量子化された Weyl 群双有理作用における τ 函数の正則性

黒木玄

2011 年 7 月 15 日*

目 次

1 Weyl 群双有理作用の量子化

量子展開環を扱う場合には基礎体は $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$ であるとし, Kac-Moody 代数を扱う場合には基礎体を $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ であると仮定する. この節の内容は本質的に筆者の論文 [1] に含まれている. ただし Weyl 群作用が τ_i たちを含む斜体に拡張されている点だけは新しい.

---

*2011 年 7 月 12 日: 作成. 「Weyl 群双有理作用の量子化」「量子 τ 函数とその正則性」の二つの節を書いた. このノートは未発表の最新結果を含むので取り扱い注意! 筆者が知る限りにおいて, Painlevé 系の τ 函数が統一的にかなり満足できる形で量子化されたのはこのノートが初めてだと思う. このノートは「τ 函数はパラメーター変数の正準共役変数の exponential である」という立場で τ 函数を量子化している. 2011 年 7 月 13 日: 「古典の場合との比較」の節を追加. 2011 年 7 月 14 日午前: たくさんの細かい誤りを修正した. 2011 年 7 月 14 日午後: 「量子 τ 函数の定義」の節を追加して, それに伴う修正をほどこした. 2011 年 7 月 15 日: 少しだけ加筆修正.

この節で構成される Weyl 群作用は Noumi-Yamada [4] で構成された Weyl 群双有理作用の量子化になっている.

1.1 対称化可能一般 Cartan 行列と Weyl 群

$A = [a_{ij}]_{i,j\in I}$ は対称化可能一般 Cartan 行列であるとする. すなわち A は整数を成分に持つ行列であり, 以下が成立していると仮定する:

- $a_{ii} = 2$ でかつ $i \neq j$ ならば $a_{ij} \leqq 0$.
- $a_{ij} = 0$ と $a_{ji} = 0$ は同値である.
- ある正の整数たち d_i $(i \in I)$ で $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ を満たすものが存在する.

このノートでは添字集合 I は有限集合であると仮定しておく.

記号 $\alpha_i^\vee$ $(i \in I)$ から生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を $Q^\vee$ と表わし, 記号 Λ_i $(i \in I)$ から生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を P と表わす. さらにそのあいだの内積 $\langle\ ,\ \rangle : Q^\vee \times P \to \mathbb{Z}$ を $\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ によって定める. $\alpha_j = \sum_{i\in I} a_{ij}\Lambda_i$ (右辺は有限和) とおく. このとき $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ が成立している. $\alpha_i^\vee$, α_i, Λ_i のそれぞれを simple coroot, simple root, fundamental weight と呼ぶ.

生成元 s_i $(i \in I)$ と以下の基本関係式で定義される群を $W = W(A)$ と書き, Weyl 群と呼ぶ:

- $i \neq j$ かつ $a_{ij}a_{ji} = 0$ ならば $s_i s_j = s_j s_i$,
- $i \neq j$ かつ $a_{ij}a_{ji} = 1$ ならば $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$,
- $i \neq j$ かつ $a_{ij}a_{ji} = 2$ ならば $s_i s_j s_i s_j = s_j s_i s_j s_i$,
- $i \neq j$ かつ $a_{ij}a_{ji} = 3$ ならば $s_i s_j s_i s_j s_i s_j = s_j s_i s_j s_i s_j s_i$,
- $s_i^2 = 1$.

最後の関係式 $s_i^2 = 1$ より, 任意の $w \in W$ に対して $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$ を満たす $i_1, i_2, \dots, i_l \in I$ が存在することがわかる. そのような最小の l を $\ell(w)$ と書き, w の長さと呼ぶ. $l = \ell(w)$ のとき $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{il}$ を w の簡約表示 (reduced exppression) と呼ぶ.

W は $Q^\vee$ と P に次のように作用する:

$$s_i(h) = h - \langle h, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee \quad (h \in Q^\vee), \qquad s_i(\mu) = \mu - \langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle \alpha_i \quad (\mu \in P).$$

たとえば

$$s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee - a_{ji}\alpha_i^\vee, \quad s_i(\Lambda_j) = \Lambda_j - \delta_{ij}\alpha_j = \begin{cases} -\Lambda_i + \sum_{k\neq i}(-a_{ki})\Lambda_k & (i = j), \\ \Lambda_j & (i \neq j). \end{cases}$$

この作用は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を不変に保つ:

$$\langle w(h), w(\mu) \rangle = \langle h, \mu \rangle \quad (w \in W,\ h \in Q^\vee,\ \mu \in P).$$

1.2　Weyl 群双有理作用の量子化の構成

1.2.1　Kac-Moody 代数の下三角部分の場合

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 上の代数 U_1^- を生成元 f_i $(i \in I)$ と次の基本関係式で定義する:

$$\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

この関係式を Serre 関係式と呼ぶ. ここで $\mathrm{ad}(f_i)(x) = [f_i, x] = f_i x - x f_i$ とおいた. U_1^- は GCM $A = [a_{ij}]$ に対応する Kac-Moody 代数の三角部分の普遍展開環に等しい. U_1^- の下の添え字の 1 は $q = 1$ の場合を扱っていることを意味している. q が generic な量子展開環の場合については後で説明する.

