# ソリトン系の基本パターン Part 8

多成分 KP 系の Hamiltonians について 2

黒木 玄

2001 年 7 月 5 日*

## 目 次



```
Date: Thu, 5 Jul 2001 09:18:12 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200107050018.JAA03151@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: Soliton-8 (多成分 KP の Hamiltonians 2)
```

多成分 KP 系の Hamiltonians の構成の仕方を説明する. そのポイントは最高階の係数が generic な定数対角行列であるような擬微分作用素の行列の対角化可能性である.

## 1 擬微分作用素

以下, $(R, \partial)$ は微分環とする. 例えば,

$$(R, \partial) = (\mathbb{C}((x)), d/dx),\ (\mathbb{C}((x)), x\,d/dx),\ (C^\infty(S^1), d/d\theta).$$

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-8.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 18 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 7 月 5 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

ここで, $d/d\theta$ は $S^1$ 上の回転不変ベクトル場である. このノートでは $M(n,R)$ 係数の一般化された擬微分作用素

$$L = u_0\partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots, \quad u_i \in M(n,R)$$

を扱う. $\alpha$ は整数でなくても良い.

$\alpha$ が整数のとき, $L$ の Adler trace が

$$\mathrm{trace}(L) = (L \text{ の } \partial^{-1} \text{ の係数の行列としての trace の積分})$$

と定義される. ここで, 積分は $(R,\partial) = (\mathbb{C}((x)), d/dx)$ の場合は留数を取る操作によって定義し, $(R,\partial) = (\mathbb{C}((x)), x\,d/dx)$ の場合は定数項を取り出す取り出す操作で定義し, $R = C^\infty(S^1)$ の場合は $S^1$ 上の積分によって定義する.

$\alpha$ が一般の複素数である場合は $\partial^\alpha$ に関する計算規則として,

$$\partial^\alpha f = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} f^{(i)}\partial^{\alpha-i} = f\partial^\alpha + \alpha f'\partial^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{2} f''\partial^{\alpha-2} + \cdots$$

を用いれば良い. ここで, $\binom{\alpha}{i}$ は二項係数である:

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}.$$

例えば,

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{-1}{i} = (-1)^i, \quad \binom{-2}{i} = (-1)^i(i+1).$$

## 2 行列係数の擬微分作用素の行列としての対角化

**定理 2.1** 次のような形の $M(n,R)$ 係数の擬微分作用素を考える:

$$\begin{aligned} L &= c\partial^\alpha + u_1\partial^{\alpha-1} + u_2\partial^{\alpha-2} + \cdots, \\ A &= c\partial^\alpha + a_1\partial^{\alpha-1} + a_2\partial^{\alpha-2} + \cdots, \\ V &= 1 + v_1\partial^{-1} + v_2\partial^{-2} + \cdots. \end{aligned}$$

ただし, 次のように仮定する:

(a) $c$ は互いに異なる 0 でない対角成分を持つ定数対角行列である.
(b) $A$ は diagonal である. すなわち, $a_i$ は函数成分を持つ対角行列である.

このとき, 以下が成立する:

(1) 任意の $L$ に対して, $L = VAV^{-1}$ をみたす $A$, $V$ が存在する.
(2) $V$ は off-diagonal (すなわち全ての $v_i$ の対角成分が 0) と仮定するとき, 任意の $L$ に対して, $L = VAV^{-1}$ をみたす $A$, $V$ が一意に存在する. そして, $a_i$, $v_i$ は $u_j$ たちの微分多項式で表わされる.

(3) 任意に与えられた $L$ に対して, ある $V$ に関して $L = VAV^{-1}$ を満たす $A$ の不定性はちょうど diagonal な擬微分作用素

$$Q = 1 + q_1\partial^{-1} + q_2\partial^{-2} + \cdots$$

による conjugation の分だけある. すなわち, そのような $A$ を一つ取れば他の解は diagonal な $Q$ によって $QAQ^{-1}$ の形に表わされる. □

この定理の証明は前節で導入した

$$\partial^\alpha f = f\partial^\alpha + \alpha f'\partial^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{2} f''\partial^{\alpha-2} + \cdots$$

という式を用いて直接計算すれば straightforward である.

