離散古典可積分系 Part 1

factorization dynamics とその補間

黒木 玄

2001 年 12 月 3 日*

目 次


```
Date: Mon, 3 Dec 2001 05:20:56 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200112022020.FAA04119@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: 離散古典可積分系 Part 1
```

実は風邪でダウンしつつあります.
このノートは次の論文の第 7 節に書いてある簡単な話のノートです.

> Tim Hoffmann, Johannes Kellendonk, Nadja Kutz, and Nicolai Reshetikhin: Factorization dynamics and Coxeter-Toda lattices, `solv-int/9906013`
>
> It is shown that the factorization relation on simple Lie groups with standard Poisson Lie structure restricted to Coxeter symplectic leaves gives an integrable dynamical system. This system can be regarded as a discretization of the Toda flow. In case of SL_n the integrals of the factorization dynamics are integrals of the relativistic Toda system. A substantial part of the paper is devoted to the study of symplectic leaves in simple complex Lie groups, its Borel subgroups and their doubles.

* これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Discretization-1.tex の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 22 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 12 月 3 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

1　factorization dynamics の定義

G は Lie 群であり, G の単位元のある近傍に含まれる元の "上三角" と "下三角" への一意的な分解が定められていると仮定する. すなわち, G の単位元のある近傍に含まれる元 x に対して, その "上三角成分" x_+ と "下三角成分" x_- が一意に定まり,

$$x = x_-^{-1} x_+$$

が成立していると仮定する.

注意 1.1 有限次元複素簡約 Lie 群 ($GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, etc.) の Gauss 分解のような具体例においては, x に x_+, x_- を対応させる写像は rational map になる. □

対応する Lie 環レベルでの分解を

$$X = -X_- + X_+$$

と書くことにする.

例 1.2 $\mathfrak{g}$ が有限次元複素単純 Lie 環であり, その標準的な三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

が与えられており, この分解に関する n_-, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_+$ への射影をそれぞれ p_-, p_0, p_+ と書くとき, $X \in \mathfrak{g}$ の分解の例として以下のようなものを考える:

(1)　$X_+ = p_0(X) + p_+(X), \quad X_- = -p_-(X).$
(2)　$X_+ = \frac{1}{2} p_0(X) + p_+(X), \quad X_- = -p_-(X) - \frac{1}{2} p_0(X).$

量子群の極限として得られる標準的な古典 r 行列に対応する分解は (2) の方である. どちらも, 対応する分解を群のレベルで考えることができる. ただし, 後者の標準的な古典 r 行列に対応する群レベルの分解を考えるときには G の Cartan 部分群の元の平方根の多価性に注意しなければいけない. □

G 上の discrete flow $x(t) \mapsto x(t+1)$ を次のように定める:

$$x(t+1) = x(t)_+ x(t)_-^{-1} \qquad \bigl(x(t) = x(t)_-^{-1} x(t)_+\bigr).$$

すなわち, $x(t)$ の "上三角" と "下三角" への分解の積の順序を逆転させたものを $x(t+1)$ と定める. この discrete flow を `solv-int/9906013` では factorization dynamics と呼んでいる.

2　factorization dynamics と Lax 方程式の類似

Lax 方程式とは Lie 環における次の形の微分方程式のことである:

$$\frac{dL(t)}{dt} = [M(t), L(t)] = \mathrm{ad}\bigl(M(t)\bigr) L(t).$$

多くの場合において, $M(t)$ は $L(t)^n$ の "上三角" もしくは "下三角" 成分として与えられる:

$$M(t) = \bigl[L(t)^n\bigr]_\pm.$$

実は factorization dynamics は $M(t) = L(t)_\pm$ の場合の Lax 方程式の離散類似になっている. 以下そのことを説明しよう.

factorization dynamics の定義式の右辺に右から $x(t)_+ x(t)_+^{-1}$ をかけると,

$$x(t+1) = x(t)_+ x(t)_-^{-1} x(t)_+ x(t)_+^{-1} = x(t)_+ x(t) x(t)_+^{-1}.$$

同様に, 左から $x(t)_- x(t)_-^{-1}$ をかけると,

$$x(t+1) = x(t)_- x(t)_-^{-1} x(t)_+ x(t)_-^{-1} = x(t)_- x(t) x(t)_-^{-1}.$$

よって, factorization dynamics を次のように表わすことができる:

$$x(t+1) = \mathrm{Ad}\bigl(x(t)_\pm\bigr) x(t). \tag{$*$}$$

$M(t) = L(t)_\pm$ のとき Lax 方程式は次のように書かれる:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \mathrm{ad}\bigl(L(t)_\pm\bigr) L(t) \tag{$**$}$$

よって, factorization dynamics $(*)$ は $(**)$ の形の Lax 方程式の離散類似であることがわかる.