$\widetilde{\mathcal{A}}_1$ は U_1^- の剰余代数で Ore 整域になるものであるとし, f_i の $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ での像も同じ記号 f_i で表わすことにする. もしも GCM $A = [a_{ij}]$ が有限型またはアフィン型ならば U_1^- 自体が Ore 整域になり, その剰余整域もすべて Ore 整域になる ([1]).

生成元 $\alpha_i^\vee$, $\tau_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ と以下の基本関係式で定義される $\mathbb{F}$ 上の代数を D_1 と表わす:

$$\alpha_i^\vee \alpha_j^\vee = \alpha_j^\vee \alpha_i^\vee, \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}, \quad \tau_i \tau_i^{-1} = \tau_i^{-1} \tau_i = 1.$$

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とおく. $S(\mathfrak{h}) \subset D_1$ とみなせる. $\mu \in P$ に対して

$$\tau^\mu = \prod_{i \in I} \tau_i^{\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle} \in D_1$$

とおく. このとき次が成立している:

$$\tau^\mu h \tau^{-\mu} = h + \langle h, \mu \rangle \quad (h \in \mathfrak{h},\ \mu \in P).$$

D_1 は $\mathfrak{h}$ 上の差分作用素環である. Weyl 群 W の $Q^\vee$, P への作用はそのあいだの内積を保つので, W は差分作用素環 D_1 に代数自己同型として自然に作用する. すなわち $w \in W$ の D_1 への作用を $\widetilde{w}$ と書くと

$$\tilde{s}_i(h) = h - \langle h, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee \quad (h \in \mathfrak{h},\ i \in I), \quad \widetilde{w}(\tau^\mu) = \tau^{w(\mu)} \quad (\mu \in P,\ w \in W).$$

$h \in \mathfrak{h}$ たちをパラメーター変数と呼び, $\widetilde{w}$ を $w \in W$ のパラメーター変数と τ 変数への作用と呼ぶことにする.

以上で定義した二つの代数 $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ と D_1 のテンソル積代数を $\mathcal{A}_1$ と表わす:

$$\mathcal{A}_1 = \widetilde{\mathcal{A}}_1 \otimes D_1.$$

$a \in \widetilde{\mathcal{A}}_1$, $b \in D_1$ のそれぞれと $a \otimes 1, 1 \otimes b \in \mathcal{A}_1$ を同一視することによって, $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ と D_1 は $\mathcal{A}_1$ の部分代数とみなされる. $\mathcal{A}_1$ の中で $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ の元と D_1 の元は互いに可換である.

$\widetilde{\mathcal{A}}_1$ は Ore 整域であると仮定したので, $\mathcal{A}_1$ も Ore 整域になる. $\mathcal{A}_1$ の分数斜体を $\mathcal{K}_1$ と表わすことにする.

上で定義した W の D_1 への代数自己同型としての作用を $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ 上に自明に拡張することによって $w \in W$ の $\mathcal{A}_1$ への代数自己同型としての作用 $\widetilde{w}$ を定める:

$$\widetilde{w}(h) = w(h), \quad \widetilde{w}(\tau^\mu) = \tau^{\widetilde{w}(\mu)}, \quad \widetilde{w}(f_i) = f_i \quad (w \in W,\ h \in Q^\vee,\ \mu \in P,\ i \in I).$$

この Weyl 群作用は分数斜体 $\mathcal{K}_1$ への作用を誘導する. $w \in W$ に対して $\widetilde{w}$ の $\mathcal{A}_1$ への作用の $\mathcal{K}_1$ への拡張も同じ記号 $\widetilde{w}$ で表わす.

一般に斜体の元 f, g に対して $\mathrm{ad}(f)(g) = fg - gf$ とおくとき, f のべき f^γ による g の conjugation について形式的に次が成立している:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} \mathrm{ad}(f)^k(g) f^{-k} = g + \gamma[f,g]f^{-1} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}[f,[f,g]]f^{-2} + \cdots .$$

γ が正の整数のときこの公式は γ に関する帰納法によって証明される. 十分大きな k に対して $\mathrm{ad}(f)^k(g) = 0$ となるならば, この公式を用いて任意の γ に対して斜体の元 $f^\gamma g f^{-\gamma}$ を定義できる. Serre 関係式より $f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma} \in \mathcal{K}_1$ は well-defined である.

$\gamma \in \mathfrak{h}$, $\mu \in P$ のとき形式的に次が成立している:

$$f_i^\gamma \tau^\mu f_i^{-\gamma} = f_i^\gamma f_i^{-(\gamma + \langle \gamma, \mu \rangle)} \tau^\mu = f_i^{-\langle \gamma, \mu \rangle} \tau^\mu.$$

この式によって $f_i^\gamma \tau^\mu f_i^{-\gamma} \in \mathcal{K}_1$ を定義する.

実は $\gamma \in \mathfrak{h}$ のとき $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)(x) = f_i^\gamma x f_i^{-\gamma}$ によって $\mathcal{K}_1$ の代数自己同型 $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)$ が定義できる. Serre 関係式から導かれる Verma 関係式を用いると次の定理が証明される.

