

# Painlevé系 の $\tau$ 関数の正準量子化について

黒木 玄 (Gen Kuroki)

2015年9月14日 Version 1.4

この文書の最新版は次の場所からダウンロードできる.

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20150731QuantizationOfPainleveTau.pdf>

さらに講演スライドのPDF ファイルを次の場所からダウンロードできる.

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20150914QuantumPainleveTau.pdf>

Painlevé 系の量子化に関する関連の文書を以下の場所からダウンロードできる.

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/>

## 目 次

1. Painlevé系の量子化 ( $qP_{IV}$ を例に用いた解説)	1
1.1. $q$ -Painlevé IV 方程式の対称形式 $qP_{IV}$ . . . . .	1
1.2. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性 . . . . .	3
1.3. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の Lax 表示 . . . . .	4
1.4. 量子展開環の Chevalley 生成元の像のべき $f_i^\gamma$ の作用 . . . . .	5
1.5. 不変部分代数への制限 . . . . .	8
1.6. 変数 $x_i, y_i$ の量子化 . . . . .	10
1.7. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化 . . . . .	11
1.8. $qP_{IV}$ の量子化 . . . . .	13
1.9. まとめ . . . . .	14
2. $\tau$ 関数の量子化	15
2.1. 量子 $\tau$ 変数の導入 . . . . .	15
2.2. 量子 $\tau$ 変数への Weyl 群作用 . . . . .	17
2.3. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (1) . . . . .	18
2.4. 基本 $\tau$ 変数への Weyl 群作用の結果の正則性 . . . . .	20
2.5. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (2) . . . . .	21
2.6. まとめ . . . . .	23
3. 付録: 「量子化」と「変数べき $f^\gamma$ の構成法」について	24
3.1. $q$ 差分化と量子化の区別 . . . . .	24
3.2. 古典極限と Poisson 構造 . . . . .	24
3.3. 非可換環の元の変数によるべきを導入する方法 . . . . .	25
3.4. Chevalley 生成元のべきが満たす関係式 . . . . .	26

## 1. Painlevé系の量子化 ( $qP_{IV}$ を例に用いた解説)

まず, Painlevé系の量子化について説明しよう<sup>1</sup>.

多くの議論が対称化可能一般 Cartan 行列に付随する一般的な場合に拡張可能だが, 表現論の言葉に不慣れな読者のために,  $q$  差分版の Painlevé IV 型方程式の対称形式  $qP_{IV}$

<sup>1</sup>実は2次元量子共形場理論の holomorphic part に関する理論 (conformal blocks に関する理論) は量子 Painlevé 系の理論そのものとみなせるのだが, この論説では扱わない. たとえば, 共形場理論が生まれた論文 [1] で扱われている Virasoro 代数のみを対称性を持つ共形場理論で退化場  $\varphi_{12}(z), \varphi_{21}(z)$  を考えた場合はちょうど単独 2 階の線形常微分作用素のモノドロミー保存変形の理論 (Garnier 系) の量子化になっている. この場合に限らず, 一般に Virasoro 代数は点付きコンパクト Riemann 面の変形を記述している. その点の位置がちょうど特異点の場所に対応している.

を例に説明して行く．この場合にはほとんどの結果を工夫のない直接的な計算で確認できる．

目標は量子化された Painlevé 系を表現論の言葉でうまく定式化し、量子 Painlevé 系の基礎になる代数構造の由来を Kac-Moody 代数や量子群の言葉を用いて説明することである． $qP_{IV}$  の場合には表現論に関係する部分が  $3 \times 3$  行列を用いた巧妙な計算に置き換わることになる．量子群の  $L$ -operators による記述に慣れている読者であればこの場合を見ればより一般の場合にどのようにすればよいかも理解できるはずである．

「 $q$  差分化」と「量子化」の区別については第 3.1 節を、古典極限については第 3.2 節に簡単な解説を書きおいた．以下では「量子化」を「正準量子化」の意味で用いる．

### 1.1. $q$ -Painlevé IV 方程式の対称形式 $qP_{IV}$

$q$  差分版の Painlevé IV 方程式の対称形式  $qP_{IV}$  に関する詳しい記述については文献 [8], [18] を参照せよ．さらに  $qP_{IV}$  の  $A_2^{(1)}$  型のアフィン Weyl 群対称性の量子化とその一般化については文献 [6] を見よ．(量子化に関する文献を見れば古典極限によって Poisson 構造の情報も得られる．) この節の内容はそれらの文献からの引き写しである．

まず、 $A_2^{(1)}$  型の一般 Cartan 行列 (GCM)  $[a_{ij}]_{i,j=0}^2$  と反対称行列  $[b_{ij}]_{i,j=0}^2$  を次のように定める<sup>2</sup>:

$$[a_{ij}]_{i,j=0}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [b_{ij}]_{i,j=0}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

さらに、 $\mathbb{C}(q)$  上  $a_i, F_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) から生成される有理関数環を考え、そこに Poisson 構造を次のように入れる:

$$\{F_i, F_j\} = b_{ij}F_iF_j, \quad \{a_i, a_j\} = \{a_i, F_j\} = 0.$$

周期性  $a_{i+3} = a_i, F_{i+3} = F_i$  によってインデックスを整数全体に拡張しておく． $F_i$  を従属変数と呼び、 $a_i$  をパラメーター変数と呼ぶことにする<sup>3</sup>．

$q$  差分版の Painlevé IV 方程式の対称形式  $qP_{IV}$  とは次のように定義される離散時間発展  $T_{qP_{IV}}$  のことである ([8], [18]):

$$T_{qP_{IV}}(F_i) = a_i a_{i+1} F_{i+1} \frac{1 + a_{i-1} F_{i-1} + a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i}{1 + a_i F_i + a_i a_{i+1} F_i F_{i+1}}, \quad T_{qP_{IV}}(a_i) = a_i.$$

この離散時間発展は Poisson 構造を保つ．

$A_2^{(1)}$  型の拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$  が次の関係式で定義される:

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad \pi s_i = s_{i+1} \pi.$$

ただしインデックスを周期性  $s_{i+3} = s_i$  によって整数全体に拡張しておいた．

拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$  の作用を次のように定める:

$$s_i(a_j) = a_i^{-a_{ij}} a_j, \quad s_i(F_j) = F_j \left( \frac{a_i + F_i}{1 + a_i F_i} \right)^{b_{ij}}, \quad \pi(a_i) = a_{i+1}, \quad \pi(F_i) = F_{i+1}.$$

<sup>2</sup> 反対称行列  $[b_{ij}]$  はクラスター代数の記述に用いられる反対称行列と同じものである．

<sup>3</sup> 古典の場合にはパラメーター変数は数に特殊化されることが多い．しかし、量子化された場合には量子化された  $\tau$  変数と量子化されたパラメーター変数が非可換なので、 $\tau$  変数を除外せずにパラメーター変数を数に特殊化することができなくなる．

この作用は Poisson 構造を保ち、離散時間発展  $T_{q\text{PIV}}$  と可換であり、 $q$  差分版の Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) になっている。

実は以上の構造の背景には量子群が隠れている。以下の節ではそのことを説明したい。

結論を先走って言うと、 $q$  差分版の Painlevé 方程式の従属変数  $F_i$  は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元  $\varphi_i$  の化身になっている<sup>4</sup>。

ただし、 $F_i$  が量子展開環のした三角部分の Chevalley 生成元  $\varphi_i$  の像に直接なっているのではなく、 $\varphi_i$  の余積を  $\Delta(\varphi_i) = \varphi_{i1} + \varphi_{i2}$ ,  $\varphi_{i1} = \varphi_i \otimes k_i$ ,  $\varphi_{i2} = 1 \otimes \varphi_i$  と書くとき、 $a_i F_i$  が  $\varphi_{i1}\varphi_{i2}^{-1}$  の像になっているという若干複雑な事情になっている。そして  $s_i$  の作用は  $\Delta(\varphi_i)$  の像  $f_i$  のべき  $f_i^\gamma$  の作用を用いて構成される。詳しくは [15] を参照して欲しい<sup>5</sup>。

## 1.2. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ 対称性

この節の内容は文献 [9], [10], [20] の構成を  $(m, n) = (3, 2)$  の場合に特殊化したものになっている。互いに素な任意の  $(m, n)$  の場合の量子化については [13], [14] を見よ。

準周期性  $t_{i+3} = r^{-1}t_i$ ,  $x_{i+3} = r^{-1}x_i$ ,  $y_{i+3} = r^{-1}y_i$  を満たす<sup>6</sup> 変数  $t_i, x_i, y_i$  を用意し、 $t_i^2 = x_i y_i$  が成立していると仮定し、Poisson 構造を次のように定める<sup>7</sup>:  $\mu = 1, 2$  について、

$$\begin{aligned} \{x_i, y_i\} &= 0, \\ \{x_i, x_{i+\mu}\} &= (-1)^{\mu-1} x_i x_{i+\mu}, \quad \{x_i, y_{i+\mu}\} = -(-1)^{\mu-1} x_i y_{i+\mu}, \\ \{y_i, y_{i+\mu}\} &= (-1)^{\mu-1} y_i y_{i+\mu}, \quad \{y_i, x_{i+\mu}\} = -(-1)^{\mu-1} y_i x_{i+\mu}, \\ \{t_i, \xi_j\} &= 0 \quad (\xi = x, y, t). \end{aligned}$$

最後の行の関係式を忘れて、変数  $t_i$  を Poisson 中心元  $x_i y_i$  の平方根として導入してもよい。このとき、 $F_i$  と  $a_i$  を

$$a_i = \frac{t_i}{t_{i+1}}, \quad F_i = \frac{x_{i+1} x_i}{t_{i+1} t_i}.$$

と定める。これらは周期性  $a_{i+3} = a_i$ ,  $F_{i+3} = F_i$  を満たしており、前節の Poisson 構造の定義式を満たしている。この関係があるので  $x_i, y_i$  たちをも従属変数と呼び、 $t_i$  たちをもパラメーター変数と呼ぶことにする。

$A_1^{(1)}$  型の拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$  が次の関係式で定義される:

$$r_i^2 = 1, \quad \varpi r_i = r_{i+1} \varpi.$$

ただしインデックスを周期性  $r_{i+2} = r_i$  によって整数全体に拡張しておいた。

<sup>4</sup>  $\varphi$  は  $q$ -Serre 関係式を満たしている。

<sup>5</sup> 変数  $\gamma$  によるべき  $f_i^\gamma$  の構成の仕方については第 3.3 節に解説を書いておいた。

<sup>6</sup> このとき直後に定義される  $a_i$  たちは  $a_0 a_1 a_2 = r$  をみたしている。だから文献 [8] における  $q$  はここでの  $r$  に対応している。記号  $q$  は量子群の変形パラメーターのために取っておくことにする。

<sup>7</sup> この関係式は 3 を 3 以上の任意の奇数  $m$  に一般化しても  $\mu = 1, 2, \dots, m-1$  について有効である。ここで扱っている  $q\text{PIV}$  のケースは  $(n, m) = (3, 2)$  の場合に対応しており、互いに素な任意の  $(m, n)$  の場合に一般化される。そのとき変数  $x_i, y_i$  は  $mn$  個の変数  $x_{ik}$  に拡張されるが、 $x_{ik}$  たちの Poisson 括弧も  $\{x_{ik}, x_{jl}\} = \varepsilon_{ijkl} x_{ik} x_{jl}$ ,  $\varepsilon_{ijkl} = 0, \pm 1$  の形になるが、 $\varepsilon_{ijkl}$  がどのように  $0, \pm 1$  になっているかは複雑である。詳しくは量子化された場合を扱っている [13], [14] を見よ。  $n \geq 3$  の場合の Poisson 構造は量子化されて初めて明らかになった。

拡大アフィン Weyl 群の直積  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$  の  $x_i, y_i, t_i$  への作用を以下のように定めることができる<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned}
s_i(x_i) &= x_i - (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1})(y_i + x_{i+1})^{-1} = (x_i + y_{i+1})x_{i+1}(y_i + x_{i+1})^{-1}, \\
s_i(x_{i+1}) &= x_{i+1} + (x_i + y_{i+1})^{-1}(y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}) = (x_i + y_{i+1})^{-1}x_i(y_i + x_{i+1}), \\
s_i(y_i) &= y_i - (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1})(x_i + y_{i+1})^{-1} = (y_i + x_{i+1})y_{i+1}(x_i + y_{i+1})^{-1}, \\
s_i(y_{i+1}) &= y_{i+1} + (y_i + x_{i+1})^{-1}(x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}) = (y_i + x_{i+1})^{-1}y_i(x_i + y_{i+1}), \\
s_i(x_{i+2}) &= x_{i+2}, \quad s_i(y_{i+2}) = y_{i+2}, \\
s_i(t_i) &= t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{j+2}) = t_{j+2}, \\
\pi(x_i) &= x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}, \\
Q_i &:= y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i, \\
r_1(x_i) &= x_i - rQ_{i+1}^{-1}(x_{i+3}x_{i+2}x_{i+1} - y_{i+4}y_{i+3}y_{i+2}) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \\
r_1(y_i) &= y_i + r(x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1})Q_i^{-1} = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \\
r_1(t_i) &= t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i.
\end{aligned}$$

この作用は Poisson 構造と  $F_i, a_i$  で生成される部分体を保ち,  $s_i, \pi$  の  $F_i, a_i$  への作用は前節に定義したものと一致している.

