を満たしている.

以上によって $\widetilde{W}(A_\infty)$ の $G_+(R) = \{Z\}$ への有理作用が定義された.

2.3 B_i $(i > 0)$ への有理作用

3 周期的戸田場への周期簡約

3.1 m 周期行列

無限次の行列 $A = [a_{ij}]_{i,j\in\mathbb{Z}}$ が m **周期的**であるとは $a_{i+m,j+m} = a_{i,j}$ が成立することである. A が m 周期的であることと $\Lambda^m A\Lambda^{-m} = A$ が成立することは同値である. m 周期的な行列 A は次の形をしている:

$$
A = \begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\ddots & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \ddots & \ddots \\
\ddots & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \ddots \\
\ddots & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \ddots \\
\ddots & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & \ddots \\
\ddots & \ddots & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & \ddots \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}. \tag{3.1}
$$

ここで A_i は $m\times m$ 行列である.

群 G_m, $G_{m,\pm}$ を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
G_m(R) &:= \{\, A \in GL_\infty(R) \mid A \text{ は } m \text{ 周期的}\,\}, \\
G_{m,\pm}(R) &:= \{\, A \in G_\pm(R) \mid A \text{ は } m \text{ 周期的}\,\}.
\end{aligned}
$$

さらにこれらの Lie 代数を $\mathfrak{g}_m(R)$, $\mathfrak{g}_{m,\pm}$ を次のように定義する:

$$\mathfrak{g}_m(R) := \{\, A \in \mathrm{gl}_\infty(R) \mid A \text{ は } m \text{ 周期的} \,\},$$
$$\mathfrak{g}_{m,\pm}(R) := \{\, A \in \mathfrak{g}_\pm(R) \mid A \text{ は } m \text{ 周期的} \,\}.$$

もしも $A \in \mathrm{gl}_\infty(R) = M_\infty(R)$ が m 周期的であれば上の表示 (3.1) において 0 でない A_i は高々有限個になる. したがって A に対して $\sum_i A_i z^i$ を対応させることによって次のような同一視が可能である:

$$\mathfrak{g}_m \cong \mathrm{gl}_m(R[z, z^{-1}) = M_m(R[z, z^{-1}]).$$

たとえば $\Lambda \in M_\infty(R)$ は次の $\Lambda(z) \in M_m(R[z, z^{-1}])$ と同一視される:

$$\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{m-1} E_{i,i+1} + zE_{m,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ z & & & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2　拡大 affine Weyl 群の作用

4　モノドロミー保存系への相似簡約

4.1　相似簡約

4.2　拡大 affine Weyl 群の作用

参考文献

[1] 野海正俊: パンルヴェ方程式——対称性からの入門——, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000.

[2] 高崎金久: 可積分系の世界——戸田格子とその仲間——, 共立出版, 2001.