定理 1.1. Weyl 群 W の生成元 s_i の斜体 $\mathcal{K}_1$ への作用を $s_i(x) = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \circ \tilde{s}_i(x)$ によって定めることによって, W の斜体 $\mathcal{K}_1$ への代数自己同型としての作用を定めることができる. 作用の具体的な公式は次の通り:

$$\begin{aligned}
s_i(\alpha_j^\vee) &= s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee - a_{ji}\alpha_i^\vee, \\
s_i(\tau_j) &= \begin{cases} f_i \dfrac{\prod_{k \neq i} \tau_k^{-a_{ki}}}{\tau_i} & (i = j), \\ \tau_j & (i \neq j), \end{cases} \\
s_i(f_j) &= f_i^{\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-\alpha_i^\vee} = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} \binom{\alpha_i^\vee}{k} \mathrm{ad}(f_i)^k(f_j) f_i^{-1} \\
&= f_j + \alpha_i^\vee [f_i, f_j] f_i^{-1} + \frac{\alpha_i^\vee(\alpha_i^\vee - 1)}{2}[f_i,[f_i,f_j]]f_i^{-2} + \cdots . \quad \square
\end{aligned}$$

この定理の τ_i を除いた部分は [1] で証明されている. τ_i を含む場合への拡張は易しい.

1.2.2 量子展開環の下三角部分の場合

q があちこちに登場すること以外はほとんど Kac-Moody 代数の下三角部分の場合と同様にして量子展開環の下三角部分に Weyl 群双有理作用の量子化を構成できる.

いつものように非負の整数 k に対して, q 数, q 階乗, q 二項係数を次のように定める:

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [k]_q, \quad \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_q[x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q!}.$$

さらに $q_i = q^{d_i}$ とおく.

$\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$ 上の代数 U_q^- を生成元 f_i $(i \in I)$ と次の基本関係式で定義する:

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} f_i^\nu f_j f_i^{1-a_{ij}-\nu} = 0 \quad (i \neq j).$$

この関係式を q-Serre 関係式と呼ぶ. U_q^- は GCM $A=[a_{ij}]$ に対応する量子展開環の下三角部分に等しい. $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ は U_q^- の剰余代数で Ore 整域になるものであるとし, f_i の $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ での像も同じ記号 f_i で表わすことにする. もしも GCM $A=[a_{ij}]$ が有限型またはアフィン型ならば U_q^- 自体が Ore 整域になり, その剰余整域もすべて Ore 整域になる ([1]).

生成元 $q^{\pm\alpha_i^\vee}$, $\tau_i^{\pm 1}$ $(i\in I)$ と以下の基本関係式で定義される $\mathbb{F}$ 上の代数を D_q と表わす:

$$
\begin{aligned}
&q^{\alpha_i^\vee}q^{\alpha_j^\vee}=q^{\alpha_j^\vee}q^{\alpha_i^\vee}, \quad \tau_i\tau_j=\tau_j\tau_i, \quad \tau_i q^{\alpha_j^\vee}\tau_i^{-1}=q^{\alpha_j^\vee+\delta_{ij}}=q^{\delta_{ij}}q^{\alpha_j^\vee},\\
&q^{\alpha_i^\vee}q^{-\alpha_i^\vee}=q^{-\alpha_i^\vee}q^{\alpha_i^\vee}=1, \quad \tau_i\tau^{-1}=\tau_i^{-1}\tau_i=1.
\end{aligned}
$$

$h\in Q^\vee$, $\mu\in P$ に対して

$$
q^h=\prod_{i\in I}(q^{\alpha_i^\vee})^{\langle h,\Lambda_i\rangle}\in D_q, \quad \tau^\mu=\prod_{i\in I}\tau_i^{\langle\alpha_i^\vee,\mu\rangle}\in D_q
$$

とおく. 特に $\tau^{\Lambda_i}=\tau_i$ である. このとき次が成立している:

$$
\tau^\mu q^h\tau^{-\mu}=q^{h+\langle h,\mu\rangle}=q^{\langle h,\mu\rangle}q^h \quad (h\in Q^\vee,\ \mu\in P).
$$

D_q は $q^{\alpha_i^\vee}$ たちで生成される Laurent 多項式環上の q 差分作用素環である. Weyl 群 W の $Q^\vee$, P への作用はそのあいだの内積を保つので, W は代数 D_q に代数自己同型として自然に作用する. すなわち $w\in W$ の D_q への作用を $\widetilde{w}$ と書くと,

$$
\widetilde{w}(q^h)=q^{w(h)}, \quad \widetilde{w}(\tau^\mu)=\tau^{w(\mu)} \quad (h\in Q^\vee,\ \mu\in P,\ w\in W).
$$

q^h $(h\in Q^\vee)$ をパラメーター変数と呼び, $\widetilde{w}$ を $w\in W$ のパラメーター変数と τ 変数へのと呼ぶことにする.

以上で定義した二つの代数 $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ と D_q のテンソル積代数を $\mathcal{A}_q$ と表わす:

$$
\mathcal{A}_q=\widetilde{\mathcal{A}}_q\otimes D_q.
$$

$a\in\widetilde{\mathcal{A}}_q$, $b\in D_q$ のそれぞれと $a\otimes 1, 1\otimes b\in\mathcal{A}_q$ を同一視することによって, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ と D_q は $\mathcal{A}_q$ の部分代数とみなされる. $\mathcal{A}_q$ の中で $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ の元と D_q の元は互いに可換である.

$\widetilde{\mathcal{A}}_q$ は Ore 整域になると仮定したので, $\mathcal{A}_q$ も Ore 整域になる. $\mathcal{A}_q$ の分数斜体を $\mathcal{K}_q$ と表わすことにする.

