共形場理論とモノドロミー保存変形理論

I. Riemann-Hilbert 問題の共形場理論を用いた解法のスケッチ

黒木 玄

最終更新: 2003 年 9 月 16 日 (作成: 2003 年 9 月 13 日)

目 次

Notation

添字の i と虚数単位を区別するために, 虚数単位を $\imath$ と書くことにする.

1 Sato-Miwa-Jimbo, Holonomic quantum fields II

Sato-Miwa-Jimbo の Holonomic quantum fields II [7] には複素射影直線上の確定特異点型接続のモノドロミー保存変形の線形問題の解 (Riemann-Hilbert 問題の解) を charged Fermions の場の理論 (ホロノミック量子場の理論) における相関函数で表わす方法が書いてある ([2] p.108 も見よ). それは次のような形をしている:

$$Y_{ij}(z) = (w-z)\frac{\langle \psi_i^*(w)\psi_j(z)V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle}{\langle V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle}.$$

ここで, $\psi_j(z)$ と $\psi_i^*(w)$ はそれぞれ $+1$, -1 の charge (電荷) を持つ charged Fermion であり, $V_a(t_a)$ は点 t_a でのモノドロミーを発生させる場である.

上の式で行列成分が定義された $n \times n$ 行列値多価函数 $Y(z) = [Y_{ij}(z)]_{i,j=1}^{n}$ は以下の性質を持っている:

(1) $Y(z)$ は複素射影直線上で $t_1, \dots, t_N$ のみに特異点を持ち, 他では正則な $n \times n$ 複素行列値多価函数である. しかも, 各 t_a では次のような展開を持つ:

$$Y(z) = (t_a \text{ の近傍で正則な } GL_n(\mathbb{C}) \text{ 値函数})(z - t_a)^{L_a};$$

(2) $Y(w) = E$ (正規化の条件).

ここで E は単位行列であり, $*$ は $t_1, \dots, t_N$ の $n \times n$ 行列値函数であり, L_a は $n \times n$ 行列である.

このとき, w から出発して t_a のまわりを一回転して w に戻る経路 γ_a に沿った解析接続によって, $Y(w) = E$ は $Y(w)e^{2\pi\imath L_a} = e^{2\pi\imath L_a}$ に変換される. $M_a := e^{2\pi\imath L_a}$ をモノドロミー行列と呼ぶ.

実際には Sato-Miwa-Jimbo [7] では, 複素平面上の場の理論 (共形場理論) ではなく, w と $t_1, \dots, t_N$ たちを繋ぐ実閉曲線上の場の理論を積分方程式の理論を用いて構成している. それを hyperfunction の要領で複素領域に拡張すると上のような多価函数が得られる.

Sato-Miwa-Jimbo [7] の意味での holonomic quantum fields の理論は複素領域ではなく, 実 1 次元の空間上の場の理論であり, 積分方程式を本質的に用いているので, 筆者は Sato-Miwa-Jimbo 理論と共形場理論はまったく異なる理論だとずっと思っていた.

2 Korotkin の解と Krichever 構成と共形場理論の関係

Korotkin の仕事 (関連の最も最近の仕事は `math-ph/0306061` [4]) によれば, モノドロミー行列 M_a がすべて準置換行列 (各行各列に 0 でない成分がちょうど 1 つしかないような行列) である場合には, 前節で説明した性質を持つ行列値多価函数 $Y(z)$ が複素射影直線の分岐被覆に付随する Riemann のテータ函数で書ける. (分岐被覆の分岐点はすべてある t_a の上にある.)

しかも, その式 (`math-ph/0306061` [4] の (4.6)) をじっと眺めると, それはほとんど KP 階層の準周期解の Baker-Akhiezer 函数の形をしていることがわかる. 「ほとんど」という形容詞を付けなければいけない理由は, 通常の Baker-Akhiezer 函数とは異なり, 準置換行列の 1 でない成分に対応するモノドロミーを出すためにその函数が多価函数になっているからである.

