東北大学オープンキャンパス2005 数学クイズ問題

黒木玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)

2005年7月28日(木)〜29日(金)

1　無限に広い平面に描かれた放物線はどのように見えるか?

問題 1 無限に広い xy 平面の世界に自分が移り住んだと想像して欲しい. その xy 平面上には放物線 $y = x^2$ が描かれており, 負の y 軸上に設置された高台からその放物線全体を写生したとする. 放物線の全体はどのように描かれることになるか? 特に地平線の近くで放物線はどのような様子になっているか? 実際に放物線の絵を描いてみよ.

2　球面を六角形だけに分割できるか?

問題 2 球面を六角形だけで分割することはできない. その理由をできるだけ数学的に説明せよ. (ただし一つの頂点に3つの六角形が集まるように分割しなければいけないものとする.) たとえば白黒に色分けされた昔ながらのサッカーボールの表面は六角形と五角形で分割されている. 分割の仕方をうまく変えて六角形だけにすることは不可能である.

3　$111\cdots1$ と 1 だけが並んでいる数の素因数について

問題 3 $111\cdots1$ と 1 だけが並んだ数たちの素因数分解にはどのような素数が現われるか?

$111\cdots1$ の形の数は 2 と 5 で割り切れないので, そのような数を素因数分解しても 2 と 5 は現われない. 桁数が少ない場合を具体的に計算してみると, $11 = 11$, $111 = 3\cdot37$, $1111 = 11\cdot101$, $11111 = 41\cdot271$, $111111 = 3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$ である. これで $3, 7, 11, 13, 37, 41, 101, 271$ が $111\cdots1$ の形の数の素因数として現われることがわかった. 17 は 1 が 16 個並んだ数の素因数であり, 19 は 1 が 18 個並んだ数の素因数であり, 23 は 1 が 22 個並んだ数の素因数であることもわかる (法則性に注意せよ).

このように具体的な数で実験してみると $111\cdots1$ の形の数の素因数として 2 と 5 以外のすべての素数が現われるように思われる. この予想は正しいか?

4　勝ち負けをイーブンに戻してゲームを終了できるか?

問題 4 小学2年生の翔太君は5歳の妹の由香ちゃんから遊んでと頼まれました. 翔太君は由香ちゃんとジャンケンをして勝ったら相手のオハジキを一個もらうという単純なゲームをして遊ぶことにしました. 由香ちゃんは負けず嫌いなので負けたままゲームを終わることを許してくれません. しかし翔太君も負けず嫌いなので妹に負けたままで終わりたくありません. そこで翔太君は適当なところで勝ちと負けがイーブンになったらゲームを止めようと考えました. 翔太君は予定通りに勝ち負けをイーブンに戻してゲームを止めることはできるでしょうか? 可能ならば止めるまでに必要なゲームの回数の期待値はどのくらいになるでしょうか?