上で定義した W の D_q への代数自己同型としての作用を $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ 上に自明に拡張することによって $w\in W$ の $\mathcal{A}_q$ への代数自己同型としての作用 $\widetilde{w}$ を定める:

$$
\widetilde{w}(q^h)=q^{w(h)}, \quad \widetilde{w}(\tau^\mu)=\tau^{\widetilde{w}(\mu)}, \quad \widetilde{w}(f_i)=f_i \quad (w\in W,\ h\in Q^\vee,\ \mu\in P,\ i\in I).
$$

この Weyl 群作用は分数斜体 $\mathcal{K}_q$ への作用を誘導する. $w\in W$ に対して $\widetilde{w}$ の $\mathcal{A}_q$ への作用の $\mathcal{K}_q$ への拡張も同じ記号 $\widetilde{w}$ で表わす.

$i\neq j$ のとき, $k=0,1,2,\dots$ に対して帰納的に $\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j)$ を次のように定める:

$$
\mathrm{ad}_q(f_i)^0(f_j)=f_j, \quad \mathrm{ad}_q(f_i)^{k+1}(f_j)=f_i\,\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j)-q_i^{a_{ij}+2k}\,\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j)f_i.
$$

ここで $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j+k\alpha_i\rangle=a_{ij}+2k$ に注意せよ. (この ad_q は量子展開環 U_q における coproduct $\Delta(f_i)=f_i\otimes 1+k_i\otimes f_i$ に関する adjoint action に一致している.) このとき q-Serre 関係式は $\mathrm{ad}_q(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j)=0$ と同値である.

さらに $i \neq j$ のとき次が形式的に成立することを示せる:

$$
\begin{aligned}
f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma} &= \sum_{k=0}^{-a_{ij}} q_i^{(k+a_{ij})(\gamma-k)} \begin{bmatrix}\gamma\\k\end{bmatrix}_{q_i} \mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) f_i^{-k} \\
&= q_i^{a_{ij}\gamma} f_j + q_i^{(1+a_{ij})(\gamma-1)} [\gamma]_{q_i} \mathrm{ad}_q(f_i)(f_j) f_i^{-1} \\
&\qquad + q_i^{(2+a_{ij})(\gamma-2)} \frac{[\gamma]_{q_i}[\gamma-1]_{q_i}}{[2]_{q_i}} \mathrm{ad}_q(f_i)^2(f_j) f_i^{-2} + \cdots .
\end{aligned}
$$

γ が正の整数のときこの公式は γ に関する帰納法で証明される．和が $-a_{ij}$ までなのは q-Serre 関係式より $\mathrm{ad}_q(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$ が成立しているからである．q-Serre 関係式は q を q^{-1} の移す変換で不変なのでこの公式の右辺で q を q^{-1} に置き換えた公式も成立している．この公式を用いて $f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma} \in \mathcal{K}_q$ を定義する．さらに $\gamma \in Q^\vee$ のときこの公式の右辺は $\mathcal{K}_q$ の元として well-defined であることにも注意せよ．

$\gamma \in Q^\vee$, $\mu \in P$ のとき, Kac-Moody 代数の場合と同様に

$$
f_i^\gamma \tau^\mu f_i^{-\gamma} = f_i^\gamma f_i^{-(\gamma+\langle\gamma,\mu\rangle)} \tau^\mu = f_i^{-\langle\gamma,\mu\rangle} \tau^\mu
$$

によって $f_i^\gamma \tau^\mu f_i^{-\gamma} \in \mathcal{K}_1$ を定義しておく．

実は $\gamma \in Q^\vee$ のとき $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)(x) = f_i^\gamma x f_i^{-\gamma}$ によって $\mathcal{K}_1$ の代数自己同型 $\mathrm{Ad}(f_i^\gamma)$ が定義できる．q-Serre 関係式から導かれる Verma 関係式を用いると次の定理が証明される．

定理 1.2. Weyl 群 W の生成元 s_i の斜体 $\mathcal{K}_q$ への作用を $s_i(x) = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \circ \tilde{s}_i(x)$ によって定めることによって, W の斜体 $\mathcal{K}_q$ への代数自己同型としての作用を定めることができる．作用の具体的な公式は次の通り:

$$
\begin{aligned}
s_i(q^{\alpha_j^\vee}) &= q^{\alpha_j^\vee - a_{ji}\alpha_i^\vee}, \\
s_i(\tau_j) &= \begin{cases} f_i \dfrac{\prod_{k\neq i} \tau_k^{-a_{ki}}}{\tau_i} & (i=j), \\ \tau_j & (i \neq j), \end{cases} \\
s_i(f_j) &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{-a_{ij}} q_i^{(k+a_{ij})(\alpha_i^\vee-k)} \begin{bmatrix}\alpha_i^\vee\\k\end{bmatrix}_{q_i} \mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) f_i^{-k} & (i \neq j), \\ f_i & (i=j). \end{cases}
\end{aligned}
$$

たとえば $a_{ij} = -1$ のとき

$$
s_i(f_j) = q_i^{-\alpha_i^\vee} f_j + [\alpha_i^\vee]_{q_i} (f_i f_j - q_i^{-1} f_j f_i) f_i^{-1} = q_i^{\alpha_i^\vee} f_j + [\alpha_i^\vee]_{q_i} (f_i f_j - q_i f_j f_i) f_i^{-1}. \quad \square
$$

この定理の τ_i を除いた部分は [1] で証明されている．τ_i を含む場合への拡張は易しい．

2　量子 τ 函数とその正則性

以下, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_1$ または $\mathcal{A}_q$ を表わし, $\mathcal{K}$ は $\mathcal{A}$ の分数斜体 $\mathcal{K}_1$ または $\mathcal{K}_q$ を表わすとする．

2.1 量子 τ 函数の定義

$Weyl$ 群に関する一般論より, Weyl 群 W における fundamental weight Λ_j の安定部分群 $W_{\Lambda_j} = \{\, w \in W \mid w(\Lambda_j) = \Lambda_j \,\}$ は s_j 以外の s_i たちで生成される W の部分群に等しい.