$U_1 = r_1\varpi$  とおく. このとき  $U_1$  は以下を満たしている:

$$U_1(x_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \quad U_1(y_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \quad U_1(t_i) = t_i.$$

これらの公式と

$$x_{i+1}x_i = t_i t_{i+1} F_i, \quad y_{i+2}x_i = t_i t_{i+2} F_{i+1}^{-1} F_i, \quad y_{i+2}y_{i+1} = t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1}$$

から,  $U_1$  の  $F_i, a_i$  への作用は前節で定義した  $q$  差分版の Painlevé IV 方程式の離散時間発展  $T_{q\text{PIV}}$  に一致することも確かめられる<sup>9</sup>.

したがって, この節の内容を量子化可能ならば,  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式を量子化できる. そのためにはこの節で登場した変数  $t_i, x_i, y_i$  と拡大 Weyl 群の作用を量子群の言葉で理解することが必要になる.

### 1.3. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の Lax 表示

量子化を始める前に  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$  の作用の Lax 表示について説明しておこう.

変数  $z, w$  を用意して, 行列  $\Lambda_3(z), \Lambda_2(w), X(z), Y(z), V_i(w)$  を次のように定める:

$$\begin{aligned}
\Lambda_3(z) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ w & 0 \end{bmatrix}, \\
X(z) &= \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix}, \quad Y(z) = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ z & 0 & y_3 \end{bmatrix}, \quad V_i(w) = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ w & x_i \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

<sup>8</sup> この意味がわからない天下りの式を直接扱うのは得策ではない. 次節で解説する Lax 表示による Weyl 群作用の記述の方を使った方がよい.

<sup>9</sup>  $U_1$  の  $F_i, a_i$  への作用は  $r$  の値によらない.

$X(z), Y(z), V_i(z)$  を **local  $L$ -operators** と呼ぶ. さらに行列  $G_i, G'_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $R_i$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) を次のように定める:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G'_i = \varpi(G_i), \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで

$$g_i = \frac{x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}}{x_i + y_{i+1}}, \quad \rho_i = r \frac{x_{i+2} x_{i+1} x_i - y_{i+3} y_{i+2} y_{i+1}}{Q_i}.$$

$\varpi$  は  $x_i$  と  $y_i$  を交換する操作であった.

このとき, 前節で構成した拡大アフィン Weyl 群の  $x_i, y_i$  たちへの作用の定義を以下のように書き直せる:

$$\begin{aligned} s_i(X(z)) &= G_i X(z) G_i^{-1}, & s_i(Y(z)) &= G'_i Y(z) G_i^{-1}, \\ \pi(X(z)) &= \Lambda_3(z) X(rz) \Lambda_3(rz)^{-1}, & \pi(Y(z)) &= \Lambda_3(z) Y(rz) \Lambda_3(rz)^{-1}, \\ r_1(V_i(w)) &= R_{i+1}^{-1} V_i(w) R_i, & \varpi(V_i(w)) &= \Lambda_2(w) V_i(w) \Lambda_2(w)^{-1}. \end{aligned}$$

これを拡大アフィン Weyl 群の作用の **Lax** 表示と呼ぶ. さらに, 以下の条件で上記の拡大アフィン Weyl 群の  $x_i, y_i$  への作用を特徴付けることもできる:

$$\begin{aligned} r_1(X(z)Y(rz)) &= X(z)Y(rz), \\ r_1(x_{i+2}x_{i+1}x_i) &= y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}, \quad r_1(y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}) = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \\ \varpi(X(z)) &= Y(z), \quad \varpi(Y(z)) = X(z), \\ s_i(V_{i+1}(w)V_i(w)) &= V_{i+1}(w)V_i(w), \quad s_i(V_{i+2}(w)) = V_{i+2}(w), \\ s_i(x_i y_i) &= x_{i+1} y_{i+1}, \quad s_i(x_{i+1} y_{i+1}) = x_i y_i, \\ \pi(V_i(w)) &= V_{i+1}(w). \end{aligned}$$

これらの事実は公式  $Q_{i+1}x_i - y_{i+3}Q_i = x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}$  などを使えば確認できる<sup>10</sup>. そして, それらの事実を使うことによって実際に拡大アフィン Weyl 群の作用が定まっていることも確認できる<sup>11</sup>.

Weyl 群作用の Lax 表示を初見の人のために計算のポイントがどこにあるかを解説しておく. 計算のポイントは  $2 \times 2$  行列に関して

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g' & 0 \end{bmatrix}$$

および  $g' = -g$  をみたら  $g$  が  $a, b, c$  から  $g = (a - c)/b$  と一意に定まることである<sup>12</sup>.  $s_i$  の作用の Lax 表示を記述する行列  $G_i$  は行列  $X(z)Y(rz)$  にこの計算を適用することによって得られる.

<sup>10</sup> この  $(m, n) = (3, 2)$  の場合に計算を地道にまとめておけば一般の場合にどんな感じになっているかの感触がつかめる. うまく行く計算の仕組みを見付けるのは大変だが, ある特別な場合にうまく行くことを確認できれば, それを一般化するのは易しいことが多い.

<sup>11</sup> 拡大アフィン Weyl 群作用については, 前節の天下りの意味がよく分からない定義を出発点にするのではなく, この節の Lax 表示を用いた定義の方を出発点に採用した方がよい.

<sup>12</sup>  $g' = -g$  を仮定しない幾何クリスタルへの一般化もある. その一般化はさらに非可換な場合に一般化される. 非可換な場合への一般化の例は第 1.4 節の最後の方および第 1.5 節にある.

#### 1.4. 量子展開環の Chevalley 生成元の像のべき $f_i^\gamma$ の作用

$q$  差分版 Painlevé IV 方程式とその対称性の量子化を始めよう. まず, 基礎になる非可換環を量子群の方法を用いて構成しよう.

$\mathcal{B}$  は生成元  $a_{ik}^{\pm 1}, b_{ik}^{\pm 1}$  ( $i = 1, 2, 3, k = 1, 2$ ) と以下の関係式で定義される  $\mathbb{C}(q)$  上の代数であるとする:

$$\begin{aligned} a_{ik}a_{ik}^{-1} &= a_{ik}^{-1}a_{ik} = 1, & b_{ik}b_{ik}^{-1} &= b_{ik}^{-1}b_{ik} = 1 & (\xi &= a_{ik}, b_{ik}), \\ a_{ik}b_{ik} &= q^{-1}b_{ik}a_{ik}, & a_{ik}b_{i+1,k} &= qb_{i+1,k}a_{ik}, & a_{ik}b_{i+2,k} &= b_{i+2,k}a_{ik}, \\ a_{ik}a_{jk} &= a_{jk}a_{ik}, & b_{ik}b_{jk} &= b_{jk}b_{ik}, & \xi_{i1}\eta_{j2} &= \eta_{j2}\xi_{i1} & (\xi, \eta = a, b). \end{aligned}$$

ただし  $a_{i+3,k} = a_{ik}, b_{i+3,k} = b_{ik}$  によってインデックス  $i$  を整数全体に拡張しておいた.  $A_2^{(1)}$  型の量子  $R$  行列  $R(z)$  を次のように定める:

$$\begin{aligned} R(z) &= (q - q^{-1}z) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + (1 - z) \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj} \\ &\quad + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} (E_{ij} \otimes E_{ji} + zE_{ji} \otimes E_{ij}). \end{aligned}$$

ここで  $i, j$  は  $1, 2, 3$  を動き,  $E_{ij}$  は  $(i, j)$  成分のみが  $1$  で他の成分が  $0$  であるような  $3 \times 3$  行列 (行列単位) であるとする. さらに行列  $L_k(z)$  を次のように定める:

$$L_k(z) = \begin{bmatrix} a_{1k} & b_{1k} & 0 \\ 0 & a_{2k} & b_{2k} \\ zb_{3k} & 0 & a_{3k} \end{bmatrix}.$$

この  $L_k(z)$  たちを **local  $L$ -operators** と呼ぶ. このとき代数  $\mathcal{B}$  の定義関係式は次の “ $RLL = LLR$ ” 関係式に書き直される:

$$\begin{aligned} R(z/w)L_k(z)^1 L_k(w)^2 &= L_k(z)^2 L_k(z)^1 R(z/w) \quad (k = 1, 2), \\ L_1(z)^1 L_2(w)^2 &= L_2(w)^2 L_1(z)^1. \end{aligned}$$

ただし  $L_1(z)^1 = L_1(z) \otimes 1, L_2(w)^2 = 1 \otimes L_2(w)$  と定めた.

以上の構成は量子群の世界では標準的でよく知られている.

量子展開環  $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$  の下 Borel 部分代数  $U_q(\mathfrak{b}_-)$  は生成元  $\kappa_i^{\pm 1}, \varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と次の関係式で定義される代数である:

$$\begin{aligned} \kappa_i \kappa_i^{-1} &= \kappa_i^{-1} \kappa_i = 1, & \kappa_i \kappa_j &= \kappa_j \kappa_i, \\ \kappa_i \varphi_i \kappa_i^{-1} &= q^{-1} \varphi_i, & \kappa_{i+1} \varphi_i \kappa_{i+1}^{-1} &= q \varphi_i, & \kappa_{i+2} \varphi_i \kappa_{i+2}^{-1} &= \varphi_i, \\ \varphi_i^2 \varphi_{i\pm 1} &- (q + q^{-1}) \varphi_i \varphi_{i\pm 1} \varphi + \varphi_{i\pm 1} \varphi^2 = 0. \end{aligned}$$

ただしインデックスを  $3$  周期的に整数全体に拡張しておいた. 最後の関係式を  $q$ -Serre 関係式と呼び,  $\varphi_i$  たちを量子展開環の下三角部分の **Chevalley** 生成元と呼ぶことにする.  $\kappa_i^{\pm 1}$  たちから生成される部分代数は **Cartan** 部分代数と呼ばれる.

各  $k$  ごとに次によって代数準同型  $U_q(\mathfrak{b}_-) \rightarrow \mathcal{B}$  を定めることができる:

$$\kappa_i^{\pm 1} \mapsto a_{ik}^{\pm 1}, \quad \varphi_i \mapsto a_{ik}^{-1} b_{ik}.$$

ゆえに  $a_{ik}^{\pm 1}$  と  $b_{ik}$  で生成される  $\mathcal{B}$  の部分代数は  $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$  の下 Borel 部分代数のテンソル積  $U_q(\mathfrak{b}_-) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-)$  の

$$\kappa_i^{\pm 1} \otimes 1 \mapsto a_{i1}^{\pm 1}, \quad \varphi_i \otimes 1 \mapsto a_{i1}^{-1} b_{i1}, \quad 1 \otimes \kappa_i^{\pm 1} \mapsto a_{i2}^{\pm 1}, \quad 1 \otimes \varphi_i \mapsto a_{i2}^{-1} b_{i2}.$$

で定まる代数準同型写像の像になっている.

よく知られているように, local  $L$ -operators の積  $L(z) := L_1(z)L_2(z)$  は量子展開環の余積に対応している.  $U_q(\mathfrak{b}_-)$  の余積が

$$\Delta(\kappa_i^{\pm 1}) = \kappa_i^{\pm 1} \otimes \kappa_i^{\pm 1}, \quad \Delta(\varphi_i) = \varphi_i \otimes \kappa_i^{-1} \kappa_{i+1} + 1 \otimes \varphi_i$$

で定義される. 行列  $L(z) := L_1(z)L_2(z)$  の  $(i, i)$  成分は  $\Delta(\kappa_i)$  の像に一致し,  $(i, i+1)$  成分を左から  $(i, i)$  成分で割ってできる元

$$f_i := a_{i1}^{-1} b_{i1} a_{i2}^{-1} a_{i+1,2} + a_{i2}^{-1} b_{i2}$$

は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積  $\Delta(\varphi_i)$  の像に一致する.