そして, その計算の過程で, $V$ が off-diagonal の場合における $v_i$, $a_i$ を $u_j$ たちの微分多項式で表わすためのアルゴリズムが得られる. よって, $L = VAV^{-1}$ を満たす $V$, $A$ は $L$ の式としてよくわかっていると考えて良い.

# 3 多成分 KP 系の Hamiltonians

$L$ に関する $n$-component KP 系の Hamiltonians は次の式によって与えられる:

$$H_{i,j}(L) = \frac{\alpha}{i}\,\mathrm{trace}(A^{i/\alpha}E_{jj}) \quad (i = 2, 3, \ldots,\ j = 1, \ldots, n). \tag{$*$}$$

ここで, $E_{jj}$ は $j$ 番目の対角成分のみが 1 で他は 0 の行列であり, $A$ は前節の定理 2.1 の (1) における $A$ であり, trace は Adler trace である.

$A^{i/\alpha}$ は $A$ の $i/\alpha$ 乗であり, その取り方には定数倍の不定性があるが,

$$A^{1/\alpha} = c^{1/\alpha}\partial + (\text{lower order})$$

の最高階の係数 $c^{1/\alpha}$ の取り方を一つ選んでおくことによって, 不定性を消しておくことにする. $A^{i/\alpha} = (A^{1/\alpha})^i$ は i 階の擬微分作用素である.

そのとき, 定理 2.1 の (3) より $A$ の不定性は diagonal な擬微分作用素による conjugation に限るので, $H_{i,j}(L)$ は well-defined である. 実際, diagonal な $Q$ は $E_{jj}$ と可換なので,

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}((QAQ^{-1})^{i/\alpha}E_{jj}) &= \mathrm{trace}(QA^{i/\alpha}Q^{-1}E_{jj}) = \mathrm{trace}(A^{i/\alpha}Q^{-1}E_{jj}Q) \\ &= \mathrm{trace}(A^{i/\alpha}Q^{-1}QE_{jj}) = \mathrm{trace}(A^{i/\alpha}E_{jj}).\end{aligned}$$

同様の議論によって次の定理を示せる.

**定理 3.1** $H_{i,j}$ は擬微分作用素 $W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots$ による conjugation に関して invariant である:

$$H_{i,j}(WLW^{-1}) = H_{i,j}(L).$$

**証明**. 定理 2.1 の (1) の $A, V$ を取る:

$$L = VAV^{-1}.$$

$W^{-1}LW$ に定理 2.1 (1) を適用し, 定理 2.1 の $A, V$ と同じ型の擬微分作用素 $B, U$ で

$$WLW^{-1} = UBU^{-1}$$

を満たすものを取る. このとき,

$$L = (W^{-1}U)B(W^{-1}U)^{-1}$$

であり, $W^{-1}U$ は定理 2.1 の $V$ と同じ型の擬微分作用素なので, 定理 2.1 (3) より, ある diagonal な擬微分作用素 $Q = 1 + q_1\partial^{-1} + q_2\partial^{-2} + \cdots$ が存在して,

$$B = QAQ^{-1}.$$

このとき, $Q$ が $E_{jj}$ と可換なことに注意すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{i}H_{i,j}(WLW^{-1}) &= \mathrm{trace}(B^{i/\alpha}E_{jj}) = \mathrm{trace}(QA^{i/\alpha}Q^{-1}E_{jj}) \\ &= \mathrm{trace}(A^{i/\alpha}E_{jj}) = \frac{\alpha}{i}H_{i,j}(L). \quad \square\end{aligned}$$

**演習問題 3.2** $i$ が小さいとき, $H_{i,j}(L)$ を $u_k$ たちの微分多項式の積分の形で表わせ. 定理 2.1 の (2) の証明の過程で得られた $a_k$ たちを $u_k$ たちの微分多項式で表わすアルゴリズムを適用すれば良い. $\square$