前節で斜体 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_q$ への Weyl 群作用を構成した. τ_j への Weyl 群の作用について $s_i(\tau_j) = \tau_j$ $(i \neq j)$ が成立している. よって任意の $w \in W_{\Lambda_j}$ に対して $w(\tau_j) = \tau_j$ となる. これより $w, w' \in W$ に対して $w(\Lambda_j) = w'(\Lambda_j)$ ならば $w(\tau_j) = w'(\tau_j)$ が成立する. さらに任意の $\mu \in P$ に対して

$$w(\mu) = \sum_{j \in I} \langle \alpha_j^\vee, \mu \rangle w(\Lambda_j), \quad w(\tau^\mu) = \prod_{j \in I} w(\tau_j)^{\langle \alpha_j^\vee, \mu \rangle} \qquad (w \in W)$$

であるから, $w, w' \in W$ に対して $w(\mu) = w'(\mu)$ ならば $w(\tau^\mu) = w'(\tau^\mu)$ が成立する.

$P^+ = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geqq 0} \Lambda_i$ とおき, P^+ の元を dominant integral weight と呼ぶ. さらに integral Tits cone $T \subset P$ を

$$T = WP^+ = \{\, w(\mu) \mid w \in W,\ \mu \in P^+ \,\}$$

と定める. P^+ は T への W への作用に関する基本領域になっている. $\nu \in T$ に対して量子 τ 函数 τ_ν を

$$\tau_\nu = \tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu) \quad (\nu = w(\mu) \in T,\ w \in W,\ \mu \in P^+)$$

と定める. 量子 τ 函数は Tits cone T 上の斜体 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_q$ に値を持つ函数 $T \to \mathcal{K}$, $\nu \mapsto \tau_\nu$ であると考えることもできる.

2.2 量子 τ 函数の正則性予想

次が筆者が定式化した量子 τ 函数の正則性予想である.

予想 2.1 (量子 τ 函数の正則性予想)**.** 任意の $\mu \in P^+$, $w \in W$ に対して量子 τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ は $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_q$ に含まれる. すなわち $\mu \in P^+$, $w \in W$ のとき量子 τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ は Kac-Moody の場合には f_i, $\alpha_i^\vee$, $\tau_i^{\pm 1}$ たちの非可換多項式になり, 量子展開環の場合には f_i, $q^{\pm \alpha_i^\vee}$, $\tau_i^{\pm 1}$ たちの非可換多項式になる. □

この予想は Noumi-Yamada [4] の Theorem 1.3 の量子版になっている.

Kac-Moody の場合には任意の対称化可能 GCM について量子 τ 函数の正則性予想を証明し, 量子展開環の場合には有限型の場合に予想を証明する.

2.3 量子 τ 函数の単項式表示と表現論への帰着

次の式によって $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_q$ の元 $\phi_w(\mu)$ を定義する:

$$w(\tau^\mu) = \phi_w(\mu) \tau^{w(\mu)} \quad (w \in W,\ \mu \in P).$$

この $\phi_w(\mu)$ は τ_i たちを含まない. ($\phi_w(\mu)$ は $f_i, \alpha_i^\vee$ たちもしくは $f_i, q^{\alpha_i^\vee}$ たちで生成される $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_q$ の部分斜体に含まれる.) 量子 τ 函数の正則性予想は $\mu \in P^+$ のとき $\phi_w(\mu)$ が $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_q$ に含まれることと同値である.

以下, $\mu \in P^+$, $w \in W$ であるとし, $w = s_{i_l} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ は w の簡約表示であると仮定する.

Weyl 群の元 $w \in W$ のパラメーター変数と τ 変数への作用を $\widetilde{w}$ と書くことにしたのであった. 量子 τ 函数の正則性予想は $\widetilde{w}^{-1}(\phi_w(\mu))$ が $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_q$ に含まれることと同値である. その $\widetilde{w}^{-1}(\phi_w(\mu))$ は次のように表わされる:

$$\widetilde{w}^{-1}(\phi_w(\mu)) = f_{i_l}^{-\gamma_l} \cdots f_{i_2}^{-\gamma_2} f_{i_1}^{-\gamma_1} f_{i_1}^{\gamma_1 + \langle \gamma_1, \mu \rangle} f_{i_2}^{\gamma_2 + \langle \gamma_2, \mu \rangle} \cdots f_{i_l}^{\gamma_l + \langle \gamma_l, \mu \rangle}$$

ここで $w_k = s_{i_k} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$, $\gamma_k = w_{k-1}^{-1}(\alpha_{i_k}^\vee) = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee)$ とおいた. 量子 τ 函数の正則性予想は $\mu \in P^+$ のときこの $\widetilde{w}^{-1}(\phi_w(\mu))$ が $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_q$ に含まれることと同値である.