行列  $L(z) = L_1(z)L_2(z)$  の対角部分を

$$L_0 = \text{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3), \quad \tilde{a}_i = a_{i1} a_{i2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

と書き, 行列  $\tilde{L}(z) := L_1(z)L_2(z)L_0$  を次のように書くことにする<sup>13</sup>:

$$\tilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0 = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^2 & b_1 & c_1 \\ zc_2 & \tilde{a}_2^2 & b_2 \\ zb_3 & zc_3 & \tilde{a}_3^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} b_i = (a_{i1} b_{i2} + b_{i1} a_{i+1,2}) a_{i+1,1} a_{i+1,2}, \\ c_i = b_{i1} b_{i+1,2} a_{i+2,1} a_{i+2,2}. \end{cases}$$

さらに  $\tilde{a}_i, b_i, c_i$  のインデックスを 3 周期的に整数全体に拡張しておく.

量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積  $\Delta(\varphi_i)$  の像  $f_i$  は次のように表わされるのであった:

$$f_i = \tilde{a}_i^{-1} b_i \tilde{a}_{i+1}^{-1} = f_{i1} + f_{i2}, \quad f_{i1} = a_{i1}^{-1} b_{i1} a_{i2}^{-1} a_{i+1,2}, \quad f_{i2} = a_{i2}^{-1} b_{i2}$$

$f_i$  たちは  $\varphi_i$  の余積たちの像なので特に  $q$ -Serre 関係式を満たしている. ゆえに変数  $\gamma$  による  $f_i$  のべき  $f_i^\gamma$  を含む代数を構成することができ (第 3.3 節), 次の公式が成立することを示せる (第 3.4 節, [15], [16]):  $a_{ij} = a_{ji} = -1$  のとき

$$\begin{aligned} f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma} &= q^{\pm \gamma} f_j + [\gamma]_q (f_i f_j - q^{\pm 1} f_j f_i) f_i^{-1} = [1 - \gamma]_q f_j + [\gamma]_q f_i f_j f_i^{-1}, \\ f_i^\beta f_j^{\beta+\gamma} f_i^\gamma &= f_j^\gamma f_i^{\beta+\gamma} f_j^\beta. \end{aligned}$$

ここで  $[\gamma]_q = (q^\gamma - q^{-\gamma}) / (q - q^{-1})$ . 後者の関係式は **Verma** 関係式と呼ばれている.

$\tilde{a}_i^{\pm 1}, b_i, c_i$  で生成される  $\mathcal{B}$  の部分代数は  $\tilde{a}_i^{\pm 1}, f_i, c_i$  で生成される部分代数に一致しており, それらは以下の関係式を満たしていることを直接の計算で確認できる:

$$f_i f_{i+1} - q f_{i+1} f_i = (1 - q^2) \tilde{a}_i^{-1} c_i \tilde{a}_{i+1}^{-1},$$

<sup>13</sup> 量子展開環の余積に対応する標準的な  $L$ -operator  $L(z) = L_1(z)L_2(z)$  ではなく, 対角部分  $L_0$  を二重にした  $\tilde{L}(z) = L(z)L_0$  を主に使うことになることに注意せよ.

$$\begin{aligned}
f_i c_j &= c_j f_i, & \tilde{a}_i \tilde{a}_j &= \tilde{a}_j \tilde{a}_i, \\
c_i c_{i-2} &= q c_{i-2} c_i, & c_i c_{i+2} &= q^{-1} c_{i+2} c_i, \\
\tilde{a}_i f_i &= q^{-1} f_i \tilde{a}_i, & \tilde{a}_{i+1} f_i &= q f_i \tilde{a}_{i+1}, & \tilde{a}_{i+2} f_i &= f_i \tilde{a}_{i+2}, \\
\tilde{a}_i c_i &= q^{-1} c_i \tilde{a}_i, & \tilde{a}_{i+1} c_i &= c_i \tilde{a}_{i+1}, & \tilde{a}_{i+2} c_i &= q c_i \tilde{a}_{i+2}.
\end{aligned}$$

これらの関係式を使えば必要な公式はすべて計算できる. 特に重要なのは,  $c_i$  たちが  $f_j$  たちと可換になり,  $c_i$  たちの積が  $q$  べき因子の違いを除けば可換になることである. この事実は後で変数  $f_i$  を変数変換するときに使われる.

$\tilde{L}(z)$  の成分で  $f_i$  と非可換なのは  $\tilde{a}_i^2, \tilde{a}_{i+1}^2, b_{i-1}, b_{i+1}$  の4つだけであり,

$$\begin{aligned}
f_i^\gamma b_{i+1} f_i^{-\gamma} &= b_{i+1} + (q^{-2\gamma} - 1) \tilde{a}_i^2 b_i^{-1} c_i, \\
f_i^\gamma b_{i-1} f_i^{-\gamma} &= b_{i-1} + (q^{2\gamma} - 1) c_{i-1} b_i^{-1} \tilde{a}_i^2, \\
f_i^\gamma \tilde{a}_i f_i^{-\gamma} &= q^\gamma \tilde{a}_i, \\
f_i^\gamma \tilde{a}_{i+1} f_i^{-\gamma} &= q^{-\gamma} \tilde{a}_{i+1}
\end{aligned}$$

が成立していることも確認できる.

変換  $\text{Ad}(f_i^\gamma)(x) = f_i^\gamma x f_i^{-\gamma}$  の Lax 表示を得るために次のようにおく:

$$\mathcal{G}_{i,c} = y_i((c^2 - 1) \tilde{a}_{i+1}^2 b_i^{-1}), \quad \mathcal{G}'_{i,c} = y_i((c^{-2} - 1) b_i^{-1} \tilde{a}_i^2).$$

ただし,

$$y_1(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad y_3(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z^{-1}a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このとき,  $f_i^\gamma$  の作用に関する上の公式より次が成立している:

$$f_i^\gamma \tilde{L}(z) f_i^{-\gamma} = \mathcal{G}_{i,c} \tilde{L}(z) \mathcal{G}'_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

これを  $\text{Ad}(f_i^\gamma)$  の Lax 表示と呼ぶ<sup>14</sup>.

### 1.5. 不変部分代数への制限

代数  $\mathcal{B}$  の中心可逆元  $r$  を

$$r = c_1 c_3 c_2$$

と定め<sup>15</sup>, 対角行列  $\tilde{C}$  と  $t_i \in \mathcal{B}$  を次のように定める<sup>16</sup>:

$$\tilde{C} = \text{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) := \text{diag}(1, c_1 c_3, c_1), \quad t_i = \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}.$$

<sup>14</sup> このタイプの公式を得るためには  $L_1(z)L_2(z)$  そのものではなく, その対角部分  $L_0$  を二重化した  $\tilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0$  を使わなければいけない.

<sup>15</sup> より一般に local  $L$ -operators の行列としてのサイズ 3 を 3 以上の奇数  $m$  に置き換えた場合には  $r = c_1 c_3 \cdots c_m c_2 c_4 \cdots c_{m-1}$  と定める.

<sup>16</sup> 行列のサイズが 3 以上の奇数  $m$  の場合には,  $\tilde{C} = \text{diag}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m)$  を次のように定める:

$$\tilde{C} := \text{diag}(1, c_{\text{odd}}, c_1, c_{\text{odd}}c_2, c_1c_3, c_{\text{odd}}c_2c_4, c_1c_3c_5, \dots, c_{\text{odd}}c_2c_4 \cdots c_{m-3}, c_1c_3 \cdots c_m).$$

ここで  $c_{\text{odd}} = c_1 c_3 \cdots c_m$ .

この  $t_i$  と  $\tilde{a}_i = a_{i1}a_{i2}$  は  $q$  べき因子の違いを除いて一致する.  $\tilde{c}_i$  のインデックスは整数全体に拡張しないことにする.

このとき, 行列  $\hat{L}(z) := \tilde{C}\tilde{L}(z)\tilde{C}^{-1}$  は次の形になる:

$$\hat{L}(z) = \tilde{C}\tilde{L}(z)\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^2 & \hat{b}_1 & 1 \\ rz & t_2^2 & \hat{b}_2 \\ zr\hat{b}_3 & z & t_3^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \hat{b}_1 = \tilde{c}_1 b_1 \tilde{c}_2^{-1}, \\ \hat{b}_2 = \tilde{c}_2 b_2 \tilde{c}_3^{-1}, \\ \hat{b}_3 = r^{-1} \tilde{c}_3 b_3 \tilde{c}_1^{-1}. \end{cases}$$

前節までは 3 周期的にインデックスを整数全体に拡張していたが, この節では次の準周期性によって  $t_i, \hat{b}_i$  のインデックスを整数全体に拡張しておく:

$$t_{i+3} = r^{-1}t_i, \quad \hat{b}_{i+3} = r^{-1}\hat{b}_i.$$

このとき,  $t_i$  たちは, 互いに可換だけでなく,  $\hat{b}_j$  たちとも可換になる<sup>17</sup>. そこで  $t_i$  たちを量子化されたパラメーター変数と呼ぶことにする.  $\hat{L}(z)$  の成分で  $f_i$  と非可換なのは  $t_i^2, t_{i+1}^2, \hat{b}_{i+1}, \hat{b}_{i-1}$  の4つだけである.

$\text{Ad}(f_i^\gamma)$  の  $\hat{L}(z)$  の作用の Lax 表示を得るために次のようにおく:

$$G_{i,c} = \tilde{C}\mathcal{G}_{i,c}\tilde{C}^{-1}, \quad G''_{i,c} = \tilde{C}\mathcal{G}'_{i,c}\tilde{C}^{-1}.$$

後で  $G'_{i,c}$  を別に定義するのでこのような記号法になっている. このとき,

$$\begin{aligned} G_{i,c} &= y_i((c^2 - 1)t_{i+1}^2 \hat{b}_i^{-1}), & G''_{i,c} &= y_i((c^{-2} - 1)\hat{b}_i^{-1}t_i^2) \quad (i = 1, 2), \\ G_{3,c} &= y_3(r^{-1}(c^2 - 1)t_1^2 \hat{b}_3^{-1}), & G''_{3,c} &= y_3(r^{-1}(c^{-2} - 1)\hat{b}_3^{-1}t_3^2). \end{aligned}$$

前節の結果より, 次の公式が成立している:

$$f_i^\gamma \hat{L}(z) f_i^{-\gamma} = G_{i,c} \hat{L}(z) G''_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

この公式より  $\hat{L}(z)$  が文献 [2] で導入された unipotent crystal (幾何クリスタルの一種) の量子化とみなせることがわかる.

量子化されたパラメーター変数  $a_i$  を次のように定めておく<sup>18</sup>:

$$a_i = t_i t_{i+1}^{-1}.$$

このとき, 量子化される前の幾何クリスタルの場合 ([2], [3]) と同様の方法で, この量子化された場合にも, 拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$  の作用を  $t_i, \hat{b}_i$  たちから  $\mathbb{C}(q, r)$  上生成される斜体上に次のように定めることができる:

$$s_i(\hat{L}(z)) = G_{i,a_i} \hat{L}(z) G_{i,a_i}^{-1}, \quad \pi(\hat{L}(z)) = \Lambda_3(z) \hat{L}(rz) \Lambda_3(r^2 z)^{-1}.$$

<sup>17</sup> この事実がとても重要である.  $\tilde{a}_i^{\pm 1}, b_i^{\pm 1}, c_i^{\pm 1}$  で生成される代数には, 可逆な複素対角行列全体のなす群が行列  $\tilde{L}(z)$  の相似変換の形で作用している. その作用で不変な元全体のなす部分代数は  $t_i^{\pm 1}, \hat{b}_i^{\pm 1}, r^{\pm 1}$  で生成される. すなわち行列  $\hat{L}(z)$  を考えることは可逆な対角行列による相似変換で不変な部分代数を考えることに対応している.  $\hat{L}(z)$  のすべての成分が  $t_i$  と可換になるのはこの不変性の帰結である.

<sup>18</sup> パラメーター変数  $a_i$  は単純コルートに対応している.

$G_{i,a_i} = G_{i,a_i}''^{-1} = y_i((t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1})$  ( $i = 1, 2$ ) が成立していることに注意せよ<sup>19</sup>. この作用を具体的に書き下すと次のようになる:

$$\begin{aligned} s_i(t_i) &= t_{i+1}, & s_i(t_{i+1}) &= t_i, & s_i(t_{i+2}) &= t_{i+2}, \\ s_i(\hat{b}_i) &= \hat{b}_i, & s_i(\hat{b}_{i+1}) &= \hat{b}_{i+1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, & s_i(\hat{b}_{i-1}) &= \hat{b}_{i-1} - (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \\ \pi(t_j) &= t_{j+1}, & \pi(\hat{b}_j) &= \hat{b}_{j+1}. \end{aligned}$$

準周期性  $t_{i+3} = r^{-1}t_i$ ,  $\hat{b}_{i+3} = r^{-1}\hat{b}_i$  に注意せよ.