そのように一般化された Baker-Akhiezer 函数はすでに Krichever らによって構成されている. たとえば, `hep-th/9704090` [5] の (2.3) を見よ. その式をじっと眺めると, Korotkin による準置換モノドロミーを持つ Riemann-Hilbert 問題の解 (`math-ph/0306061` [4] (4.6)) と Krichever らが構成した拡張された Baker-Akhiezer 函数 (`hep-th/9704090` [5] (2.3)) は本質的に同じ函数であることがわかる. (ただし, そのことを確かめるためには, コンパクト Riemann 面の Jacobian 上の Riemann のテータ函数や prime form の理論に関する知識が必要である.)

さらに, 共形場理論の言葉を用いれば, Korotkin と Krichever らが構成したコンパクト Riemann 面上の複素数値多価函数 $y(z)$ (行列値函数ではない) は次のように共形場理論

の相関函数で書けることがわかる:

$$S(z) = \frac{\langle 0|\psi^*(w)\psi(z)v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)|Z\rangle}{\langle 0|v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)|Z\rangle}.$$

ここで, $\psi(z)$, $\psi^*(w)$ は charged Fermions であり, $|Z\rangle$ はコンパクト Riemann 面に付随する幾何的データに対応する状態ベクトルであり, 場 $v_a(t_a)$ は charged Fermions に対応する scalar Boson $\varphi(t)$ から構成される bosonic vertex operator である:

$$v_a(t_a) = :e^{\lambda_a \varphi(t_a)}:.$$

コンパクト Riemann 面が複素射影直線の分岐被覆になっていれば, そのコンパクト Riemann 面上の複素数値多価函数 $y(z)$ を複素射影直線の上に射影すればベクトル値多価函数が得られます. 局所的に基底を取れば行列値多価函数が得られ, それが実は Korotkin の解に一致している.

そして, 上の $S(z)$ の式の分母が τ 函数である:

$$\tau(t_1, \ldots, t_N) = \langle 0|v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)|Z\rangle.$$

t_a を動かす変形は Virasoro 代数の作用で定義されるものと一致している.

結論: 複素射影直線上の準置換モノドロミーを持つ Riemann-Hilbert 問題の解は複素射影直線の分岐被覆上の Abelian な共形場理論の相関函数で表わされる. □

ここで「Abelian」という用語を使用した理由は次の通り. charged Fermions $\psi(z)$, $\psi^*(w)$ に関する共形場理論は Boson-Fermion 対応

$$\psi(z) = :e^{\varphi(z)}:, \qquad \psi^*(w) = :e^{-\varphi(w)}: :$$

によって scalar Boson $\varphi(t)$ に付随する共形場理論 (すなわち Abelian な共形場理論) だとみなすことができる.

3　ジーナスが 0 で Abelian な場合

$|Z\rangle = |0\rangle$ のとき, 前節の $S(z)$ はジーナス 0 の場合における bosonic vertex operators の合成の相関函数の公式

$$\langle 0|:e^{\mu_1\varphi(z_1)}:\cdots:e^{\mu_M\varphi(z_M)}:|0\rangle = \prod_{1\le a<b\le M}(z_a - z_b)^{\mu_a\mu_b}$$

を用いて容易に計算できる. ただし, 左辺が消えないための必要十分条件は $\sum_{a=1}^M \mu_a = 0$ なのでその条件を仮定した. 同じ理由で以下 $\sum_{a=1}^N \lambda_a = 0$ と仮定する. このとき,

$$S(z) = \frac{\langle 0|\psi^*(w)\psi(z)v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)|0\rangle}{\langle 0|v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)|0\rangle}.$$

と置くと

$$(w-z)S(z) = \frac{(z-t_1)^{\lambda_1}\cdots(z-t_N)^{\lambda_N}}{(w-t_1)^{\lambda_1}\cdots(w-t_N)^{\lambda_N}}.$$

よって, $y(z) = (w-z)S(z)$ と置くと, $y(z)$ は以下の条件を満たしている:

(1) $y(z)$ は複素射影直線上で $t_1, \dots, t_N$ のみに特異点を持ち, 他では正則な複素数値多価函数である. しかも, 各 t_a では次のような展開を持つ:

$$y(z) = (t_a \text{ の近傍で正則な } \mathbb{C}^\times \text{ 値函数})(z - t_a)^{\lambda_a};$$

(2) $y(w) = 1$　(正規化の条件).