戸田格子は $(**)$ の形の Lax 方程式で書ける典型的な古典可積分系である. そして, factorization dynamics は戸田格子の離散類似を含んでいる.

時間発展で保存される x もしくは L の函数を保存量と呼ぶ. $(*)$ と $(**)$ から,

$$F(gxg^{-1}) = F(x) \quad \text{もしくは} \quad F(gLg^{-1}) = F(L)$$

を満たす函数 F は factorization dynamics もしくは Lax 方程式の保存量であることがわかる. すなわち, factorization dynamics も Lax 方程式もスペクトル保存変形になっている. (次の節も参照せよ.)

戸田格子のような標準的な例においては, Lie 環 $\mathfrak{g}$ に適切な Poisson 構造を入れて, Lax 方程式を Hamilton 方程式で表わすことができ, Hamiltonian は

$$H(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(L^2)$$

の形で与えられる. factorization dynamics のような離散系の Hamiltonian は離散的な時間発展を連続的に補間する古典力学系の Hamiltonian として定義すれば良いだろう. 補間については第 4 節を参照せよ.

3 factorization dynamics の解の構成

定理 3.1 定理3.1: 次の $x(t)$ は初期値 $x(0)$ の factorization dynamics の解である:

$$x(n) = \mathrm{Ad}\left([x(0)^n]_\pm\right)x(0).$$

証明. $x(0) = x(0)_-^{-1}x_+(0)$, $x(1) = x_+(0)x(0)_-^{-1}$ より,

$$\begin{aligned} x(0)^n &= (x(0)_-^{-1}x(0)_+)^n \\ &= x(0)_-^{-1}(x(0)_+x(0)_-^{-1})^{n-1}x(0)_+ \\ &= x(0)_-^{-1}x(1)^{n-1}x(0)_+. \end{aligned}$$

一般に, $x(t)^n = x(t)_-^{-1}x(t+1)^{n-1}x_+(t)$ であるから,

$$\begin{aligned} x(0)^n &= x(0)_-^{-1}x(1)^{n-1}x(0)_+ \\ &= (x(1)_-x(0)_-)^{-1}x(1)^{n-2}(x(1)_+x(0)_+) \\ &= \cdots \\ &= (x(n-1)_-\cdots x(1)_-x(0)_-)^{-1}(x(n-1)_+\cdots x(1)_+x(0)_+). \end{aligned}$$

よって,

$$[x(0)^n]_\pm = x(n-1)_\pm\cdots x(1)_\pm x(0)_\pm.$$

一方, 前節の $(*)$ より,

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathrm{Ad}(x(n-1)_\pm)x(n-1) \\ &= \mathrm{Ad}(x(n-1)_\pm)\,\mathrm{Ad}(x(n-2)_\pm)x(n-2) \\ &= \cdots \\ &= \mathrm{Ad}(x(n-1)_\pm)\,\mathrm{Ad}(x(n-2)_\pm)\cdots\mathrm{Ad}(x(0)_\pm)x(0). \end{aligned}$$

よって,

$$x(n) = \mathrm{Ad}\left(x(n-1)_\pm\cdots x(1)_\pm x(0)_\pm\right)x(0) = \mathrm{Ad}\left([x(0)^n]_\pm\right)x(0). \quad \square$$

上の定理は実は次の Lax 方程式に関する定理の離散類似である.