さらにこの条件は任意の $\lambda \in P^+$ に対して

$$\begin{aligned}
&f_{i_l}^{-\langle \gamma_l, \lambda+\rho \rangle} \cdots f_{i_2}^{-\langle \gamma_2, \lambda+\rho \rangle} f_{i_1}^{-\langle \gamma_1, \lambda+\rho \rangle} f_{i_1}^{\langle \gamma_1, \lambda+\mu+\rho \rangle} f_{i_2}^{\langle \gamma_2, \lambda+\mu+\rho \rangle} \cdots f_{i_l}^{\langle \gamma_l, \lambda+\mu+\rho \rangle} \\
&= f_{i_l}^{-\langle \alpha_{i_l}^\vee, w_{l-1}(\lambda+\rho) \rangle} \cdots f_{i_2}^{-\langle \alpha_{i_2}^\vee, w_1(\lambda+\rho) \rangle} f_{i_1}^{-\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda+\rho \rangle} \\
&\times f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda+\mu+\rho \rangle} f_{i_2}^{\langle \alpha_{i_2}^\vee, w_1(\lambda+\mu+\rho) \rangle} \cdots f_{i_l}^{\langle \alpha_{i_l}^\vee, w_{l-1}(\lambda+\mu+\rho) \rangle}
\end{aligned}$$

が f_i たちの多項式になることと同値である (実際には少し議論が必要).

ここで $F_w(\lambda)$ を

$$F_w(\lambda) = f_{i_l}^{\langle \alpha_{i_l}^\vee, w_{l-1}(\lambda+\rho) \rangle} \cdots f_{i_2}^{\langle \alpha_{i_2}^\vee, w_1(\lambda+\rho) \rangle} f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda+\rho \rangle}$$

と定義し, f_i を f_i に移す反代数自己同型を使えば, 上の条件は $F_w(\lambda+\mu) F_w(\lambda)^{-1}$ が f_i たちの多項式になることと同値であることがわかる. ($F_w(\lambda)$ は w の簡約表示の取り方によらずに定まることが知られている. w の異なる簡約表示に対する $F_w(\lambda)$ の右辺が等しいという等式は Verma 関係式と呼ばれている.)

よって $\lambda, \mu \in P^+$ のとき U_1^- と U_q^- の中で $F_w(\lambda+\mu)$ が $F_w(\lambda)$ で左から割り切れることを示せば量子 τ 函数の正則性予想が証明されたことになる.

$w \in W$ と $\lambda \in P$ に対して $w \circ \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho$ とおく.

以下 U は Kac-Moody 代数の普遍展開環 U_1 または量子展開環 U_q であるとし, Δ はその余積であるとする. (U_q では $\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + k_i \otimes f_i$ であるとする.) U^- は U_1^- または U_q^- であるとする.

$\lambda \in P$ に対して $M(\lambda)$ は最高ウェイト λ を持つ U 上の Verma 加群を表わし, $\mu \in P^+$ に対して $L(\lambda)$ は最高ウェイト λ を持つ可積分既約表現を表わすものとする. $M(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルを v_λ と書き, $L(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルを u_μ と書く.

このとき $v_\lambda \otimes u_\mu$ は $M(\lambda) \otimes L(\mu)$ の最高ウェイトベクトルになり, 最高ウェイト $\lambda+\mu$ を持つ Verma 部分加群を生成する.

一般に $\lambda \in P^+$ のとき $F_w(\lambda) v_\lambda \in M(\lambda)$ は最高ウェイト $w \circ \lambda$ を持つ $M(\lambda)$ の Verma 部分加群を生成する. 以下その Verma 部分加群と $M(w \circ \lambda)$ を同一視する: $M(w \circ \lambda) \subset M(\lambda)$, $v_{w \circ \lambda} = F_w(\lambda) v_\lambda$. このとき $M(\lambda)$ の元を $a \in U^-$ によって $a v_\lambda$ と一意的に表わすと, $a v_\lambda \in M(w \circ \lambda)$ と a が U_- の中で $F_w(\lambda)$ で左から割り切れることは同値になる.

さらに $\mu \in P^+$ を取ると, $\Delta(F_w(\lambda+\mu)) v_\lambda \otimes u_\mu$ は最高ウェイト $w \circ (\lambda+\mu)$ を持つ $M(\lambda+\mu) \subset M(\lambda) \otimes L(\mu)$ の Verma 部分加群を生成する.

そして $\Delta(F_w(\lambda+\mu)) v_\lambda \otimes u_\mu$ は $(F_w(\lambda+\mu) v_\lambda) \otimes u_\mu + \cdots$ の形をしている. よってもしも

$$\Delta(F_w(\lambda+\mu)) v_\lambda \otimes u_\mu \in M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu)$$

ならば $F_w(\lambda+\mu)$ は $F_w(\lambda)$ で左から割り切れることになる．

これは表現論の専門家たちにはよく知られている translation principle の帰結である．

もしも $M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu)$ がその U 部分加群 $\mathrm{pr}_\nu(M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu))$ たちの直和に分解し，$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda))$ を

$$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)) = \mathrm{pr}_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu)) \subset M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu)$$

と定めるとき，

$$\begin{aligned}
&T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)) \subset T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(\lambda)),\\
&T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(\lambda)) \cong M(\lambda+\mu),\\
&T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)) \cong M(w\circ(\lambda+\mu))
\end{aligned}$$

が成立しているならば，$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(\lambda))$ は $v_\lambda\otimes u_\mu$ から生成され，$\Delta(F_w(\lambda+\mu))v_\lambda\otimes u_\mu \in T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(\lambda))$ はウェイト $w\circ(\lambda+\mu)$ の singular vector であり，$M(w\circ(\lambda+\mu))$ から $M(\lambda+\mu)$ への U 準同型が定数倍を除いて一意的であることより，

$$\Delta(F_w(\lambda+\mu))v_\lambda\otimes u_\mu \in T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)) \subset M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu)$$