以下の結果は第 2.5 節において  $\tau$  関数への Weyl 群作用の Sato-Wilson 表示について説明するために使われる.

従属変数  $\hat{f}_i$  を次のように定める<sup>20</sup>:

$$\hat{f}_i = -(q - q^{-1})^{-1} \tilde{c}_i f_i \tilde{c}_{i+1}^{-1}.$$

このとき  $\hat{b}_i = -(q - q^{-1})t_i \hat{f}_i t_{i+1}$  が成立している.

$\tilde{c}_i$  たちは  $f_j$  たちと可換なので

$$\hat{f}_i^\gamma f_j \hat{f}_i^{-\gamma} = f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma}$$

を満たしている. さらに  $\tilde{c}_i$  たちは互いに  $q$  べき因子の違いを除いて可換である. ゆえに  $\hat{f}_i^\beta \hat{f}_j^{\beta+\gamma} \hat{f}_i^\gamma$  と  $\hat{f}_j^\gamma \hat{f}_i^{\beta+\gamma} \hat{f}_j^\beta$  も  $q$  べき因子の違いを除いて等しい. このことから, 上で構成した Weyl 群作用を  $f_i^\gamma$  ではなく,  $\hat{f}_i^\gamma$  を用いて構成できそうである. しかし,  $\hat{f}_i$  たちは  $f_i$  たちと違って  $t_i$  たちと可換である. ゆえに  $t_i$  たちへの Weyl 群作用は  $\hat{f}_i^\gamma$  以外の手段を用いて構成しなければいけない. そこで  $\mathbb{C}(q, r)$  上  $t_i, \hat{f}_i$  で生成される斜体  $\mathcal{K}$  の代数自己同型  $\tilde{s}_i$  を次のように定めておく:

$$\tilde{s}_i(t_i) = t_{i+1}, \quad \tilde{s}_i(t_{i+1}) = t_i, \quad \tilde{s}_i(t_{i+2}) = t_{i+2}, \quad \tilde{s}_i(\hat{f}_j) = \hat{f}_j.$$

このとき  $\mathcal{K}$  への Weyl 群作用を

$$s_i(x) = \text{Ad}(\hat{f}_i^\gamma)(\tilde{s}_i(x)) = \hat{f}_i^\gamma \tilde{s}_i(x) \hat{f}_i^{-\gamma}, \quad c = q^{-\gamma} = a_i = t_i t_i^{-1}$$

によって定めることで, この作用は上で構成した Weyl 群作用と一致している:

$$s_i(\hat{L}(z)) = G_i \hat{L}(z) G_i^{-1}, \quad G_i := G_{i,a_i} = y_i(g_i), \quad g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{\hat{b}_i} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{\hat{f}_i}.$$

この結果は第 2.5 節で基本的な役目を果たす<sup>21</sup>.

<sup>19</sup>  $s_i = \pi^{i-1} s_1 \pi^{-(i-1)}$  なので  $s_1$  と  $\pi$  の作用が定まっていれば  $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$  の作用を得るためには十分である. そこで以下の説明では  $s_0 = s_3$  の作用に関する説明を暗黙のうちに省略することがある.

<sup>20</sup> これは  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  のみに通用する公式.  $\hat{f}_3$  についてはここだけで仮に  $\tilde{c}_4 = r$  とおけば同じ公式で適切な定義が得られる.

<sup>21</sup> 斜体の元  $a, b$  が互いに可換なとき,  $ab^{-1} = b^{-1}a$  を  $a/b$  や  $\frac{a}{b}$  と書くことにする.

## 1.6. 変数 $x_i, y_i$ の量子化

対角行列  $\tilde{C}'$  を次のように定める:

$$\tilde{C}' = \text{diag}(\tilde{c}_3 b_{31}, \tilde{c}_1 b_{11}, \tilde{c}_2 b_{21}).$$

このとき行列  $X(z) := \tilde{C}L_1(z)\tilde{C}'^{-1}$ ,  $Y(rz) := \tilde{C}'L_2(z)L_0\tilde{C}^{-1}$  は次の形をしている<sup>22</sup>:

$$X(z) = \tilde{C}L_1(z)\tilde{C}'^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix},$$

$$Y(rz) = \tilde{C}'L_2(z)L_0\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ rz & 0 & y_3 \end{bmatrix}.$$

この式によって量子化された従属変数  $x_i, y_i$  を定義する. それらのインデックスを準周期性  $x_{i+3} = r^{-1}x_i$ ,  $y_{i+3} = r^{-1}y_i$  によって整数全体に拡張しておく.

このとき,  $\hat{a}_i = t_i^2 = x_i y_i$  および以下の関係式が成立している:  $\mu = 1, 2$  について,

$$\begin{aligned} x_i y_i &= y_i x_i = t_i^2, \\ x_i x_{i+\mu} &= q^{(-1)^{\mu-1}2} x_{i+\mu} x_i, & x_i y_{i+\mu} &= q^{-(-1)^{\mu-1}2} y_{i+\mu} x_i, \\ y_i y_{i+\mu} &= q^{(-1)^{\mu-1}2} y_{i+\mu} y_i, & y_i x_{i+\mu} &= q^{-(-1)^{\mu-1}2} x_{i+\mu} y_i, \\ t_i \xi_j &= \xi_j t_i \quad (\xi = x, y, t). \end{aligned}$$

この関係式の古典極限は古典版の変数  $x_i, y_i, t_i$  の Poisson 構造を再現する<sup>23</sup>. このことより, この節の行列  $X(z), Y(rz)$  は古典版の  $q$  差分化された Painlevé IV 方程式の記述で用いた行列  $X(z), Y(rz)$  の量子化になっていることがわかる.

$x_i, y_i$  たちは以下の条件から一意に決定される:

$$X(z)Y(rz) = \tilde{C}\tilde{L}(z)\tilde{C}^{-1} = \hat{L}(z), \quad r = c_1 c_3 c_2, \quad x_3 x_2 x_1 = b_{31}^{-1} a_{31} b_{21}^{-1} a_{21} b_{11}^{-1} a_{11}.$$

$r$  と  $x_3 x_2 x_1$  に関する条件の右辺は代数  $\mathcal{B}$  の可逆な中心元であることにも注意せよ. 対角行列  $\tilde{C}$  の成分は  $\tilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0$  の成分  $c_i$  たちで書けていたので,  $x_3 x_2 x_1$  に関する条件と  $\tilde{L}(z)$  の成分から  $x_i, y_i$  たちは一意に決まる. さらに  $L_0$  は  $L(z) = L_1(z)L_2(z)$  の対角部分だったので,  $x_3 x_2 x_1$  に関する条件と  $L(z)$  の成分から  $x_i, y_i, t_i$  たちは一意に決まる. ( $\tilde{C} = \text{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ ,  $L_0 = \text{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ ) であり,  $t_i$  は  $t_i = \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}$  と定義されたのであった.)

代数  $\mathcal{B}$  は  $a_{ik}^{\pm 1}, b_{ik}^{\pm 1}$  から生成される代数なのであった.  $\mathcal{B}$  には群  $(\mathbb{C}^\times)^3 \times (\mathbb{C}^\times)^3$  の元  $(g, g')$  を次のように作用させることができる:

$$L_1(z) \mapsto gL_1(z)g'^{-1}, \quad L_2(z) \mapsto g'L_2(z)g^{-1}.$$

ただし  $(\mathbb{C}^\times)^3$  の元  $g, g'$  と可逆な対角行列を同一視した. この群作用を local  $L$ -operators  $L_1(z), L_2(z)$  の gauge 変換と呼ぶことにする. この gauge 変換で不変な  $\mathcal{B}$  の元全体のなす部分代数を  $\mathcal{B}^{\text{gauge}}$  と書くことにする.  $\mathcal{B}^{\text{gauge}}$  は  $x_i, y_i, t_i, r$  とその逆元たちで生成される.

<sup>22</sup> 実際にはその形になるように  $\tilde{C}'$  を定めた. 適切な  $\tilde{C}$  がすでに与えられているとき,  $\tilde{C}'$  はその条件で一意に定まる.

<sup>23</sup>  $\hbar = q^2 - 1$  とおいて  $\hbar \rightarrow 0$  の古典極限を考える.

### 1.7. $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の量子化

前節の定義より, 次が成立していることがすぐにわかる ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned}\widehat{L}(z) &= \widetilde{C}L_1(z)L_2(z)L_0\widetilde{C}^{-1} = X(z)Y(rz), \\ G_{i,c} &= y_i(g_i(c)), \quad g_i(c) := \frac{(c^2 - 1)t_{i+1}^2}{x_i + y_{i+1}}, \\ G''_{i,c} &= y_i(g''_i(c)), \quad g''_i(c) := \frac{(c^{-2} - 1)t_i^2}{x_i + y_{i+1}}.\end{aligned}$$

さらに行列  $G'_{i,c}$  を次のように定める:

$$G'_{i,c} = y_i(g'_i(c)), \quad g'_i(c) := \frac{(c^2 - 1)t_{i+1}^2}{c^2 t_{i+1}^2 x_i^{-1} + x_{i+1}} = -\frac{(c^{-2} - 1)t_i^2}{c^{-2} t_i^2 y_{i+1}^{-1} + y_i}.$$

このとき,  $\text{Ad}(f_i^\gamma)$  の  $X(z)$ ,  $Y(rz)$  への作用は次のように書ける:

$$f_i^\gamma X(z) f_i^{-\gamma} = G_{i,c} X(z) G'_{i,c}{}^{-1}, \quad f_i^\gamma Y(rz) f_i^{-\gamma} = G'_{i,c} Y(rz) G''_{i,c}, \quad c = q^{-\gamma}.$$

ゆえに,  $x_i, y_i$  によって  $\mathbb{C}(r, q)$  上生成される斜体への拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$  の作用を次によって定めることができる:

$$\begin{aligned}s_i(X(z)) &= G_{i,a_i} X(z) G'_{i,a_i}{}^{-1}, \quad s_i(Y(z)) = G'_{i,a_i} Y(rz) G''_{i,a_i}, \\ \pi(X(z)) &= \Lambda(z) X(z) \Lambda(rz)^{-1}, \quad \pi(Y(rz)) = \Lambda(rz) Y(rz) \Lambda(r^2 z)^{-1}.\end{aligned}$$

以下の公式より, 以上の結果は古典版の  $q$  差分化された Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) の部分の量子化を与えていることがわかる:

$$\begin{aligned}G_{i,a_i} &= y_i(g_i), \quad g_i = \frac{x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}}{x_i + y_{i+1}}, \\ G'_{i,a_i} &= y_i(g'_i), \quad g'_i = \frac{y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}}{y_i + x_{i+1}}, \\ G''_{i,a_i} &= G_{i,a_i}^{-1}\end{aligned}$$

この作用はパラメーター変数  $t_i$  たちにも自然に拡張される.

以上で構成された  $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$  の作用の量子化の具体形は以下の通り:

$$\begin{aligned}s_i(x_i) &= x_i - (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1})(y_i + x_{i+1})^{-1} = (x_i + y_{i+1}) x_{i+1} (y_i + x_{i+1})^{-1}, \\ s_i(x_{i+1}) &= x_{i+1} + (x_i + y_{i+1})^{-1} (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}) = (x_i + y_{i+1})^{-1} x_i (y_i + x_{i+1}), \\ s_i(y_i) &= y_i - (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1})(x_i + y_{i+1})^{-1} = (y_i + x_{i+1}) y_{i+1} (x_i + y_{i+1})^{-1}, \\ s_i(y_{i+1}) &= y_{i+1} + (y_i + x_{i+1})^{-1} (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}) = (y_i + x_{i+1})^{-1} y_i (x_i + y_{i+1}), \\ s_i(x_{i+2}) &= x_{i+2}, \quad s_i(y_{i+2}) = y_{i+2}, \\ s_i(t_i) &= t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{j+2}) = t_{j+2}, \\ \pi(x_i) &= x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}.\end{aligned}$$

これらの公式は  $q$  が一ヶ所も出て来ないように書かれているので古典の場合の対応する公式と見かけ上完全に一致している.