よって $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ に値を持つ Abelian なモノドロミーに関する Riemann-Hilbert 問題の解は複素射影直線上の共形場理論における Abelian な共形場理論の相関函数で書けることがわかった. □

4　共形場理論を用いたホロノミック量子場の再構成の可能性

ここまでたどり着けば次の疑問が自然に生じる.

問題 1: 実は Sato-Miwa-Jimbo の Holonomic quantum fields II [7] の内容は non-Abelian な共形場理論を用いて再構成できるのではないか? □

もしもこの問題が肯定的に解けたならば一般のコンパクト Riemann 面上のモノドロミー保存変形 (ただし確定特異点型の場合) の理論が共形場理論の言葉を用いて一挙に定式化されてしまうことになる. なぜならば, 共形場理論はもともと一般のコンパクト Riemann 面上の理論だからである.

Sato-Miwa-Jimbo [7] は確定特異点型接続のモノドロミー保存変形 (Schlesinger 方程式) のみを扱っている. Jimbo-Miwa-Ueno [3] は Schlesinger による確定特異点型接続のモノドロミー保存変形の理論を不確定特異点が存在する場合に拡張した. さらに, Miwa [6] は不確定特異点が存在する場合に Sato-Miwa-Jimbo [7] の理論を拡張した. もしも問題 1 が肯定的に解けたならばそれを不確定特異点を含む場合に一般化せよという問題が当然生じる. この問題を解くためには本質的に共形場理論の枠組みを拡張する必要があるものと思われる.

問題 2: 不確定特異点を持つ接続のモノドロミー保存変形の理論 ([3], [6]) では収束するとは限らない漸近展開を本質的に用いる. しかし, 筆者が知る限り, 漸近展開をも扱える共形場理論の枠組みはまだ存在しない. 共形場理論の枠組みを漸近展開をも扱えるように拡張することは興味深い問題である. 実用面でも応用上重要なモノドロミー保存変形の方程式の多くは不確定特異点を含む場合なのでこの問題は重要である. □

さらにジーナスが 0 の場合の理論がより詳しく理解できれば次の問題も解けてしまう可能性がある.

問題 3: 問題 1 が肯定的に解けたとする. 複素射影直線上の Riemann-Hilbert 問題の解を与える共形場理論の q 差分類似を構成せよ. Tsuchiya-Kanie [8] の vertex operator の理論および KZ 方程式の理論は I. Frenkel–Reshetikhin [1] によって q-vertex operator および q-KZ 方程式の理論に拡張されている. それと同様の拡張を問題 1 の解に対して実行せよ. □

5 問題1の肯定的な解のスケッチ

Abelian な共形場理論は本質的にコンパクト Riemann 面上の line bundle の理論であり, non-Abelian な共形場理論は vector bundle の理論である.

以下, rank n の vector bundle を扱うことにする.

Abelian な共形場理論は Boson-Fermion 対応が基本になっていた. その non-Abelian な拡張は charged Fermions もしくは対応する scalar Boson を n 組用意すれば構成可能である.

出発点になる基本的な場の operators は scalar Bosons $\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ である. Boson-Fermion 対応によって対応する charged Fermions は

$$\psi_i(z) = {:}e^{\varphi_i(z)}{:}, \qquad \psi_i^*(z) = {:}e^{-\varphi_i(z)}{:}$$

と構成される. (注意: $i \neq j$ のとき $\varphi_i(z)$ と $\varphi_j(w)$ が可換でなくなるように scalar Bosons の交換関係を定義しておかなければいけない. なぜならば可換にしてしまうと $\psi_i(z)$ と $\psi_j(w)$ が可換になってしまうからである. 欲しいのは反可換になるという結果なので, そうなるようにうまく $\varphi_i(z)$ たちの交換関係と normal ordered product の定義を決めておかなければいけない (cf. affine Lie algebra の I. Frenkel–Kac 表現).)