**注意 3.3** 上の定理は $H_{i,j}(L)$ が $L(t) = W(t)L(0)W(t)^{-1}$ の形の時間発展の保存量であることを意味している. ここで,

$$W(t) = 1 + w_1(t)\partial^{-1} + w_2(t)\partial^{-2} + \cdots$$

このような $W(t)$ に対して, $M(t)$ を

$$M(t) := \partial_t(W(t))W(t)^{-1}$$

と定めると, $M(t)$ は

$$M(t) = m_1(t)\partial^{-1} + m_2(t)\partial^{-2} + \cdots$$

という形をしている. このとき, $L(t)$ は次の微分方程式を満たしている:

$$\partial_t(L(t)) = [M(t), L(t)].$$

逆にこのような方程式を $L(t)$ が満たしているとき, $H_{i,j}(L(t))$ は時刻 $t$ に関して一定である. $\square$

**注意 3.4** 以上の議論は

```
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-4.txt
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-5.txt
```

の段階ではよく理解してなかった次の問題への肯定的な解答を与えている:

> $\mathrm{trace}(L^i)$ の形で書けない Hamiltonians をどのように構成したら良いのか?

議論のポイントは, 行列係数の擬微分作用素 $L$ の行列としての対角化 $A$ を $L$ の係数の微分多項式の形で構成可能なことである. 対角化してしまえば 1-component の場合とほとんど同様の議論が適用できる. ただし, 対角化するためには $L$ の最高階の係数を 1 ではなく generic diagonal constant matrix に選んでおかなければいけない. □

**例 3.5 (1-component case)** $n = 1$, $\alpha = 1$, $c = 1$ のとき, すなわち,

$$L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots, \quad u_i \in R$$

のとき, $H_i(L) = H_{i,1}(L)$ は次の形になる:

$$H_i(L) = \frac{1}{i}\,\mathrm{trace}(A^i) = \frac{1}{i}\,\mathrm{trace}(L^i).$$

これは,

```
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-4.txt
ソリトン系の基本パターン Part 4
```

の例 5.5 で与えた KP 系の Hamiltonian と本質的に一致する. □

あとは Poisson 構造の定義を示して, 上の Hamiltonian が実際に $n$-component KP 系のフローを生成することを示さなければいけないのだが, 残りの議論は

> Boris Khesin and Ilya Zakharevich: Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols, Commun. Math. Phys. **171** (1995) 475–530, `hep-th/9312088`

と全く同様である. Khesin と Zakharevich は $c = 1$ の場合のみを扱ってしまったので, 多成分系の場合をうまく扱うことに失敗しているが, 彼らの議論を $c$ が generic diagonal constant matrix である場合に拡張すれば, 多成分系の場合もうまく扱うことができる.

## 4 問題: 一般化された Drinfeld-Sokolov 系との関係?

以上によって, Khesin と Zakharevich による 1-component KP の Hamiltonian 構造に関する結果を n-component KP に拡張するための処方箋が得られた. Khesin と Zakharevich による Hamiltonian 構造は Gelfand-Dickey の仕事の拡張であると考えることができる.

それに対して, 次の論文は, Drinfeld-Sokolov の立場から, 多成分の KdV タイプの系 (NLS などを含む) に関する Hamiltonian 構造をとらえている:

N. J. Burroughs, M. F. de Groot, T. J. Hollowood, and J. Luis Miramontes, Generalized Drinfeld-Sokolov Hierarchies II: The Hamiltonian Structures, Commun. Math. Phys. **153** (1993), no. 1, 187–215, `hep-th/9109014l`.

したがって, 多成分の KdV タイプの系に対しては次の 2 つの Hamiltonian 構造が与えられていることになる:

(1) Gelfand-Dickey および Khesin-Zakharevich の仕事の多成分系への拡張として得られた我々の Hamiltonian 構造,
(2) Drinfeld-Sokolov の仕事の多成分系への拡張として得られた Burroughs たちの Hamiltonian 構造.

おそらく, この 2 つの Hamiltonian 構造 (= Poisson 構造 + Hamiltonians) はある共通部分で一致していると予想される.

実際, Drinfeld-Sokolov は彼らの立場から得られた Hamiltonian 構造と Gelfand-Dickey によって得られた Hamiltonian 構造が一致していることを証明している. その結果は多成分系に拡張されるはずである.

誰かやりませんか?