非整数ベキを含む代数とWeyl群作用の構成

黒木玄

2012年4月14日更新　(2012年4月13日作成)

目 次

1 一般論

可換とは限らない体を斜体と呼び, 可換体を単に体と呼ぶ. 体上の結合的で 1 を持つ代数を単に代数と呼ぶことにし, 体 K 上の代数は K をその中心に含むものとする.

A と B は $\mathbb{F}$ 上の代数であるとする.

各 $i \in I$ に対して f_i は B の可逆元であるとする.

自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $L = \bigoplus_{k=1}^N \mathbb{Z}e_k$ の双対を $P = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ と書き, L と P の自然な内積を $\langle\,,\,\rangle$ と表わす. $P_+ = \{\, \lambda \in P \mid \langle e_k, \lambda\rangle \geqq 0\,(k = 1, 2, \dots, N)\,\}$ とおく.

A と f_i の非整数べき "f_i^β" ($i \in I$, $\beta \in L$) で生成される代数を構成したい.

各 $\lambda \in P_+$ に対して $\phi_\lambda : A \to B$ は代数準同型であるとし, 代数準同型 $\phi : A \to B^{P_+}$ を $\phi(a) = (\phi_\lambda(a))_{\lambda\in P_+}$ ($a \in A$) と定める. この ϕ は単射であると仮定し, この ϕ によって $A \subset B^{P_+}$ とみなす.

B^{P_+} の元 f_i^β を $f_i^\beta = (f_i^{\langle\beta,\lambda\rangle})_{\lambda\in P_+}$ と定める.

A と $\{\, f_i^\beta \mid i \in I, \beta \in L\,\}$ で生成される B^{P_+} の部分代数を

$$\mathcal{A} = A[\, f_i^\beta \mid i \in I, \beta \in L\,]$$

と表わすことにする. $\mathcal{A}$ の中で $f_i^\beta f_i^\gamma = f_i^{\beta+\gamma}$ ($\beta, \gamma \in L$) が成立している.

A は自然に $\mathcal{A}$ の部分代数とみなされる. $\lambda \in P_+$ に対して代数準同型 $\phi_\lambda : A \to B$ を $\phi_\lambda(f_i^\beta) = f_i^{\langle\beta,\lambda\rangle}$ ($i \in I$, $\beta \in L$) によって代数準同型 $\phi_\lambda : \mathcal{A} \to B$ に拡張できる. $a, a' \in \mathcal{A}$ に対して $a = a'$ となるための必要十分条件はすべての $\lambda \in P_+$ に対して $\phi_\lambda(a) = \phi_\lambda(a')$ が成立することである.

2 対称化 GCM に付随する設定

$[a_{ij}]_{i,j\in I}$ は正の整数たち d_i $(i\in I)$ によって対称化可能な GCM であるとする.

U は GCM $[a_{ij}]_{i,j\in I}$ に対応する $U_q(\mathfrak{n}_-)$ であるとする. すなわち U は f_i $(i\in I)$ で生成され, q-Serre 関係式を基本関係式とする $\mathbb{C}(q)$ 上の代数であるとする.

$W=\langle\, s_i \mid i\in I\,\rangle$ は GCM $[a_{ij}]_{i,j\in I}$ に対応する Weyl 群であるとする.

記号 $\alpha_i^\vee$ $(i\in I)$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を $Q^\vee$ と書き, coroot lattice と呼ぶ. $Q^\vee$ の双対を $P=\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^\vee,\mathbb{Z})$ 書き, weight lattice と呼ぶ. $Q^\vee$ と P の自然な内積を $\langle\,,\,\rangle$ と書く. $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$ の双対基底を $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ と書き, $\alpha_j=\sum_{i\in I}a_{ij}\Lambda_i$ とおく. このとき $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=a_{ij}$ が成立している. $P_+=\{\,\lambda\in P\mid\langle e_k,\lambda\rangle\geqq 0\,(k=1,2,\dots,N)\,\}$ とおき, P_+ の元を dominant integral weight と呼ぶ.

$Q^\vee$ と P には自然に Weyl 群が作用している:

$$s_i(\alpha_j^\vee)=\alpha_i^\vee-a_{ji}\alpha_j^\vee,\quad s_i(\Lambda_j)=\Lambda_j-\delta_{ij}\alpha_i=\begin{cases}-\Lambda_i+\sum_{k\neq i}(-a_{ki})\Lambda_k & (i=j),\\ \Lambda_j & (i\neq j).\end{cases}$$

この作用は内積 $\langle\,,\,\rangle$ を保つ.