通常の charged Fermions の表現は真空 $|0\rangle$ から生成されるが, それを一般化して, $n \times n$ 行列 L_a に対応する次の性質を持つベクトル $|L_a\rangle$ から生成される表現 $\mathcal{F}_{L_a}$ を考える (正確な定義については第7節を見よ):

$$[\psi_1(z)|L_a\rangle, \dots, \psi_n(z)|L_a\rangle] = (\text{原点 } 0 \text{ で正則}) z^{L_a},$$
$$\begin{bmatrix} \psi_1^*(w)|L_a\rangle \\ \vdots \\ \psi_n^*(w)|L_a\rangle \end{bmatrix} = w^{-L_a} (\text{原点 } 0 \text{ で正則}).$$

このような表現 $\mathcal{F}_{L_a}$ のベクトル $|L_a\rangle$ を点 t_a に刺し込むことによって共形場理論を構成できたとしよう. 点 t_a に刺し込まれた $|L_a\rangle$ を

$$V_a(t_a) = (\text{点 } t_a \text{ に刺し込まれたベクトル } |L_a\rangle)$$

と表わすことにしよう.

以上の設定のもとで Fermions の積からなる $n \times n$ 行列

$$\Psi(w,z) = \begin{bmatrix} \psi_1^*(w)\psi_1(z) & \cdots & \psi_1^*(w)\psi_n(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n^*(w)\psi_1(z) & \cdots & \psi_n^*(w)\psi_n(z) \end{bmatrix}$$

は各点 t_a で z と w について次のような展開を持つ:

$$\Psi = (t_a \text{ で正則})(z - t_a)^{L_a} \qquad (z \text{ に関する } t_a \text{ での展開}),$$
$$\Psi = (w - t_a)^{-L_a}(t_a \text{ で正則}) \qquad (w \text{ に関する } t_a \text{ での展開}).$$

よって, 相関函数の行列

$$\langle \Psi(w,z) V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle = \left[\langle \psi_i^*(w)\psi_j(w) V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle \right]_{i,j=1}^n$$

は正規化の条件を除けば Riemann-Hilbert 問題の解を与えることになる. 正規化された解 $Y(z)$ は次で与えられる:

$$Y(z) = \frac{\langle \Psi(w,z) V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle}{\langle V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle} E(w,z)\, dw^{1/2} dz^{1/2}.$$

ここで, $E(w,z)$ はコンパクト Riemann 面上の prime form である.

右辺にある $dw^{1/2}dz^{1/2}$ の因子は $\psi_i^*(w)$, $\psi_i(z)$ が half-form の次元を持っているので座標不変性を保証するために必要になる. $E(w,z)$ は w, z 双方に関して dual half-form ($(-1/2)$-form) である. $E(w,z)$ の中の $dw^{-1/2}dz^{-1/2}$ と $Y(z)$ の定義式の右辺の $dw^{1/2}dz^{1/2}$ がキャンセルするので, $Y(z)$ は z (および w) について函数 (0-form) の次元を持つことなる.

$Y(z)$ の定義式の右辺の分母が τ 函数である:

$$\tau(t_1,\dots,t_N) = \langle V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle.$$

t_a を動かす変形は Virasoro 代数の作用を用いて構成されることになる.

以上の共形場の理論を用いた構成は Sato-Miwa-Jimbo の Holonomic quantum fields II [7] のそれとまったく異なる. しかし, ジーナス 0 の場合は

$$E(w,z)\, dw^{1/2} dz^{1/2} = w - z$$

であることに注意すれば, ジーナス 0 の場合に上の $Y(z)$ は Sato-Miwa-Jimbo がホロノミック場の理論を用いて構成した Riemann-Hilbert 問題の解と見かけ上同じ形をしているだけではなく, 実際に一致している.

ただし, 以上の説明でひどく曖昧な点が 2 つ残っている:

(1) ベクトル $|L_a\rangle$ もしくは表現 $\mathcal{F}_{L_a}$ の定義,
(2) 相関函数 $\langle \Psi(w,z) V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle$ の定義.

この 2 つの曖昧な点に関する説明を追加しよう.

