パンルヴェ系とソリトン系 Part 1

黒木 玄

2001年6月2日*

目 次


```
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106020534.OAA23867@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Date: Sat, 02 Jun 2001 14:34:01 +0900
Subject: Painlev\'e and Soliton, Part 1
```

野海さんの本 [N] の Painlevé 方程式の定式化および τ 函数の由来などは全て「ソリトン系の基本パターン」の枠組で完全に理解できます．その考え方は10年位前に活発に研究されていた string equation の研究にさかのぼります．

ただし, $H = \tau'/\tau$ で Painlevé 方程式の τ 函数を定義する伝統的なやり方との相性はあまりよくありません．伝統的なやり方ではなく Gauss 分解の世界を通した τ 函数の話と合わせるのは非常に簡単です．

野海さんの本の内容と「ソリトン系の基本パターン」の内容の対応を順番に付けて行きましょう．

---

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Painleve-Soliton-1.txt の日付け．TEX 版は2002年1月20日に作成された．筆者の疑問や意見は2001年6月2日時点のものであり，現在では解決や変化している場合がある．

1 Gauss 分解

野海 p.114	基本パターン (mKP, mKdV, etc)
$X = WZ$	$g = g_-^{-1} g_+$
W は下三角で対角成分は全て 1	g_- は下三角で対角成分は全て 1
Z は上三角	g_+ は上三角

つまり大体において, $W = g_-^{-1}$, $Z = g_+$ である.
　この見方では τ 函数は $Z = g_+$ の対角成分に現われることになる (次節).
　ただし, 注意しなければいけないのは mKP や mKdV では単なる行列ではなく $GL(\infty)$ や affine $SL(2)$ のような無限次元の群を扱うことになることである. その点に関しては野海さんの本で言えば 7.5 節を見て下さい.

2 τ 函数

　野海さんの本の p.138 では τ_i が以下のように定義されている.

$$\tau_1 = z_1,\ \tau_2 = z_1 z_2,\ \ldots,\ \tau_n = z_1 z_2 \cdots z_n \tag{7.64}$$

$$z_1 = \tau_1,\ z_2 = \tau_2/\tau_1,\ \ldots,\ \tau_n = \tau_n/\tau_{n-1} \tag{7.65}$$

ここで, z_i は上三角 Z の対角成分すなわち Gauss 分解における対角成分である.
　「ソリトン系の基本パターン」の一つは「τ 函数はフローを Gauss 分解で Cartan subgroup に射影して見たものが τ 函数であること」です. だから, Cartan subgroup の次元が r であれば r 個の τ 函数が定義されることになる. 具体的には,

- $\Lambda_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ を基本ウェイト,
- $\Lambda_i : H \to \mathbb{C}^*$ をその exponential,
- $h(t) \in H$ を Catran subgroup に射影したフロー

とすると, i 番目の τ 函数は

$$\tau_i(t) = \Lambda_i(h(t))$$

と定義されます.
　$\mathfrak{gl}(n)$ の基本ウェイト Λ_i の exponential の対角行列 $\mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)$ での値は (7.64) の τ_i に等しい.
　実際, $H_j = E_{j,j} - E_{j+1,j+1}$ $(j < n)$, $H_n = E_{n,n}$ と置くと,

$$\tau_j^{H_j} = \mathrm{diag}(1, \ldots, \tau_j, \tau_j^{-1}, \ldots, 1) \quad (j < n)$$
$$\tau_n^{H_n} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \tau_n)$$

であり,

$$\Lambda_i(\tau_j^{H_j}) = \tau_j^{\Lambda_i(H_j)} = \tau_j^{\delta_{i,j}}$$

となる. 対角行列 h を

$$\begin{aligned} h &= \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_n) \\ &= \tau_1^{H_1} \cdots \tau_n^{H_n} \\ &= \operatorname{diag}(\tau_1, \tau_2/\tau_1, \dots, \tau_n/\tau_{n+1}) \end{aligned}$$

と表示すれば,

$$z_i = \Lambda_i(h)/\Lambda_{i-1}(h) = \tau_i/\tau_{i-1}.$$

これは (7.65) そのものである.

3 出発点になる群上のフローの生成元

野海さんの本の第 8 章では affine $\mathfrak{sl}(n)$ の場合に関する Lax 型式の話が書いてある. そこではスペクトル・パラメーターを x と書いてあるが, 以下では z と書くことにする.

「ソリトンの基本パターン Part 1」の Lax 型式の話を affine $\mathfrak{sl}(n)$ の principal gradation の場合 (すなわち modified KP 系の n-reduction で現われる modified n-KdV 系の場合) に適用すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \text{affine } \mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}K, \\ \mathfrak{g}_+ &= \mathbb{C}K + (\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \text{ の上三角}) \oplus \mathfrak{sl}(n, z\mathbb{C}[[z]]), \\ \mathfrak{g}_- &= \mathfrak{sl}(n, z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]) \oplus (\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \text{ の対角成分がゼロの下三角}). \end{aligned}$$

対応する群をそれぞれ G, G_+, G_- と書くことにする.

群 G 上のフローの生成元 $P_i \in \mathfrak{g}_+$ は以下のように定義される:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ z & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad P_i = (\text{行列としての } P_1 \text{ の } i \text{ 乗}).$$

ただし, i は $I = \{\, i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid i \text{ は } n \text{ の倍数ではない} \,\}$ を動く. P_1 は野海さんの本の記号では $\Lambda(z)$ と書かれている:

$$((8.12) \text{ の } \Lambda(z)) = P_1.$$

野海さんの本における x を z と書いていることに注意せよ. P_i はもちろん互いに可換である.