残りの  $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$  の部分の作用の量子化も同様に構成される.  $d_i, d'_i$  を次のように定めるとすべての  $x_i, y_i, t_i$  と可換である:

$$d_i = x_{i+2}x_{i+1}x_i, \quad d'_i = y_{i+2}y_{i+1}y_i.$$

量子化された  $V_i(w), R_i, \rho_i, Q_i$  を古典の場合の公式をそのまま用いて

$$V_i(w) = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ w & x_i \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_i = r \frac{d_i - d'_{i+1}}{Q_i},$$

$$Q_i = y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i.$$

と定める. このとき  $x_i, y_i$  によって  $\mathbb{C}(r, q)$  上生成される斜体への拡大アフィン Weyl 群  $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$  の作用を (古典の場合と同様の) 次の式によって定めることができる:

$$r_1(V_i(z)) = R_{i+1}^{-1}V_i(z)R_i, \quad \varpi(V_i(z)) = \Lambda_2(w)V_i(w)\Lambda_2(w)^{-1}.$$

この作用はパラメーター変数  $t_i$  にも自然に拡張される.

以上で構成された  $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$  の作用の量子化の具体形は以下の通り:

$$r_1(x_i) = x_i - rQ_{i+1}^{-1}(x_{i+3}x_{i+2}x_{i+1} - y_{i+4}y_{i+3}y_{i+2}) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i,$$

$$r_1(y_i) = y_i + r(x_{i+2}x_{i+1}x_i - y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1})Q_i^{-1} = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1},$$

$$r_1(t_i) = t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i.$$

これらの公式も古典の場合の対応する公式と見かけ上完全に一致している.

さらに, 以下の条件で以上で定義した2つの拡大アフィン Weyl 群の  $x_i, y_i$  への作用を特徴付けることもできる:

$$r_1(X(z)Y(rz)) = X(z)Y(rz),$$

$$r_1(x_{i+2}x_{i+1}x_i) = y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}, \quad r_1(y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1}) = x_{i+2}x_{i+1}x_i,$$

$$\varpi(X(z)) = Y(z), \quad \varpi(Y(z)) = X(z),$$

$$s_i(V_{i+1}(w)V_i(w)) = V_{i+1}(w)V_i(w), \quad s_i(V_{i+2}(w)) = V_{i+2}(w),$$

$$s_i(x_iy_i) = x_{i+1}y_{i+1}, \quad s_i(x_{i+1}y_{i+1}) = x_iy_i,$$

$$\pi(V_i(w)) = V_{i+1}(w).$$

このことから2つの拡大アフィン Weyl 群の作用が可換になることもわかる. したがって, 以上によって,  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$  の作用の量子化が構成できたことになる.

### 1.8. $qP_{IV}$ の量子化

古典の場合の  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式の離散時間発展は  $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$  の作用における  $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$  の側の  $U_1 = r_1\varpi$  の作用に一致しているのであった.

量子化された  $U_1 = r_1\varpi$  の作用の仕方は次の通り:

$$U_1(x_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1}, \quad U_1(y_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i, \quad U_1(t_i) = t_i.$$

$Q_i$  は  $Q_i = y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i$  と定義されたのであった.

量子化されたパラメーター変数  $a_i$  は古典の場合と同様に  $a_i = t_i t_{i+1}^{-1}$  と定義されたのであった ( $t_i^2 = x_i y_i = y_i x_i$ ). 量子化された従属変数  $F_i$  も古典の場合と同様に次のように定義しよう:

$$F_i = t_i^{-1} t_{i+1}^{-1} x_{i+1} x_i.$$

このとき,  $F_{i+3} = F_i$ ,  $a_{i+3} = a_i$  が成立しており, それらは以下の関係式を満たしている:

$$F_i F_j = q^{2b_{ij}} F_j F_i, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad a_i F_j = F_j a_i.$$

たとえば  $F_i F_{i+1} = q^2 F_{i+1} F_i$ . この関係式の古典極限は古典の場合の Poisson 構造を再現する.

$F_i$  の定義と  $t_i^2 = x_i y_i = y_i x_i$  と  $x_i x_{i+1} = q^2 x_{i+1} x_i$  などより,

$$x_{i+1} x_i = t_i t_{i+1} F_i, \quad y_{i+2} x_i = t_i t_{i+2} F_i F_{i+1}^{-1}, \quad y_{i+2} y_{i+1} = q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} Q_i &= q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1} + t_i t_{i+2} F_i F_{i+1}^{-1} + t_i t_{i+1} F_i \\ &= (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1}) q^{-2} t_{i+1} t_{i+2} F_{i+1}^{-1} \\ Q_{i+1} &= (1 + q^2 a_{i+1} F_{i+1} + q^2 a_{i+1} a_{i-1} F_{i+1} F_{i-1}) q^{-2} r^{-1} t_{i+2} t_i F_{i-1}^{-1} \\ Q_{i+2} &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) q^{-2} r^{-2} t_i t_{i+1} F_i^{-1}. \end{aligned}$$

これより, 特に

$$\begin{aligned} U_1(F_i) &= r^2 Q_{i+2} F_i Q_i^{-1} \\ &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) a_i a_{i+1} F_{i+1} (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1})^{-1} \end{aligned}$$

これが  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式の量子化された離散時間発展である.

$s_i, \pi$  の作用は  $r_i, \varpi$  の作用と可換だったので,  $s_i, \pi$  の作用は  $U_1$  の作用と可換である. だから  $s_i, \pi$  の作用は量子化された  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式の対称性 (Bäcklund 変換) になっている.  $s_i, \pi$  の作用は  $F_i$  と  $a_i$  たちで生成される斜体を保つ. 作用の具体的形は以下の通り:

$$\begin{aligned} s_i(F_i) &= F_i, \quad s_i(F_{i-1}) = F_{i-1} \frac{a_i + F_i}{1 + a_i F_i}, \quad s_i(F_{i+1}) = \frac{1 + a_i F_i}{a_i + F_i} F_{i+1}, \\ s_i(a_i) &= a_i^{-1}, \quad s_i(a_{i\pm 1}) = a_i a_{i\pm 1}, \\ \pi(F_i) &= F_{i+1}, \quad \pi(a_i) = a_{i+1}. \end{aligned}$$

この形の Weyl 群双有理作用の量子化は任意の対称化可能一般 Cartan 行列の場合に一般化される ([6], [15]).

### 1.9. まとめ

以上によって  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式の離散時間発展とその  $A_2^{(1)}$  対称性が量子化された. 量子化の過程で,  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式の対称形式の独立変数  $F_i, x_i, y_i$  たちとパラメーター変数  $a_i, t_i$  たちが量子群のどこにどのように住んでいるかもわかった.

量子化された従属変数  $F_i$  とパラメーター変数  $a_i$  の積  $a_i F_i = y_{i+1}^{-1} x_i$  は  $q$  のべき因子を除いて  $\varphi_i \otimes \kappa_i^{-1} \kappa_{i+1}$  の像  $f_{i1}$  と  $1 \otimes \varphi_i$  の像  $f_{i2}$  の比  $f_{i2}^{-1} f_{i1}$  に等しい. すなわち  $a_i F_i$  は  $q$  のべき因子を除いて量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元  $\varphi_i$  の余積の2つの項の比の像に等しい.

量子化されたパラメーター変数  $t_i, a_i$  のそれぞれは  $q$  べき因子の違いを除いて量子展開環の Cartan 部分代数の元  $\kappa_i, \kappa_i^{-1} \kappa_{i+1}$  の余積の像に等しい.

要するに  $q$  差分化された Painlevé IV 方程式の対称形式の従属変数は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元から来ており, パラメーター変数は量子展開環の Cartan 部分代数の生成元から来ている.

$q$  差分化された Painlevé IV 方程式の量子化の対称性  $s_i$  の作用は量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元の余積の像  $f_i$  のべき  $f_i^\gamma$  の作用から来ている. ただし,  $\gamma$  とパラメーター変数の関係を  $a_i = t_i/t_{i+1} = q^{-\gamma}$  としなければいけない.

$x_i, y_i, t_i$  変数は local  $L$ -operators  $L_1(z), L_2(z)$  の可逆な対角行列による gauge 変換で不変な元であり, それらの逆元と  $r^{\pm 1}$  から gauge 変換で不変な  $\mathcal{B}$  の元全体のなす部分代数  $\mathcal{B}^{\text{gauge}}$  が生成される.

## 2. $\tau$ 関数の量子化

前節では  $q$  差分版 Painlevé IV 方程式を例に Painlevé 系の量子化を量子群を使って遂行する方法について説明した. しかし, そこで量子化されたのは従属変数  $F_i, x_i, y_i$  たちとパラメーター変数  $a_i, t_i$  たちだけであり,  $\tau$  関数は一切登場しなかった.

この節では  $\tau$  関数の量子化を扱うことにする. より正確に言えば表現論と相性の良い量子化された  $\tau$  変数を導入し, その基本性質を調べる.

この文書で「量子化」は「Poisson 括弧を非可換環の交換子で置き換えることおよびその一般化」を意味しているのであった(第 3.1 節). Painlevé 系の解に付随する  $\tau$  関数を考えてしまうと, その意味での量子化を遂行できない. 量子化できるのは Poisson 構造が定められた変数たちの方である. だから, この文書のタイトルは「 $\tau$  関数の量子化」ではなく「 $\tau$  変数の量子化」とするべきだったかもしれない.

Painlevé 系の従属変数とパラメーター変数は Painlevé 系の舞台となる Poisson 多様体の座標変数であると考えられる. ゆえにそこに新たに  $\tau$  変数を付け加えるということは, Painlevé 系の舞台となる Poisson 多様体を拡張することを意味している.

$\tau$  変数の量子化のためには  $\tau$  変数と従属変数やパラメーター変数のあいだの Poisson 括弧が適切に定義されていなければいけない. しかし, 非常に残念なことに古典 Painlevé 系の論文で  $\tau$  と他の変数のあいだに Poisson 括弧を導入しているものを見付けることができなかった. だから, Poisson 括弧の情報無しに適切な量子  $\tau$  変数の定義を見付けなければいけない.

現時点でわかっていることは以下の通りである.

### 2.1. 量子 $\tau$ 変数の導入

$q$  差分版 Painlevé IV 方程式の量子化において出発点になる基礎となる代数は量子展開環  $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$  の下 Borel 部分代数  $U_q(\mathfrak{b}_-)$  だった. 以下ではこの場合を例に量子化された  $\tau$  変数を導入しよう. ただし, 可能な限り, 任意の対称化可能一般 Cartan 行列に付随する場合への一般化の仕方が分かるように説明したい.

$\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$  とおき, 量子展開環などは  $\mathbb{F}$  上の代数として定義されていると考えるこ

とにする. 以下で主に使うのは  $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_3)$  の下 Borel 部分代数全体ではなく, 下三角部分  $U_q(\mathfrak{n}_-) = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$  の方である.

まず,  $\mathcal{A}$  は  $U_q(\mathfrak{n}_-)$  のある剰余環を部分環として含む Ore 整域であると仮定し,  $Q(\mathcal{A})$  はその分数斜体であるとする:

$$Q(\mathcal{A}) = \{ab^{-1} \mid a, b \in \mathcal{A}, b \neq 0\} = \{b^{-1}a \mid a, b \in \mathcal{A}, b \neq 0\}.$$

たとえば第 1.4 節の  $\mathcal{B}$  はそのような  $\mathcal{A}$  の例になっている. 一般にアフィン型もしくは有限型の量子展開環の部分環の剰余環で整域になっているものはすべて Ore 整域になっている<sup>24</sup>.

次に, 記号  $\varepsilon_1^\vee, \varepsilon_2^\vee, \varepsilon_3^\vee, \delta^\vee$  で張られる自由  $\mathbb{Z}$  加群  $Q^\vee$  を考える<sup>25</sup>.  $Q^\vee$  をコルート格子と呼ぶことにする. 準周期性<sup>26</sup>

$$\varepsilon_{i+3}^\vee = \varepsilon_i^\vee - \delta^\vee$$

によってインデックスを整数全体に拡張しておく.  $Q^\vee$  の群環の基底を  $q^\gamma$  ( $\gamma \in Q^\vee$ ) と書き,  $Q^\vee$  の群環を  $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$  と書くことにする. ( $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$  は Laurent 多項式環である.)

$\varepsilon_i^\vee, \delta^\vee$  そのものおよび  $q^{\varepsilon_i^\vee}, q^{\delta^\vee}$  をパラメーター変数と呼ぶことにする.

以下,  $\mathcal{K}$  は  $\mathcal{A}$  の分数斜体  $Q(\mathcal{A})$  の部分斜体であると仮定する.

$\mathcal{K}$  と  $\mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$  のテンソル積代数を  $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}] = \mathcal{K} \otimes \mathbb{F}[q^{Q^\vee}]$  と表わす.  $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$  は  $\mathcal{K}$  にパラメーター変数を添加して得られる代数である.  $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$  の中でパラメーター変数  $q^\gamma$  ( $\gamma \in Q^\vee$ ) はすべての元と可換である.  $\mathcal{K}[q^{Q^\vee}]$  も Ore 整域になるので, その分数斜体を  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$  と表わす.