6 相関函数の定義の仕方

相関函数の定義は Tsuchiya-Ueno-Yamada [9] の conformal block の表現論的な構成に関する理論の枠組みをそのまま借りてくれば良い. グローバルなベクトル値多価函数で各点 t_a で

$$\begin{gathered}(t_a\ \text{で高々極を持つ横ベクトル値函数})(z-t_a)^{L_a},\\ (z-t_a)^{-L_a}(t_a\ \text{で高々極を持つ縦ベクトル値函数})\end{gathered}$$

の形をしているもの全体の空間を考え, その元に対応する Fermion の作用で消えるという条件で conformal block を定義してやれば良いだろう. そのように定義された conformal blocks の空間の次元は 1 になるはずである. (ただし, L_a たちが基本群の関係式に対応する条件を満たしていなければいけない. 満たしていない場合は conformal blocks の空間の次元は 0 になる.)

7　表現空間の構成の仕方

表現 $\mathcal{F}_{L_a}$ の構成は以下の通りである.

簡単のため $L := L_a$ は対角化可能であると仮定し, 適当に ψ_i, ψ_j^* を一次変換して, 最初から $L = L_a$ は対角行列 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に等しいと仮定する. (注意: 各 L_a ごとに L_a を対角化する一次変換が異なるという状況が一般的である. そのせいで Abelian な共形場理論と non-Abelian な共形場理論のあいだに本質的な違いが生じる.)

すると $\psi_i(z)$, $\psi_j^*(w)$ のベクトル $|L\rangle$ への作用が満たすべき条件は次のように書き変えられる:

$$\psi_i(z)|L\rangle = z^{\lambda_i}(\text{原点 } 0 \text{ で正則})|L\rangle,$$
$$\psi_j^*(w)|L\rangle = w^{-\lambda_j}(\text{原点 } 0 \text{ で正則})|L\rangle.$$

よって, $\psi_i(z)$ と $\psi_j^*(w)$ は次のように展開可能であると仮定するのが自然である:

$$\psi_i(z) = \sum z^{-m-1/2}\psi_i[m] \qquad (m \text{ は } -\lambda_i + 1/2 + \mathbb{Z} \text{ を走る}),$$
$$\psi_j^*(w) = \sum w^{-n-1/2}\psi_j^*[n] \qquad (n \text{ は } \lambda_j + 1/2 + \mathbb{Z} \text{ を走る}).$$

Boson-Fermion 対応の式を用いて計算すると, $\psi_i[m]$, $\psi_j^*[n]$ は次の反交換関係を満たしていることがわかる:

$$[\psi_i[m], \psi_j^*[n]] = \delta_{i,j}\delta_{m+n,0}.$$

そして, 上の条件から, これらの $|L\rangle$ への作用は次を満たしていなければいけないこともわかる:

$$\psi_i[m]|L\rangle = 0 \qquad \text{if } m \in -\lambda_i + (1/2 + \mathbb{Z})_{>0},$$
$$\psi_j^*[n]|L\rangle = 0 \qquad \text{if } n \in \lambda_j + (1/2 + \mathbb{Z})_{>0}.$$

このような性質を持つ $|L\rangle$ から生成される $\psi_i[m]$, $\psi_j^*[n]$ で生成される Clifford 代数の表現は同型を除いて一意に定まる. その表現を $\mathcal{F}_L = \mathcal{F}_{L_a}$ とすれば良い.

以上の構成を $n = 1$ の Abelian な場合になぞれば, Korotkin による準置換モノドロミーの場合の Riemann-Hilber 問題の解 (もしくは同じことだが Krichever たちによって構成された拡張された Baker-Akhiezer 函数) を与える Abelian な共形場理論が再構成されます.

8　Fermion の作用による Schlesinger 変換の実現

前節の L_a を対角化する座標における ψ_i, ψ_j^* を $\psi_{a,i}$, $\psi_{a,j}^*$ と書くことにし, L_a の対角化を $\mathrm{diag}(\lambda_{a,1}, \dots, \lambda_{a,n})$ と書くことにする.