「ソリトンの基本パターン」では出発点になる群 G 上のフローは

$$\exp\left(\sum t_i P_i\right) \in G_+$$

の左からの積によって与えられるのでした. そして, $g \in G$ の「Gauss 分解」を

$$g = g_-^{-1} g_+ \quad (\text{野海さんの本では } g_-^{-1} = W,\ g_+ = Z \text{ と書いてある})$$

と書くことにし,

$$g = g(t) = \exp\left(\sum t_i P_i\right) g(0) = g_-(t)^{-1} g_+(t)$$

によって, $g = g(t)$, $g_- = g_-(t)$, $g_+ = g_+(t)$ を定めるのでした. (注意: $g(0)$ が Gauss 分解可能であれば t が十分小さいとき, もしくは formal な t に対して, $g(t)$ も Gauss 分解可能である.)

4 ソリトン系の Lax 型式

前節の続き. Lie 環のレベルでの「Gauss 分解」を

$$X = X_+ - X_-, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad X_+ \in \mathfrak{g}_+, \quad X_- \in \mathfrak{g}_-$$

と書き, Lax 型式を満たしている $L_i = L_i(t)$, $B_i = B_i(t)$, $B_i^c = B_i^c(t)$ を次のように定めるのでした:

$$L_i = g_- P_i g_-^{-1} \in \mathfrak{g}, \quad B_i = (L_i)_+ \in \mathfrak{g}_+, \quad B_i^c = (L_i)_- \in \mathfrak{g}_-.$$

時間変数 $t = (t_i)$ を書くのは省略した.

行列として $L_i = (L_1 \text{ の } i \text{ 乗})$ が成立していることに注意せよ. そこで以下では $L_2, L_3, \dots$ を忘れて, $L = L_1$ のみを扱うことにする.

このとき, 「ソリトン系の基本パターン」より, 以下の Lax 型式が成立する:

$$\partial_i L = B_i L, \tag{$*$}$$

$$[\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0. \tag{$**$}$$

ここで, $\partial_i = \partial/\partial t_i$ です.

野海さんの本の 8.2.3 の $B_m(x)$ がちょうど上の記号における B_i に対応しています:

$$(\text{野海さんの本の } B_i(z)) = (\text{ソリトンの基本パターンにおける } B_i).$$

この式では, 野海さんの本の m, x を i, z に書き直した. B_i たちの満たす零曲率方程式 $(**)$ は野海さんの本では (8.44) に書いてある.

零曲率方程式 $(**)$ は $A_n^{(1)}$ 型の変形 Drinfeld-Sokolov 階層そのものである.

ちょっと余談. 野海さんの本の p.171 には「n 簡約な変形 KP 階層」という言い方が登場するが, 個人的には, その階層は「変形 n-KdV 階層」と呼び, 呼び方とは別に「変形 KP 階層の n 簡約は変形 n-KdV 階層に等しい」という一文を付け加える方がわかりやすいと思う. 「変形 2-KdV 階層」が元来の「変形 KdV 階層」である.

5 similarity reduction and string equation

前節の続き.

野海さんの本における Painlevé 方程式の定式化は 10 年位前に活発に研究された string equation の定式化そのものであり, 新しいのは Weyl 群の作用がどうなるかをその見方で書き下した部分です.

soliton system, isomonodromy deformation (Painlevé), string equation のあいだの関係に関しては,

> Richard Beals and D. H. Sattinger: Integrable Systems and Isomonodromy Deformations, Physica D, Vol. 65, (1993), 17–47, `solv-int/9801010`

という基本文献があります. 他にも “additional symmetry” で検索して,

> Leonid Dickey: Additional symmetries of KP, Grassmannian, and the string equation, Mod. Phys. Lett. A8 (1993) 1259-1272, `hep-th/9204092`

のような文献を見付けることができます. 後者は PS が自動生成できません. 次の一行を先頭に追加して, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX でコンパイルしなければいけないのだ:

```
\documentstyle{amsppt}
```

この辺の話について「ソリトン系の基本パターン」並に抽象的でわかり易い文献があるかどうかは知りません.

基本的な考え方はソリトン系をあるやり方で non-autonomous な reduction (すなわち制約条件の中に時間変数が入っているような reduction) を行なうと, 不確定特異点を持つ微分方程式系のモノドロミー保存変形の方程式 (Painlevé II, IV を含む) が出て来るというものです:

$$\text{ソリトン系} \xrightarrow{\text{ある種の non-autonomous な reduction}} \text{モノドロミー保存変形}$$

ソリトン系の一般論と具体的な様々な方程式の関係を付けるためには “reduction” という考え方が基本的です.

10 年位前の string equation に関する活発な研究でわかったことは, 不確定特異点を持つ微分方程式系のモノドロミー保存変形の方程式 (Painlevé II, IV を含む) はソリトン系の reduction で得られるということだったのだ.

この意味で Painlevé II, IV の理論はソリトン系の理論に完全に含まれてしまっていると言って良いと思います.

この辺の話について詳しく説明すると長くなるのでこの辺で止めます. 気が向いたら, 詳しい解説を書きます.

6 問題

ソリトン系の toroidal 拡張に対する string equation の理論の類似を探せ. それは Painlevé の toroidal 化を与えているはずである.

例えば, KdV-Bogoyavlensky 系ではどうなっているか?

この問題の立て方はあまりにも漠然としているので, 色々なことを知ってないとちょっと感じがつかめないかもしれません.

参考文献

[N] 野海正俊: 『パンルヴェ方程式——対称性からの入門』, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000.9