単純コルートに対応するパラメーター変数  $\alpha_i^\vee$  を次のように定める:

$$\alpha_i^\vee = \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee.$$

たとえば,  $\theta^\vee = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee = \varepsilon_1^\vee - \varepsilon_3^\vee$  とおくと  $\alpha_0^\vee = \delta^\vee - \theta^\vee$  であり, 周期性  $\alpha_{i+3}^\vee = \alpha_i^\vee$  が成立している.

コルート格子  $Q^\vee$  の双対格子を  $P$  と書き, ウェイト格子と呼び,  $\varepsilon_1^\vee, \varepsilon_2^\vee, \varepsilon_3^\vee, \delta^\vee$  の双対基底を  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Lambda_0$  と書く:

$$\langle \varepsilon_i^\vee, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \varepsilon_i^\vee, \Lambda_0 \rangle = 0, \quad \langle \delta^\vee, \varepsilon_j \rangle = 0, \quad \langle \delta^\vee, \Lambda_0 \rangle = 1.$$

$\varepsilon_i, \alpha_i, \Lambda_i \in X$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) を次の条件によって定める:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+3} &= \varepsilon_i, & \Lambda_i &= \Lambda_{i-1} + \varepsilon_i, \\ \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1}. \end{aligned}$$

このとき, 次が成立している:

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2),$$

<sup>24</sup> 我々が扱っている Weyl 群作用は双有理作用なので, 変数に作用した結果が変数の多項式ではなく, 変数の有理関数になってしまう. だから, その量子化を扱うためには非可換環における分数の構成が必要になる. 非可換における分数の構成は特に Ore 整域において非常にうまく行くことが知られている. Ore 整域に関する解説を [11], [12] に書いておいた. 非可換分数の理論に不慣れな読者はそれらを参照して欲しい.

<sup>25</sup>  $\delta^\vee$  はアフィン Lie 環の中心元 “ $c$ ” に対応している.

<sup>26</sup> この準周期性はパラメーター変数の準周期性  $t_{i+3} = r^{-1}t_i$  に対応している.  $\delta^\vee$  はアフィン Lie 環の中心元 “ $c$ ” に対応していたので, 準周期性は “レベル” の情報を持っていると考えることもできる.

$$\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_{j+3} \rangle = \langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle \quad (i, j \in \mathbb{Z}).$$

ここで  $[a_{ij}]_{i,j=0}^2$  は  $A_2^{(1)}$  型の一般 Cartan 行列である. そこで  $\alpha_i$  を単純ルートと呼び,  $\Lambda_i$  を基本ウェイトと呼び,  $P$  の元を整ウェイトと呼ぶことにする.

任意の  $\mu \in P$  に対して, パラメーター変数に作用する差分作用素  $\tau^\mu$  を次のように定める:

$$\tau^\mu(\gamma) = \gamma + \langle \gamma, \mu \rangle \quad (\gamma \in Q^\vee).$$

この作用は  $q^\gamma$  のタイプのパラメーター変数に自然に拡張される:

$$\tau^\mu(q^\gamma) = q^{\langle \gamma, \mu \rangle} q^\gamma \quad (\gamma \in Q^\vee).$$

そこで次の関係式によって  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$  に  $\tau^\mu$  ( $\mu \in P$ ) を添加してできる  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$  に作用する  $q$  差分作用素環  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$  が定義される:

$$\tau^\lambda a = a\tau^\lambda, \quad \tau^\lambda q^\gamma = q^{\langle \gamma, \lambda \rangle} q^\gamma \tau^\lambda, \quad \tau^\lambda \tau^\mu = \tau^{\lambda+\mu} \quad (a \in \mathcal{K}, \gamma \in Q^\vee, \lambda, \mu \in P).$$

実はこの差分作用素の意味で導入された記号  $\tau^\lambda$  たちが我々が必要としている量子化された  $\tau$  変数である. 量子  $\tau$  変数はパラメーター変数を動かす差分作用素なので, 量子化された場合にパラメーター変数たちは  $\tau$  変数たちと非可換になる.

特に基本的なのは基本ウェイトに対応する差分作用素  $\tau^{\Lambda_i}$  たちである. そこでそれらを  $\tau_i$  と書き, 基本  $\tau$  変数と呼ぶことにする:

$$\tau_i := \tau^{\Lambda_i} \quad (\text{基本 } \tau \text{ 変数}).$$

基本  $\tau$  変数  $\tau_i$  とは, 単純コルートに対応するパラメーター変数  $\alpha_i^\vee$  の正準共役演算子  $\partial/\partial\alpha_i^\vee$  の指数関数  $\exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$  のことだと考えることもできる. これが “ $\tau_i$ ” の正体である!

## 2.2. 量子 $\tau$ 変数への Weyl 群作用

コルート格子  $Q^\vee$  とウェイト格子  $P$  には次によって Weyl 群作用が定まる:

$$s_i(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee, \quad s_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i \quad (\gamma \in Q^\vee, \lambda \in P).$$

たとえば,  $i = 0, 1, 2$  について,

$$s_i(\Lambda_i) = \Lambda_i - \alpha_i = \Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} - \Lambda_i, \quad s_i(\Lambda_j) = \Lambda_j \quad (i \neq j).$$

この作用を  $\mathcal{K}$  の元を固定するように  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$  に拡張したものを  $\tilde{s}_i$  と書く. すなわち, 以下の条件によって  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$  の代数自己同型  $\tilde{s}_i$  を定める:

$$\tilde{s}_i(q^\gamma) = q^{s_i(\gamma)}, \quad \tilde{s}_i(\tau^\lambda) = \tau^{s_i(\lambda)}, \quad \tilde{s}_i(a) = a \quad (\gamma \in Q^\vee, \lambda \in P, a \in \mathcal{K}).$$

後で Painlevé 系の対称性としての  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$  への作用を  $s_i$  と書くことになる. それとは区別するために  $\tilde{s}_i$  という記号を使った.

代数  $\mathcal{A}$  における量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元  $\varphi_i$  の像を  $f_i$  と書くことにする. そして, 簡単のため, すべての  $i$  について  $f_i \neq 0$  であると仮定する<sup>27</sup>.

<sup>27</sup>  $f_i = 0$  となる場合には Weyl 群作用を構成するときに  $f_i^{\alpha_i^\vee}$  を 1 に置き換えればよい.  $f_i^{\alpha_i^\vee}$  を含む Verma 関係式の  $f_i^{\alpha_i^\vee}$  を 1 で置き換えて得られる関係式は自明に成立している. 相空間の次元が低い Painlevé 系の対称性を理解するためにはこのアイデアが必須である.

さらに,  $Q(\mathcal{A})$  の部分斜体  $\mathcal{K}$  は

$$f_i^\gamma \mathcal{K}(q^{Q^\vee}) f_i^{-\gamma} \subset \mathcal{K}(q^{Q^\vee}) \quad (\gamma \in Q^\vee)$$

を満たしていると仮定する. たとえば, Ore 整域  $\mathcal{A}$  が  $U_q(\mathfrak{n}_-)$  の剰余環になっているとき, その分数斜体  $Q(\mathcal{A})$  そのものを  $\mathcal{K}$  とするとその条件が満たされている.  $\mathcal{A}$  が第 1.4 節の代数  $B$  のとき, 以下の斜体はその条件を満たしている:

- 第 1.4 節の  $\tilde{a}_i, b_i, c_i$  たちから生成される部分斜体,
- 第 1.5 節の  $t_i, \hat{f}_i$  たちから生成される部分斜体,
- 第 1.6 節の  $t_i, x_i, y_i$  たちから生成される部分斜体,
- 第 1.8 節の  $a_i, F_i$  たちから生成される部分斜体.

Verma 関係式より,  $a_{ij} = a_{ji} = -1$  ならば

$$f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee + \alpha_i^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee} = f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee}$$

が成立している (第 3.4 節). 作用素として  $\tilde{s}_i f^\gamma = f^{s_i(\gamma)} \tilde{s}_i$  ( $f \in \mathcal{A}, \gamma \in Q^\vee$ ) が成立することをを使うと,

$$f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee} \tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i = f_j^{\alpha_j^\vee} \tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee} \tilde{s}_j$$

が成立することがわかる. このことから, 斜体  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$  に

$$s_i(x) = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})(\tilde{s}_i(x)) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (x \in \mathcal{K}(q^{Q^\vee}))$$

によって Weyl 群の代数自己同型作用を定められることがわかる.

ここで, すべての  $f_i$  が  $\mathcal{K}$  に含まれていると仮定する.

このとき  $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \tilde{s}_i$  の作用は  $q$  差分作用素環  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$  に拡張される. 公式  $\tau^\lambda f_i^\gamma = f_i^{\gamma + \langle \gamma, \lambda \rangle} \tau^\lambda$  ( $\gamma \in Q^\vee$ ) などを使うと, 次が成立していることがわかる:

$$s_i(\tau^\lambda) = f_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle} \tau^{s_i(\lambda)},$$

特に基本  $\tau$  変数への作用は以下ようになる:

$$s_i(\tau_i) = f_i \tau^{\Lambda_i - \alpha_i} = f_i \frac{\tau_i - 1}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i, j = 0, 1, 2; i \neq j).$$

たとえば, 整域  $\mathcal{A}$  が  $U_q(\mathfrak{n}_-)$  の剰余環で  $\mathcal{K} = Q(\mathcal{A})$  のとき, 以下の公式が成立していることがわかる:

$$s_i(q^\gamma) = q^{s_i(\gamma)}, \quad s_i(\tau^\lambda) = f_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle} \tau^{s_i(\lambda)},$$

$$s_i(f_j) = \begin{cases} f_j & (i = j \text{ or } a_{ij} = 0), \\ q^{\pm \alpha_i^\vee} f_j + [\alpha_i^\vee]_q (f_i f_j - q^{\pm 1} f_j f_i) f_i^{-1} & (a_{ij} = a_{ji} = -1). \end{cases}$$

これらの公式 (およびその対称化可能一般 Cartan 行列の場合への一般化) は文献 [19] で構成された Weyl 群双有理作用の量子化かつ  $q$  差分化になっている.

### 2.3. Weyl群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (1)

この節では  $\mathcal{A}$  は第 1.4 節の  $\mathcal{B}$  であるとし,  $\mathcal{K}$  は

$$f_i := (q^{-1} - q)^{-1} \tilde{a}_i^{-1} b_i \tilde{a}_{i+1}^{-1}, \quad d_i := (q^{-1} - q)^{-1} \tilde{a}_i^{-1} c_i \tilde{a}_{i+2}^{-1}$$

から生成される分数斜体  $Q(\mathcal{B})$  の部分斜体であると仮定する. このとき,  $f_i, d_i$  たちは

$$\begin{aligned} f_i f_{i+1} - q f_{i+1} f_i &= q d_i, \\ f_i d_{i-1} &= q d_{i-1} f_i, \quad f_i d_i = q^{-1} d_i f_i, \quad f_i d_{i+1} = d_{i+1} f_i, \\ d_i d_{i+2} &= q d_{i+2} d_i, \quad d_i d_{i-2} = q^{-1} d_{i-2} d_i \end{aligned}$$

を満たしている<sup>28</sup>. インデックスの 3 周期性に注意せよ. さらに第 2.2 節の記号のもとで  $t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$ ,  $r = q^{-\delta^\vee}$  とおき,  $t = (t_1, t_2, t_3)$  とおく. このとき準周期性  $t_{i+3} = r^{-1} t_i$  が成立している.  $z$  を  $rz$  に移す差分作用素  $r^{z\partial/\partial z}$  を  $T_{z,r}$  と書く:

$$T_{z,r} f(z) = r^{z\partial/\partial z} f(z) = f(rz).$$

行列  $D(t)$ ,  $\tilde{M}(z)$  と行列値差分作用素  $M(z)$  を次のように定める:

$$\begin{aligned} D(t) &= \text{diag}(t_1, t_2, t_3), \\ \tilde{M}(z) &= L_0^{-1} \tilde{L}(z) L_0^{-1} = L_0^{-1} L_1(z) L_2(z) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (q^{-1} - q)f_1 & (q^{-1} - q)d_1 \\ z(q^{-1} - q)d_2 & 1 & (q^{-1} - q)f_2 \\ z(q^{-1} - q)f_3 & z(q^{-1} - q)d_3 & 1 \end{bmatrix}, \\ M(z) &= D(t) \tilde{M}(r^{-1}z) D(t) T_{z,r}^2 \\ &= \begin{bmatrix} t_1^2 & (q^{-1} - q)t_1 f_1 t_2 & (q^{-1} - q)t_1 d_1 t_3 \\ z(q^{-1} - q)t_2 d_2 t_4 & t_2^2 & (q^{-1} - q)t_2 d_2 t_3 \\ z(q^{-1} - q)t_3 f_3 t_4 & z(q^{-1} - q)t_3 d_3 t_5 & t_3^2 \end{bmatrix} T_{z,r}^2. \end{aligned}$$

行列値差分作用素  $M(z)$  を  $D(t)^2 T_{z,r}^2$  に“対角化”しよう.  $\mathcal{K}[[z]]$  の元を成分に持つ  $3 \times 3$  行列  $U(z) = [u_{ij}(z)]$  で,  $U(0)$  が対角線が 1 の上三角行列になり,

$$M(z) = U(z) D(t)^2 T_{z,r}^2 U(z)^{-1}$$

を満たすものが唯一存在する.  $g_i \in \mathcal{K}$  と行列  $G_i$  を次のように定める:

$$g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{(q^{-1} - q)t_i f_i t_{i+1}} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{f_i}, \quad G_i = y_i(g_i).$$

このとき,  $u_{i,i+1}(0) = -g_i^{-1}$  であつ, 第 2.2 節の方法で定めた Weyl 群作用について,

$$\begin{aligned} s_i(M(z)) &= G_i M(z) G_i^{-1}, \\ \pi(M(z)) &= (\Lambda_3(z) T_{z,r}) M(z) (\Lambda_3(z) T_{z,r})^{-1} \end{aligned}$$

<sup>28</sup>  $m = 4$  の場合には例外的に  $d_i$  どうしは可換になる.  $m \geq 4$  の場合には  $f_i d_{i-2} = q^{-1} d_{i-2} f_i$ ,  $f_i d_{i+1} = q d_{i+1} f_i$  となり,  $m = 3$  の場合には例外的に  $f_i$  と  $d_{i-2} = d_{i+1}$  が可換になる.