Schlesinger 変換は表現空間 $\mathcal{F}_{L_a}$ への Fermion の作用で実現することができる.

たとえば, $a \neq b$ のとき L_a の対角化の第 i 番目の固有値を 1 増やし, L_b の対角化の第 j 番目の固有値を 1 減らす Schlesinger 変換は点 t_a, t_b に刺し込むベクトルをそれぞれ次のように変換することに対応している:

$$|L_a\rangle \mapsto |\tilde{L}_a\rangle = \psi_{a,i}[-\lambda_{a,i} - \tfrac{1}{2}]|L_a\rangle = \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{2\pi\imath} z^{-\lambda_{a,i}-1}\psi_{a,i}(z)|L_a\rangle,$$
$$|L_b\rangle \mapsto |\tilde{L}_b\rangle = \psi_{b,j}^*[\lambda_{b,j} - \tfrac{1}{2}]|L_b\rangle = \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{dw}{2\pi\imath} w^{\lambda_{b,j}-1}\psi_{b,j}(w)|L_b\rangle.$$

実際, $|\tilde{L}_a\rangle$, $|\tilde{L}_b\rangle$ は次を満たしていることがすぐにわかる:

$$\psi_{a,i}(z)|\tilde{L}_a\rangle = z^{\lambda_{a,i}+1}(\text{原点 } 0 \text{ で正則})|\tilde{L}_a\rangle,$$
$$\psi_{b,j}(z)|\tilde{L}_b\rangle = z^{\lambda_{b,j}-1}(\text{原点 } 0 \text{ で正則})|\tilde{L}_b\rangle.$$

τ 函数のレベルでの変換は次のように書ける:

$$\begin{aligned}
&\tau = \langle V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle \\
&\mapsto \tilde{\tau} = \oint_{|z_a-t_a|=\varepsilon} \frac{dz_a}{2\pi\imath} \oint_{|w_b-t_b|=\varepsilon} \frac{dw_b}{2\pi\imath}\, z^{-\lambda_{a,i}-1} w^{\lambda_{b,j}-1} \langle \psi^*_{b,j}(w_b)\psi_{a,i}(z_a) V_1(t_1)\cdots V_N(t_N)\rangle.
\end{aligned}$$

よって, τ-quotient $\tilde{\tau}/\tau$ は Riemann-Hilbert 問題の解 Y の行列要素の展開係数で表わされる.

参考文献

[1] Frenkel, I. B. and Reshetikhin, N. Yu.: Quantum affine algebras and holonomic difference equations, Comm. Math. Phys. 146 (1992), no. 1, 1–60.

[2] 神保道夫: ホロノミック量子場, 岩波講座現代数学の展開 4, 岩波書店, 1998.

[3] Jimbo, M., Miwa, T., and Ueno, K.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I, General theory and τ-function, Phys. D 2 (1981), no. 2, 306–352.

[4] Korotkin, D.: Solution of matrix Riemann-Hilbert problems with quasi-permutation monodromy matrices, preprint 2003, `math-ph/0306061`.

[5] Krichever, I., Wiegmann, P., and Zabrodin, A.: Elliptic solutions to difference non-linear equations and related many-body problems, Commun. Math. Phys. 193 (1998), 373–396, `hep-th/9704090`.

[6] Miwa, Tetsuji: Clifford operators and Riemann's monodromy problem, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 17 (1981), no. 2, 665–686.

[7] Sato, Mikio, Miwa, Tetsuji, and Jimbo, Michio: Holonomic quantum fields II, The Riemann-Hilbert problem, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 15 (1979), no. 1, 201–278.

[8] Tsuchiya, Akihiro and Kanie, Yukihiro: Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid group. Conformal field theory and solvable lattice models (Kyoto, 1986), 297–372, Adv. Stud. Pure Math., 16, Academic Press, Boston, MA, 1988;
Errata: Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, 675–682, Adv. Stud. Pure Math., 19, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[9] Tsuchiya, Akihiro, Ueno, Kenji, and Yamada, Yasuhiko: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, 459–566, Adv. Stud. Pure Math., 19, Academic Press, Boston, MA, 1989.