3 Ore 整域とは限らない場合

この節では第 2 節の設定を仮定し, $L=Q^\vee$ とおく.

f_i たちが q-Serre 関係式を満たしていることより, $\{f_i\}_{i\in I}$ で生成される積閉集合は U において Ore 集合になる. その積閉集合による U の局所化を B と書く: $B=U[f_i^{-1}|i\in I]$

B 上の Laurent 多項式環 $A=B[q^\beta|\beta\in Q^\vee]$ を考える.

$\lambda\in P_+$ に対して代数準同型 $\phi_\lambda:A\to B$ を $\phi_\lambda(b)=b$ $(b\in B)$, $\phi_\lambda(q^\beta)=q^{\langle\beta,\lambda\rangle}$ $(\lambda\in P_+)$ と定める.

代数準同型 $\phi:A\to B^{P_+}$ を $\phi(a)=(\phi_\lambda(a))_{\lambda\in P_+}$ と定めると単射になる.

以上の設定に第 1 節の構成を適用することによって $A=U[f_i^{-1}|i\in I][q^\beta|\beta\in Q^\vee]$ と $\{\,f_i^\beta\mid i\in I,\beta\in Q^\vee\,\}$ で生成される代数 $\mathcal{A}$ が得られる.

$\mathcal{A}$ には次のようにして Weyl 群作用 $W\ni w\mapsto\widetilde{w}\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ が定まる:

$$\widetilde{w}(b)=b,\quad\widetilde{w}(q^\beta)=q^{w(\beta)},\quad\widetilde{w}(f_i^\beta)=f_i^{w(\beta)}\quad(b\in B,i\in I,\beta\in Q^\vee).$$

q-Serre 関係式より Verma 関係式が導かれるので,

$$s_i(x)=f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(x)f_i^{-\alpha_i^\vee}\quad(x\in\mathcal{A})$$

によって $\mathcal{A}$ への Weyl 群の作用が得られる.

4 Ore 整域の場合 (もしくは斜体に含まれる場合)

この節でも第 2 節の設定を仮定し, $L=Q^\vee$ とおく.

V は U の商整域であるとし, 任意の $i\in I$ に対して f_i の V の像 (同じ記号で表わす) は 0 でないと仮定する. K は V を含む斜体であり, V の元で斜体として生成されると仮

定する．もしも V が U の商 Ore 整域ならば K として V の分数斜体を取れる．GCM が有限型またはアフィン型ならば U およびその商整域はすべて Ore 整域になる．

$B = K$ とおき, K 上の多項式環 $\widetilde{A} = K[q^{\alpha_i^\vee} | i \in I]$ を考える．$\widetilde{A}$ は Ore 整域なのでその分数斜体 $\widetilde{K}$ が存在する．

$\lambda \in P_+$ に対して代数準同型 $\phi_\lambda : \widetilde{A} \to K$ を $\phi_\lambda(k) = k$ $(k \in K)$, $\phi_\lambda(q^{\alpha_i^\vee}) = q^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle}$ $(i \in I)$ と定める．$\widetilde{A}$ の積閉集合 $\widetilde{S}_\lambda$ を $\widetilde{S}_\lambda = \{\, a \in \widetilde{A} \mid \phi_\lambda(a) \neq 0 \,\}$ と定める．このとき $\widetilde{S}_\lambda$ は $\widetilde{A}$ の Ore 集合になることを示せる (要証明)．よって $\widetilde{S}_\lambda$ による $\widetilde{A}$ の局所化 $\widetilde{A}_\lambda$ が得られる．代数準同型 ϕ_λ は $\widetilde{A}_\lambda$ 上に自然に拡張される．

$\widetilde{A}_\lambda$ は $\widetilde{K}$ の部分代数とみなせる．$\widetilde{K}$ の部分代数 A を $\widetilde{A}_\lambda$ $(\lambda \in P_+)$ の共通部分と定める．代数準同型 $\phi_\lambda : \widetilde{A}_\lambda \to K$ の A 上への制限も同じ記号で表わす．

代数準同型 $\phi : A \to K^{P_+}$ を $\phi(a) = (\phi_\lambda(a))_{\lambda \in P_+}$ と定めると単射になる．

以上の設定に第 1 節の構成を適用することによって A と $\{\, f_i^\beta \mid i \in I, \beta \in Q^\vee \,\}$ で生成される代数 $\mathcal{A}$ が得られる．

さらに第 3 節とまったく同様にして $\mathcal{A}$ に Weyl 群作用が定まる．

q-Serre 関係式より, 任意の $\beta \in Q^\vee$ に対して $f_i^\beta f_j f_i^{-\beta} \in \mathcal{A}$ となることを示せる．実際には $f_i^\beta f_j f_i^{-\beta} \in \langle f_j, f_i^{\pm 1}, q^{\pm d_i} \rangle_{\mathbb{C}\text{-alg}}$ となることを示せる．ゆえに $\mathcal{A}$ への Weyl 群作用は A を保つ．これによって A に Weyl 群作用が定まる．