が成立している. これを Weyl 群作用の **Lax** 表示と呼ぶ.

$z_i = \tau^{\varepsilon_i^\vee}$  とおき, 対角行列  $D_Z$  と行列  $Z(z)$  を

$$D_Z = \text{diag}(z_1, z_2, z_3), \quad Z(z) = U(z)D_Z$$

と定める. 行列  $S_i^g, S_i$  を次のように定める:

$$S_1^g = \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee + 1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee - 1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee + 1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee - 1]_q & 0 \end{bmatrix}.$$

このとき以下が成立している:

$$M(z) = Z(z)D((qt)T_{z,r})^2Z(z)^{-1} = Z(z)D(qt)^2Z(r^2z)^{-1}T_{z,r}^2,$$

$$s_i(U(z)) = G_iU(z)S_i^g,$$

$$s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1}D_ZS_i,$$

$$s_i(D(t)T_{z,r}) = S_i^{-1}D(t)T_{z,r}S_i$$

$$s_i(Z(z)) = G_iZ(z)S_i.$$

$\pi$  の作用はどれも次の形になっている:

$$\pi(A(z)) = (\Lambda_3(z)T_{z,r})A(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \quad (A(z) = U(z), D_Z, D(t)T_{z,r}, Z(z)).$$

これを Weyl 群作用の **Sato-Wilson** 表示と呼ぶ.

#### 2.4. 基本 $\tau$ 変数への Weyl 群作用の結果の正則性

前々節の構成が対称化可能一般 Cartan 行列に付随する場合にまで一般化され, 次の定理が成立している.

**定理 2.1** ([16]). 基本  $\tau$  変数への Weyl 群作用の結果は  $f_i, q^{\pm\alpha_i^\vee}$  たちについて多項式になる.  $\square$

整ウエイト  $\mu \in X$  が任意の  $i$  について  $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \geq 0$  を満たしているとき,  $\mu$  をドミナント整ウエイトと呼ぶ. ドミナント整ウエイト全体の集合を  $P_+$  と書く. Weyl 群を  $W$  と書く.

ドミナント整ウエイト  $\mu$  と Weyl 群の元  $w$  によって  $w(\mu)$  と表わされる整ウエイト全体の集合を  $WP_+$  と書く.  $\nu \in WP_+$  を  $\nu = w(\mu), w \in W, \mu \in P_+$  と書くとき  $w(\tau^\mu)$  は  $\nu$  だけから決まり,  $w$  と  $\mu$  の取り方によらない. そこで  $\nu = w(\mu) \in WP_+$  に対して,  $\tau(\nu) = w(\tau^\mu)$  とおく.

実際に証明できているのは次の結果である:  $\mathcal{A}$  が  $U_q(\mathfrak{n}_-)$  の像に一致し,  $\mathcal{K} = Q(\mathcal{A})$  のとき, すべての  $f_i$  が 0 でないならば, 任意の  $\nu \in WP_+$  に対して

$$\tau(\nu) = w(\tau^\mu) \in \mathcal{A}[q^{Q^\vee}]\tau^\nu \quad (\nu = w(\mu), w \in W, \mu \in P_+).$$

証明には表現論における BGG 圏  $\mathcal{O}$  に関する理論を使う ([16]). 証明の概略を以下で説明しよう.

以下,  $\mu, \lambda \in P_+$  であるとする.

$w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$  は Weyl 群の元  $w$  の簡約表示であるとする. このとき

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \tilde{s}_{i_N} \cdots \tilde{s}_{i_2} \tilde{s}_{i_1}, & \gamma_k &= s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee), \\ X &= f_{i_1}^{\gamma_1} \cdots f_{i_N}^{\gamma_N}, & Y &= f_{i_1}^{\gamma_1 + \langle \gamma_1, \mu \rangle} \cdots f_{i_N}^{\gamma_N + \langle \gamma_N, \mu \rangle} \end{aligned}$$

とおくと,  $\tau(w(\mu)) = w(\tau^\mu)$  は次のように表わされる:

$$w(\tau^\mu) = \tilde{w} (X^{-1}Y) \tau^{w(\mu)}.$$

ゆえに  $Y$  が  $X$  で左から割り切れること  $Y \in X\mathcal{A}[q^{Q^\vee}]$  を示せばよい. そのためには,  $X^{-1}Y \in \mathcal{K}(q^{Q^\vee})$  なので,  $\alpha_i^\vee$  たちに非負の整数を代入した場合に割り切れることを示せば十分である. そしてそのためには  $\mathcal{A} = U_q(\mathfrak{n}_-)$ ,  $f_i = \varphi_i$  の場合に割り切れることを示せば十分なので以下ではそのように仮定する.

$\rho$  は  $\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$  をみたすウエイトであるとし, Weyl 群の元  $w$  とウエイト  $\lambda$  に対して,  $w$  の  $\lambda$  への shifted action を

$$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$$

と定める. このとき

$$\lambda_k = (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}) \circ \lambda, \quad f_w^\lambda = f_{i_N}^{\langle \alpha_{i_N}^\vee, \lambda_N \rangle + 1} \cdots f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda_1 \rangle + 1}$$

とおくと,  $X, Y$  の積の順序を逆転し, 各  $\alpha_i^\vee$  に非負の整数  $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$  を代入した結果はそれぞれ  $f_w^\lambda, f_w^{\lambda+\mu}$  になる. ゆえに  $f_w^{\lambda+\mu} \in U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda$  を示せばよい.

$f_w^{\lambda+\mu} \in U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda$  の証明が次の可換図式の存在に帰着することを示そう:

$$\begin{array}{ccc} M(\lambda) \otimes L(\mu) & \longleftarrow & M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M(\lambda + \mu) & \longleftarrow & M(w \circ (\lambda + \mu)). \end{array}$$

この可換図式の内容について説明しよう.  $M(\lambda)$  と  $L(\lambda)$  はそれぞれ最高ウエイト  $\lambda$  の Verma 加群とその既約商加群であるとし, それぞれの最高ウエイトベクトルを  $v_\lambda, u_\lambda$  と書くことにする. このとき  $f_w^\lambda v_\lambda$  は  $M(\lambda)$  におけるウエイト  $w \circ \lambda$  の特異ベクトル (定数倍を除いて唯一) になる. ゆえに  $v_{w \circ \lambda}$  を  $f_w^\lambda v_\lambda$  に移す  $M(w \circ \lambda)$  から  $M(\lambda)$  への準同型写像が得られる. 上の図式の横向きの矢線はこの種の準同型とこの種の準同型から誘導された準同型写像である. 左側の上向きの矢線は  $v_{\lambda+\mu}$  を  $v_\lambda \otimes u_\mu$  に移す準同型写像である. 上の図式を可換にするような右側の上向きの矢線 (準同型写像) が存在すると仮定する.

上の可換図式における  $v_{w \circ (\lambda + \mu)} \in M(w \circ (\lambda + \mu))$  の  $M(\lambda) \otimes L(\mu)$  における像を考える.  $M(\lambda + \mu)$  を経由して得られる像は  $\Delta(f_w^{\lambda+\mu})(v_\lambda \otimes u_\mu)$  である (ここで  $\Delta$  は余積を表わす). 上の可換図式より, それは  $M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu)$  の  $M(\lambda) \otimes L(\mu)$  における像  $(U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda v_\lambda) \otimes L(\mu)$  に含まれる:

$$(U_q(\mathfrak{n}_-) f_w^\lambda v_\lambda) \otimes L(\mu) \ni \Delta(f_w^{\lambda+\mu})(v_\lambda \otimes u_\mu) = (a f_w^{\lambda+\mu} v_\lambda) \otimes u_\mu + (\text{lower terms}).$$

ここで  $a$  は 0 でない定数であり, “(lower terms)” の部分は  $M(\lambda)$  のベクトルとウェイトが  $\mu$  より小さな  $L(\mu)$  のウェイトベクトルのテンソル積の和である. これより  $U_q(\mathfrak{n}_-)f_w^\lambda \ni f_w^{\lambda+\mu}$  となることがわかる.

上の可換図式は Kac-Moody 代数の場合には [4] の結果より存在することが知られている (translation functor の理論より, [7] Section 2 も参照). ゆえに量子展開環の場合にも [5] の結果より存在することがわかる ( $U(\mathfrak{g})$  の BGG 圏  $\mathcal{O}$  と  $U_q(\mathfrak{g})$  の BGG 圏  $\mathcal{O}$  の braided tensor category として圏同値より).

要するに  $\mu \in P_+$  に対する  $w(\tau^\mu)$  が  $f_i$  について多項式になるという結果は任意の  $\lambda \in P_+$  に対して  $M(\lambda+\mu)$  のウェイト  $w \circ (\lambda+\mu)$  の特異ベクトルが  $M(\lambda)$  のウェイト  $w \circ \lambda$  の特異ベクトルで割り切れるという結果から導かれる.

## 2.5. Weyl 群作用の Lax-Sato-Wilson 表示 (2)

この節では  $\mathcal{A}$  は第 1.4 節の代数  $\mathcal{B}$  であるとし,  $\mathcal{K}$  は第 1.5 節の  $t_i, \hat{f}_i$  たちで生成される斜体であるとし, 前節までとは少し異なる Weyl 群作用を  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})[\tau^P]$  上に定める.

$U_q(\mathfrak{n}_-)$  の Chevalley 生成元の取り方には定数倍の不定性があり, 公式  $s_i(\tau_i) = f_i \tau_i$  より, Weyl 群の  $\tau$  変数への作用の仕方は Chevalley 生成元を定数倍すれば変わる.  $\tau$  変数への Weyl 群作用にはもっと大きな不定性がある.

前節までの議論から  $f_i$  たちが Verma 関係式を満たしていれば,  $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$  の形で Weyl 群作用を定めるには十分である. さらに  $q$  べき因子の違いを除いて  $A$  と  $B$  が等しいことを  $A \sim B$  と書くことにすると, Verma 関係式そのものがびったり成立している必要はなく,  $f_i$  たちが  $f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee + \alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee} \sim f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_j^\vee}$  ( $a_{ij} = a_{ji} = -1$ ) のタイプの弱い Verma 関係式を満たしていれば,  $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$  によって Weyl 群作用を定めることができる.  $f_i$  たちが Verma 関係式を満たしており,  $u_i \in Q(\mathcal{A})$  たちの積は  $q$  べき因子の違いを除いて可換であり,  $f_i u_j = u_j f_i$  が成立しているとき,  $u_i f_i$  たちは弱い Verma 関係式を満たしている. だから  $s_i = \text{Ad}((u_i f_i)^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$  によって Weyl 群作用を定めることもできる. このとき  $s_i(\tau_i) = u_i f_i \tau_i$  となる.