定理 3.2 $M(t) = [L(t)^n]_\pm$ に関する Lax 方程式

$$\frac{dL(t)}{dt} = [M(t), L(t)]$$

を考える. 次の $L(t)$ は初期値 $L(0)$ の Lax 方程式の解である:

$$L(t) = \mathrm{Ad}\left([\exp(tL(0)^n)]_\pm\right)L(0).$$

証明. $x = x(t) = \exp(tL(0)^n)$ と書き, $x = x_-^{-1}x_+$ の両辺を t で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= L(0)^n x = L(0)^n x_-^{-1}x_+,\\ \frac{dx}{dt} &= -x_-^{-1}\frac{dx_-}{dt}x_-^{-1}x_+ + x_-^{-1}\frac{dx_+}{dt}.\end{aligned}$$

よって,

$$x_- L(0)^n x_-^{-1} = -\frac{dx_-}{dt}x_-^{-1} + \frac{dx_+}{dt}x_+^{-1}.$$

したがって,

$$\frac{dx_\pm}{dt}x_\pm^{-1} = [x_- L(0)^n x_-^{-1}]_\pm = [(x_- L(0) x_-^{-1})^n]_\pm = [L(t)^n]_\pm = M(t).$$

よって, $L(t) = \mathrm{Ad}\bigl(x(t)_\pm\bigr)L(0)$ の両辺を t で微分すると,

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dx_\pm}{dt}x_\pm^{-1},\ L(t)\right] = [M(t), L(t)]. \quad \square$$

注意 3.3 一般に $L(t) = \mathrm{Ad}\bigl(g(t)\bigr)L(0) = g(t)L(0)g(t)^{-1}$ の両辺を t で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} &= \frac{dg}{dt}L(0)g^{-1} - gL(0)g^{-1}\frac{dg}{dt}g^{-1} = \frac{dg}{dt}g^{-1}gL(0)g^{-1} - gL(0)g^{-1}\frac{dg}{dt}g^{-1}\\ &= \frac{dg}{dt}g^{-1}L(t) - L(t)\frac{dg}{dt}g^{-1} = \left[\frac{dg}{dt}g^{-1},\ L(t)\right]. \quad \square\end{aligned}$$

注意 3.4 定理 3.1 を定理 3.2 と同様の方法で証明することもできる. そのような証明を実際に書き下せば類似がさらに見易くなる. $\square$

4 factorization dynamics の補間

単位元のある近傍に含まれる $x \in G$ に関する G の Lie 環に値を持つ函数 $F(x)$ で次を満たすものが存在すると仮定する:

$$[F(x), x] = 0. \tag{1}$$

$$gF(x)g^{-1} = F(gxg^{-1}). \tag{2}$$

$M(x) = F(x)_\pm$ と置き, 次の Lax 方程式を考える:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [M(x(t)), x(t)]. \tag{***}$$

前節の定理 3.2 の証明と同様にして, 次の $x(t)$ はこの Lax 方程式の初期値 $x(0)$ の解であることを示せる:

$$x(t) = \mathrm{Ad}\bigl([\exp(tF(x(0)))]_\pm\bigr)x(0).$$

ところが, 定理 3.1 より,

$$x(n) = \mathrm{Ad}\left([x(0)^n]_\pm\right)x(0)$$

は factorization dynamics の解である. よって, もしも x の函数 $F(x)$ が

$$\exp(F(x)) = x \qquad (\text{i.e. } F(x) = \log x)$$

を満たしているならば, 上の $x(t)$ は factorization dynamics の解 $x(n)$ の補間になっている.

注意 4.1 典型的な例においては, 群 G に Poisson Lie 群の構造が入り, $(***)$ の形の Lax 方程式が G 上の Ad-invariant function を Hamiltonian とする Hamilton 方程式として得られる. □

注意 4.2 factorization dynamics を補間する $M(x) = [\log x]_\pm$ に関する Lax 方程式は

$$H(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\left((\log x)^2\right)$$

の形の Hamiltonian から得られる. 注意しなければいけないことは $H(x)$ は x の多価函数であるということである. この Hamiltonian を $x = e^L$ と置いて, Lie 環上に線形化すると, 次の Hamiltonian が得られる:

$$H(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(L^2).$$

戸田格子の Hamiltonian はこの形になっているのであった[1]. □

[1]追記 2002 年 1 月 22 日: この注意 4.2 の内容はいいかげんっぽい.