パンルヴェ系とソリトン系 Part 3

黒木 玄

2001 年 6 月 6 日*

目 次

次のメールを修正したもの

```
Date: Wed, 6 Jun 2001 08:46:21 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106052346.IAA08754@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: Painlev\'e and Soliton, Part 3

Date: Wed, 6 Jun 2001 13:28:09 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106060428.NAA11014@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: Painlev\'e and Soliton, Part 3 (追加)
```

前回の続き.

---

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Painleve-Soliton-3.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 20 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 6 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

1 modified Drinfeld-Sokolov hierarchy の復習

前回の modified Drinfeld-Sokolov hierarchy の similarity reduction の例をより詳細かつ正確に説明する. 以下のような状況を考える.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}((z^{-1}))) \oplus \mathbb{C}d \quad (\text{centerless affine } \mathfrak{sl}(n),\ d = z\partial_z),\\
&\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{h} + \mathbb{C}d + \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}[z]),\\
&\mathfrak{g}_- = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{sl}(n, z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]),\\
&\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ z & & & & 0 \end{bmatrix},\\
&P_i = \Lambda^i \quad (i \in I = \{\, i \mid i = 1, 2, \dots, r \text{ でかつ } i \text{ は } n \text{ で割り切れない} \,\}),\\
&q := nd + \rho^\vee \quad \Bigl(\rho^\vee = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha^\vee\Bigr).
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}((z))^n$ への作用によって忠実に表現されているとみなす. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ はそれぞれ $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の対角行列のなす Cartan subalgebra, 上三角もしくは下三角行列全体のなす maximal nilpotent subalgebras である. $\rho^\vee$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の half sum of positive coroots である.

$\rho^\vee$ は行列として対角行列であり,

$$
\begin{aligned}
\rho^\vee &= \operatorname{diag}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, \frac{-n+3}{2}, \frac{-n+1}{2}\right)\\
&= \frac{n-1}{2} E_n - \operatorname{diag}(0, 1, \dots, n-1).
\end{aligned}
$$

ここで, E_n は n 次の単位行列である.

q は affine $\mathfrak{sl}(n)$ の principal gradation を与える Cartan subalgebra の元なので, $[q, P_i] = iP_i$ である. よって,

$$
Q = Q(t) = \exp\left(\sum t_i P_i\right)\, q\, \exp\left(-\sum t_i P_i\right) = q - \sum i t_i P_i \in \mathfrak{g}.
$$

$i \in I$ の上限 r を有限で止めておかないと $Q \in \mathfrak{g}$ とならないことに注意せよ.

2 modified Drinfeld-Sokolov hierarchy の波動関数

以下, $z := w^n$ と置き, 次のように置く:

$$
|w\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ \vdots \\ w^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mu := \frac{n-1}{2}, \quad D := \operatorname{diag}(0, 1, \dots, n-1).
$$

このとき, $nd = nz\partial_z = w\partial_w$, $\rho^\vee = \mu E_n - D$ より, $q = w\partial_w + \mu E_n - D$ であるから,

$$q|w\rangle = \mu|w\rangle.$$

さらに,

$$\Lambda|w\rangle = w|w\rangle, \quad P_i|w\rangle = \Lambda^i|w\rangle = w^i|w\rangle$$

も成立している.

$g(s,t) \in G$ は次の微分方程式の解であるとする:

$$\partial_i(g(s,t)) = P_i g(s,t), \quad \partial_s(g(s,t)) = Q(t)g(s,t)$$

この $g(s,t)$ を用いて, G 値波動函数 $\Psi = \Psi(s,t)$ とベクトル値波動関数$\psi = \psi(w;s,t)$ を以下のように定める:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Psi(s,t) := g_-(s,t)\exp\Big(\sum t_i P_i\Big), \\
\psi &= \psi(w;s,t) := \Psi|w\rangle = g_-(s,t)\exp\Big(\sum t_i w^i\Big)|w\rangle.
\end{aligned}$$