となることがわかり，τ 函数の正則性予想が証明される．

2.4　任意の対称化可能 Kac-Moody 代数の場合の予想の証明

U が Kac-Moody 代数の普遍展開環の場合には τ 函数の正則性予想の証明に必要な translation principle に関する結果が Kac-Wakimoto [3] Lemma 1 で (より一般の場合が) 証明されている．したがって任意の対称化可能 Kac-Moody 代数の場合には τ 函数の正則性予想は成立している．

定理 2.2. 対称化可能な Kac-Moody 代数の任意の場合に τ 函数の正則性予想は成立する．□

2.5　有限型の量子展開環の場合の予想の証明

U が量子展開環の場合には有限型に限れば τ 函数の正則性予想の証明に必要な translation principle に関する結果が Joseph [2] 8.4.10 で証明されている．したがって任意の有限型量子展開環の場合には τ 函数の正則性予想は成立している．

特に任意の正の整数 N に対する A_N 型の場合に量子展開環の下三角部分において τ 函数の正則性予想は成立している． A_N 型の量子展開環の下三角部分の $n\to\infty$ での inductive limit を経由して A_∞ 型の場合にも τ 函数の正則性予想が成立していることがわかる．そして A_∞ 型の場合の n 簡約によって $A^{(1)}_{n-1}$ 型の場合にも τ 函数の正則性予想が成立していることがわかる．

定理 2.3. 量子展開環の場合には有限型と A_∞ 型と $A^{(1)}_{n-1}$ 型の場合には τ 函数の正則性予想は成立する．□

3 古典の場合との比較

3.1 Weyl 群作用の比較

量子化 (および q 差分化) される前の Weyl 群双有理作用に関する基本文献は Noumi-Yamada [4] である. その論文では τ_i たちと他の変数の Poisson 括弧は定義されていない. このことが τ 函数の量子化をすぐに構成できなかった最大の理由である.

しかし τ_i たちはパラメーター変数 $\alpha_i^\vee$ たちの正準共役変数の exponential であるということに気付けば量子化を定義することは容易である. ただし, このアイデアが正しいことを確信するためには古典の場合に [4] で証明されている τ 函数の正則性 (多項式性) が量子の場合にも成立していることを多くの具体的な計算で確認しなければいけなかった.

以下 $A = [a_{ij}]_{i,j\in I}$ は対称化可能 GCM であるとする.

Noumi-Yamada [4] では可換 Poisson 代数としての生成元 $\alpha_i^\vee$, f_i $(i \in I)$ と以下の基本関係式で定義される可換 Poisson 代数 (より正確にはその剰余整域) を扱っている:

$$\mathrm{ad}_{\{,\}}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad \{\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee\} = 0, \quad \{\alpha_i^\vee, f_j\} = 0.$$

ここで $\mathrm{ad}_{\{,\}}(f)(g) = \{f, g\}$ とおいた. そして「τ_i は $\alpha_i^\vee$ の正準共役変数の exponential である」というこのノートの立場に基づいて, τ_i に関して次を仮定する:

$$\{\tau_i, \alpha_j^\vee\} = \delta_{ij}\tau_i, \quad \{\tau_i, f_j\} = 0.$$

さらに Weyl 群の元 $w \in W$ の τ_i とパラメーター $\alpha_i^\vee$ への作用 $\widetilde{w}$ を第 1.2.1 節と同様に定めておく:

$$\tilde{s}_i(f_j) = f_j, \quad \tilde{s}_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee - a_{ji}\alpha_i^\vee, \quad \tilde{s}_i(\tau_j) = \begin{cases} \tau_i \prod_{k\in I} \tau_k^{-a_{ki}} & (i = j), \\ \tau_j & (i \neq j). \end{cases}$$

Noumi-Yamada [4] は Weyl 群の生成元 s_i $(i \in I)$ の作用を次のように定めた:

$$s_i(x) = \exp(\mathrm{ad}_{\{,\}}(\alpha_i^\vee \log f_i)) \circ \tilde{s}_i(x). \tag{$*$}$$

この定義に対応する式は [4] の (3.43) にある. しかし [4] では τ_i を Poisson 代数に含めていないのでパラメーター $\alpha_i^\vee$ は Poisson 中心元になるので, $\exp(\mathrm{ad}_{\{,\}}(\alpha_i^\vee \log f_i))$ の代わりに $\exp(\alpha_i^\vee f_i^{-1}\,\mathrm{ad}_{\{,\}}(f_i))$ のように書いている. Noumi-Yamada [4] は Poisson 構造を経由せずに直接 τ_j への作用を定めているので, 上の定義に基づいた s_i の τ_j への作用が Noumi-Yamada [4] のそれと一致していることを確認しなければいけない.

Noumi-Yamada [4] の式 (1.14) は次の通り:

$$s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i \neq j), \qquad s_i(\tau_j) = f_i \tau_i \prod_{k\in I} \tau_k^{-a_{ki}}. \tag{$\sharp$}$$

ただし Noumi-Yamada [4] はこのノートの f_i を φ_i を書いているので φ_i を f_i に書き直して引用した. 上の定義がこの式を再現することを確認しよう.

まず $i \neq j$ のとき $\tilde{s}_i(\tau_j) = \tau_j$ であり, $\{\alpha_i^\vee \log f_i, \tau_j\} = 0$ なので, 上の定義のもとで ($\sharp$) の前者の式が成立することがわかる.

次に $s_i(\tau_i)$ を計算しよう. $\tilde{s}_i(\tau_i) = \tau_i \prod_{k\in I} \tau_k^{-a_{ki}} = \tau_i^{-1} \prod_{k\neq i} \tau_k^{-a_{ki}}$ であり,

$$\{\alpha_i^\vee \log f_i, \tau_i^{-1}\} = -(\log f_i)\tau_i^{-2}\{\alpha_i^\vee, \tau_i\} = (\log f_i)\tau_i^{-2}\tau_i = (\log f_i)\tau_i^{-1}$$

なので次が成立する:

$$\exp(\mathrm{ad}_{\{,\}}(\alpha_i^\vee \log f_i))(\tau_i^{-1}) = \exp(\log f_i)\tau_i^{-1} = f_i\tau_i^{-1}.$$

これより ($\sharp$) の後者の式が成立することがわかる.

古典の場合の s_i の作用の定義式 ($*$) と量子の場合の定義式

$$s_i(x) = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \circ \tilde{s}_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} \tag{$\star$}$$

を比較しよう. $\mathrm{ad}(f)(g) = fg - gf$ のとき形式的に

$$\mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) = \mathrm{Ad}(\exp(\alpha_i^\vee \log f_i)) = \exp(\mathrm{ad}(\alpha_i^\vee \log f_i))$$

が成立することに注意すれば, 量子の場合の作用の定義式 ($\star$) が古典の場合の定義式 ($*$) の類似になっていることは明らかだろう.

Noumi-Yamada [4] は古典の場合に $2A_1, A_2, B_2, G_2$ 型の場合の詳細な計算によって ($*$) で定義された s_i の作用が Weyl 群の基本関係式を満たしていることを示している.

量子の場合には ($\star$) で定義された s_i の作用が Weyl 群の基本関係式を満たしていることは Verma 関係式から容易に導かれる ([1]). ここで Verma 関係式とは第 2.3 節における $F_w(\lambda)$ の定義式の右辺が w の簡約表示の取り方によらないことを意味する等式のことである.

3.2 τ 函数の正則性の証明法の比較

Noumi-Yamada [4] では dominant integral weight $\mu \in P^+$ と $w \in W$ に対する τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ が f_i, $\alpha_i^\vee$, $\tau_i^{\pm 1}$ の多項式で表わされること (正則性) をソリトン方程式に関する佐藤幹夫の理論 (佐藤理論) の表現論的な定式化を Weyl 群双有理作用に適用することによって証明している. 証明のアイデアは $A_{n-1}, A_\infty, A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合について正則性を証明している野海 [5] が読み取りやすい.

細かい記号の説明は省略するが, $\mu \in P^+$, $w \in W$ に対して具体的に書き下せる $\alpha_i^\vee$ たちの多項式 $N_w(\mu)$ が存在して, τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ が次のように表わされることを Noumi-Yamada [4] は示している:

$$w(\tau^\mu) = N_w(\mu)\langle\mu|b\dot{w}|\mu\rangle.$$

ここで $|\mu\rangle$ は最高ウェイト μ を持つ可積分既約表現 $L(\mu)$ の最高ウェイトベクトルであり, $\langle\mu|$ はその双対表現 (右加群とみなす) の最高ウェイトベクトルである. この表示の最大の利点は τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ が A 型の場合に小行列式で表わされること (Jacobi-Trudi 型公式) の直接的な一般化になっていることである. 実際, A 型の場合には $g \in GL_n(\mathbb{C})$ に対して $\langle\Lambda_i|g|\Lambda_i\rangle$ は g の左上の $i \times i$ 部分の主小行列式になる.

古典版を扱っている Noumi-Yamada [4] では最高ウェイト可積分表現 $L(\mu)$ はこのような形で使われる. それに対してこのノートの量子版では $L(\mu)$ は translation functor を構成するために使われる.

細かい記号の説明は省略するが, 量子 τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ の正則性は translation principle

$$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)) \cong M(w\circ(\lambda+\mu)) \quad (\lambda,\mu\in P^+,\ w\in W)$$

に帰着される. ここで $T^\lambda_{\lambda+\mu} : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{O}_{\lambda+\mu}$ は

$$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M) = \mathrm{pr}_{\lambda+\mu}(M\otimes L(\mu))$$

で定義される translation functor である.

この意味で $L(\mu)$ に付随する Weyl 群双有理作用の佐藤理論の量子版での対応物は $L(\mu)$ をテンソル積することで構成される translation functor なのかもしれない. これは筆者にとってかなり意外な対応関係であり, おおげさかもしれないが, 新しい世界が開かれたように感じられた. この点についてはもっとつっこんだ研究が必要だと思われる.

参考文献

[1] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. `arXiv:math/0808.2604`

[2] Joseph, Anthony. Quantum groups and their primitive ideals. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 29. Springer-Verlag, Berlin, 1995. x+383 pp. ISBN: 3-540-57057-8

[3] Kac, Victor G. and Wakimoto, Minoru. Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no. 14, 4956–4960.

[4] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287?319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. `arXiv:math.QA/0012028`

[5] 野海正敏. パンルヴェ方程式—対称性からの入門—. 数学の風景 4, 朝倉書店, 2000, viii+204 pp. ISBN: 4-254-11554-7