$L_i = L_i(s,t)$, $B_i = B_i(s,t)$, $B_i^c = B_i^c(s,t)$, $M = M(s,t)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
L_i &:= g_-(s,t)P_i g_-(s,t)^{-1}, \\
B_i &:= (L_i)_+, \quad B_i^c := (L_i)_-, \\
M &:= g_-(s,t)Q(t)g_-(s,t)^{-1}.
\end{aligned}$$

このとき「パンルヴェ系とソリトン系 Part 2」の定理 2.4 より以下が成立している:

$$L_i\Psi = \Psi P_i, \tag{2.1}$$
$$\partial_i(\Psi) = B_i\Psi \qquad (B_i = (L_i)_+), \tag{2.2}$$
$$M\Psi = \Psi q, \tag{2.3}$$
$$\partial_s(\Psi) = M_-\Psi. \tag{2.4}$$

これらの等式から以下が成立することがすぐにわかる:

$$L_i\psi = w^i\psi, \tag{2.5}$$
$$\partial_i(\psi) = B_i\psi, \tag{2.6}$$
$$M\psi = \mu\psi \qquad (\mu = (n-1)/2), \tag{2.7}$$
$$\partial_s(\psi) = M_-\psi. \tag{2.8}$$

$G_- = 1 + \mathfrak{g}_-$ および $g_- q g_-^{-1} = q - [g_- q g_-^{-1}]_-$ より,

$$\begin{aligned}
M_+ &= q - \sum i t_i B_i, \\
M_- &= [g_- q g_-^{-1}]_- + \sum i t_i B_i^c.
\end{aligned}$$

よって, $M \in \mathfrak{g}_+$ が成立するための必要十分条件は

$$M = w\partial_w + \mu E_n - D - \sum i t_i B_i$$

または

$$[g_- q g_-^{-1}]_- = -\sum i t_i B_i^c$$

が成立することである.

以下では $M \in \mathfrak{g}_+$ を仮定する. このとき, $M_- = 0$ なので (2.8) より ψ は s によらない. そして, $q = w\partial_w + \mu E_n - D$ より, 上の (2.7) は次のように書き直される:

$$w\partial_w(\psi) = A\psi. \tag{2.9}$$

ここで,

$$A := D + \sum i t_i B_i, \quad D = \operatorname{diag}(0, 1, \dots, n-1). \tag{2.10}$$

上の (2.9) は (2.6) より次と同値である:

$$w\partial_w(\psi) = \bigl[D + \sum i t_i \partial_i\bigr]\psi. \tag{2.11}$$

そして, この条件は, ψ を w と $t = (t_i)_{i\in I}$ の函数とみなすとき, 次の self-similarity と同値である:

$$\psi(\lambda w; t) = \lambda^D \psi(w; (\lambda^i t_i)_{i\in I}). \tag{2.12}$$

実際, (2.12) を λ で偏微分して $\lambda = 1$ と置けば (2.11) が導かれるし, 逆に (2.11) の両辺に作用している線形作用素を λ の肩に乗せたものを ψ に作用させれば (2.12) が導かれる.

3 野海の本との対応

前節の (2.9), (2.6) は

> [野海] 野海正俊, 『パンルヴェ方程式——対称性からの入門』, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000.9

の第 8.2.3 節 p.171 の

$$x\partial_x u = A(x)u, \quad \partial_{t_m} u = B_m(x)u \tag{8.42}$$

に対応している. 対応関係は次の通り:

[野海]	x	$x\partial_x$	t_m	$A(x)$	$B_m(x)$	u	(8.42)
このノート	z	$z\partial_z = \frac{1}{n} w\partial_w$	t_i	$\frac{1}{n}A$	B_i	ψ	(2.9), (2.6)

4 問題

以上と類似の構成をトロイダル版で考えるとどうなるか?

KdV-Bogoyavlensky 系に関しては次のような報告が存在する[1]:

> Oleg I. Bogoyavlenskij and William F. Shadwick: Operator representations for similarity solutions of 2+1-D evolution equations, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. XV, No. 4, August 1993 aoùt, 137–142

[1] この注意は 2002 年 1 月 20 日に追加された