この構成を第 1.5 節の  $\hat{f}_i$  たちに適用しよう.  $\mathcal{A}$  は第 1.4 節の  $\mathcal{B}$  であり,  $\mathcal{K}$  は第 1.5 節の  $t_i, \hat{f}_i$  たちで生成される斜体であるとする.  $\hat{f}_i$  は  $f_i$  に  $f_i$  たちと可換な  $c_j^{\pm 1}$  たちの積をかけたものになっており,  $c_j$  たちの積は  $q$  べき因子の違いを除いて可換である. さらに  $\hat{f}_i$  たちと  $t_j$  たちは可換であり,  $t_{i+3} = r^{-1}t_i, q^{-\varepsilon_{i+3}^\vee} = q^{\delta^\vee} q^{-\varepsilon_i^\vee}$  が成立しているので,  $r = q^{-\delta^\vee}, t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$  と同一視することにする. さらに, 第 1.5 節と同様に  $\tilde{s}_i$  を定めておく. このように設定を変えることによって,  $\mathcal{K}(q^{Q^\vee})$  の代わりに  $\mathcal{K}$  そのものを扱えばよいことになる.  $\pi$  の  $\mathcal{K}$  への作用は第 1.5 節と同様に定めておく.

$q$  差分作用素環  $\mathcal{K}[\tau^P]$  に  $s_i = \text{Ad}(\hat{f}_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$  によって Weyl 群作用を定めることができる. このとき, 以下の公式が成立している<sup>29</sup>:

$$\begin{aligned} s_i(\tau_i) &= \hat{f}_i \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i}, & s_i(\tau_j) &= \tau_j \quad (i, j = 0, 1, 2, i \neq j), \\ s_i(t_i) &= t_{i+1}, & s_i(t_{i+1}) &= t_i, & s_i(t_{i+2}) &= t_{i+2}, \\ s_i(\hat{b}_i) &= \hat{b}_i, & s_i(\hat{b}_{i+1}) &= \hat{b}_{i+1} + (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, & s_i(\hat{b}_{i-1}) &= \hat{b}_{i-1} - (t_i^2 - t_{i+1}^2)\hat{b}_i^{-1}, \\ \pi(t_j) &= t_{j+1}, & \pi(\hat{b}_j) &= \hat{b}_{j+1}. \end{aligned}$$

<sup>29</sup>  $\hat{b}_i = -(q - q^{-1})t_i \hat{f}_i t_{i+1}$  を使えばそれらの公式から  $s_i(\hat{f}_i)$  を計算することができる.

新しい公式は最初の行だけである, 残りの公式はすでに第 1.5 節で得られている. 第 1.5 節では  $s_i$  の  $t_i$  と  $\hat{b}_i$  たちへの作用を行列  $\widehat{L}(z)$  を用いて記述する公式 (Lax 表示) が得られている. 以下では  $s_i$  の  $\tau$  変数たちへの作用の行列表示 (Sato-Wilson 表示) について説明する.

以下の構成は第 2.3 節と完全に同様である.  $t = (t_1, t_2, t_3)$  とおき,

$$D(t) = \text{diag}(t_1, t_2, t_3)$$

と定め,  $z$  を  $rz$  に移す差分作用素を  $T_{z,r}$  と書き, 行列値差分作用素  $\widehat{M}(z)$  を

$$\widehat{M}(z) = \widehat{L}(z)T_{z,r}^2$$

と定める. この行列値差分作用素  $\widehat{M}(z)$  を  $(D(t)T_{z,r})^2$  に“対角化”しよう.  $\mathcal{K}[[z]]$  の元を成分に持つ  $3 \times 3$  行列  $U(z) = [u_{ij}(z)]$  で  $U(0)$  が対角成分がすべて 1 の上三角行列になり,

$$\widehat{M}(z) = U(z)(D(t)T_{z,r})^2U(z)^{-1}, \quad \text{すなわち } \widehat{L}(z) = U(z)D(t)^2U(r^2z)^{-1}$$

を満たすものが一意に存在する. この一意性を使うと  $\widehat{L}(z)$  への Weyl 群作用の公式から  $U(z)$  への Weyl 群作用の公式を得ることができる. 結果を以下で説明しよう.

$g_i \in \mathcal{K}$  と行列  $G_i$  を次のように定める ( $i = 1, 2$ ):

$$g_i = \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{\hat{b}_i} = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{\hat{f}_i}, \quad G_i = y_i(g_i).$$

このとき,  $u_{i,i+1}(0) = -g_i^{-1}$  となり,

$$\begin{aligned} s_i(\widehat{M}(z)) &= G_i \widehat{M}(z) G_i^{-1}, \\ \pi(\widehat{M}(z)) &= (\Lambda_3(z)T_{z,r}) \widehat{M}(z) (\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \end{aligned}$$

が成立している. これを Weyl 群作用の **Lax** 表示と呼ぶ.

$z_i = \tau^{\varepsilon_i}$  とおき, 対角行列  $D_Z$  と行列  $Z(z)$  を

$$D_Z = \text{diag}(z_1, z_2, z_3), \quad Z(z) = U(z)D_Z$$

と定める. 行列  $S_i^g, S_i$  を次のように定める:

$$\begin{aligned} S_1^g &= \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee + 1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee - 1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee + 1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee - 1]_q & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき以下が成立している:

$$\widehat{M}(z) = Z(z)(D(q\tau)T_{z,r})^2Z(z)^{-1} = Z(z)D(q\tau)^2Z(r^2z)^{-1}T_{z,r}^2,$$

$$\begin{aligned}
s_i(U(z)) &= G_i U(z) S_i^g, \\
s_i(D_Z) &= (S_i^g)^{-1} D_Z S_i, \\
s_i(D(t)T_{z,r}) &= S_i^{-1} D(t)T_{z,r} S_i \\
s_i(Z(z)) &= G_i Z(z) S_i.
\end{aligned}$$

$\pi$  の作用はどれも次の形になっている:

$$\pi(A(z)) = (\Lambda_3(z)T_{z,r})X(z)(\Lambda_3(z)T_{z,r})^{-1} \quad (A(z) = U(z), D_Z, D(t)T_{z,r}, Z(z)).$$

これを Weyl 群作用の **Sato-Wilson 表示** と呼ぶ.

## 2.6. まとめ

量子化された  $\tau$  関数 (より正確に言えば  $\tau$  変数) は単純コルートに対応するパラメーター変数  $\alpha_i^\vee$  の正準共役  $\partial/\partial\alpha_i^\vee$  の指数関数  $\tau_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$  のことである.

量子化された Weyl 群作用は  $s_i = \text{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$  の形式で構成されたのでそれをそのまま  $\tau_i$  たちに作用させれば, Weyl 群作用が量子化された  $\tau$  変数まで拡張される.

その作用のもとで  $\mu \in P_+$  に対する  $w(\tau^\mu)$  は従属変数  $f_i$  たちとパラメーター変数  $q^{\pm\alpha_i^\vee}$  たちについて多項式になる.

$\tau$  変数への Weyl 群作用は Sato-Wilson 表示を持つ.

## 3. 付録: 「量子化」と「変数べき $f^\gamma$ の構成法」について

この付録では (正準) 量子化と古典極限についておよび非可換環における変数  $\gamma$  によるべき  $f^\gamma$  の構成法について解説する.

### 3.1. $q$ 差分化と量子化の区別

「 $q$  差分化」と「量子化」という用語を厳密に区別して用いたい.

微分  $df(x)/dx$  を用いた事柄をパラメーター  $q$  で変形して,  $q$  差分

$$T_{x,q}f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

を用いた事柄に拡張することおよびその適切な一般化を  $q$  差分化と呼ぶことにする. 逆に  $q \rightarrow 1$  で  $T_{q,x} \rightarrow d/dx$  の極限を取る操作を 微分極限と呼ぶことにする. そして, 微分を用いて記述される数学的対象を微分版と呼び,  $q$  差分を用いて記述される数学的対象を  $q$  差分版と呼ぶことにする.

Poisson 括弧  $\{p, x\} = 1$  を持つ代数に関する事柄を交換関係

$$[p, x] = px - xp = 1$$

を満たす非可換環に関する事柄に拡張することおよびその適切な一般化を正準量子化と呼ぶことにする. 以下では簡単のため正準量子化を単に量子化と呼ぶことにする.

たとえば, 座標  $x$  を持つ直線の余接束上の函数環の自然な量子化は  $x$  と  $d/dx$  で生成される微分作用素環である.

たとえば, Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}$  から生成される対称代数  $S(\mathfrak{g})$  (これは  $\mathfrak{g}^*$  上の函数環とみなされる) の量子化である. さらに  $\mathfrak{g}$  が Kac-Moody 代数ならば, 量子展開環  $U_q(\mathfrak{g})$  は普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  の代数としての  $q$  差分化であるとみなせる. 代数

として  $U_q(\mathfrak{g})$  を  $U(\mathfrak{g})$  の量子化とはみなさない.  $U(\mathfrak{g})$  は不変微分作用素環とみなせるので微分版の数学的対象とみなされ, それとの対比で  $U_q(\mathfrak{g})$  は代数として  $q$  差分版の数学的対象とみなされる. 代数として量子展開環  $U_q(\mathfrak{g})$  は対称代数  $S(\mathfrak{g})$  の量子化かつ  $q$  差分化になっている.

一方,  $U_q(\mathfrak{g})$  の余積は非余可換であり,  $q \rightarrow 1$  の極限で余可換な  $U(\mathfrak{g})$  の余積が再現されるので, 量子展開環  $U_q(\mathfrak{g})$  は余代数として普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  の量子化だとみなせる.

量子展開環  $U_q(\mathfrak{g})$  は代数として普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  の  $q$  差分化になっており, 余代数としては普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  の量子化になっている. 代数としての  $q$  差分化と余代数としての量子化のためのパラメーターの両方が同じ  $q$  になっているので混乱しないように注意が必要である.

### 3.2. 古典極限と Poisson 構造

パラメーター  $\hbar$  を含む可換とは限らない環  $A_\hbar$  に対して,  $\hbar \rightarrow 0$  の極限で得られる環 (すなわち  $\hbar$  で生成されるイデアルで  $A_\hbar$  を割ってできる剰余環  $A_\hbar/\hbar A_\hbar$ ) を  $A_0$  と書き,  $a \in A_\hbar$  の  $A_0$  での像を  $\bar{a}$  と書くことにする.

$A_0$  は可換環になると仮定する. このとき  $A_\hbar$  は  $A_0$  の量子化であるという. 仮定より, 任意の  $a, b \in A_\hbar$  の交換子  $[a, b] = ab - ba$  は  $\hbar$  で割り切れる. 任意の  $a, b \in A_\hbar$  に対して,  $\hbar^{-1}[a, b] \in A_\hbar$  の  $A_0$  での像は  $a, b$  の像だけから決まることがわかり, 可換環  $A_0$  に Poisson 構造を  $\{\bar{a}, \bar{b}\} = \overline{\hbar^{-1}[a, b]}$  によって定めることができる. このように構成された Poisson 代数  $A_0$  を  $A_\hbar$  の古典極限と呼ぶことにする.

たとえば,  $p = d/dx$  と  $x$  から  $\mathbb{C}[\hbar]$  上生成されるパラメーター  $\hbar$  付きの微分作用素環  $\mathbb{C}[\hbar, x, d/dx]$  を考え,  $p = \hbar d/dx$  と  $x$  から  $\mathbb{C}[\hbar]$  上生成される部分代数を  $A_\hbar$  と書くことにする. このとき  $A_0 = A_\hbar/\hbar A_\hbar$  は  $\bar{p}$  と  $\bar{x}$  で生成される可換な多項式環になり,  $\hbar^{-1}[p, x] = 1$  なので,  $A_0 = \mathbb{C}[\bar{p}, \bar{x}]$  には  $\{\bar{p}, \bar{x}\} = 1$  で自然に Poisson 構造が定まる. これが上の意味での古典極限の典型例である.

$\mathbb{C}$  上の Lie 環  $\mathfrak{g}$  の普遍展開環  $U(\mathfrak{g})$  の古典極限は以下のように構成される. まず,  $U(\mathfrak{g})$  の  $\mathbb{C}[\hbar]$  による係数拡大  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[\hbar]$  を考える. そして,  $\hbar A$  ( $A \in \mathfrak{g}$ ) たちから  $\mathbb{C}[\hbar]$  上生成されるその部分代数を  $A_\hbar$  とする. このとき  $A_0 = A_\hbar/\hbar A_\hbar$  は可換環になり,  $\hbar \mathfrak{g}$  から  $\mathbb{C}$  上生成される対称代数  $S(\hbar \mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})$  に同型になる. これを  $U(\mathfrak{g})$  の古典極限と呼ぶ. さらに,  $A, B \in \mathfrak{g}$  に対して  $[A, B] = C$  が成立しているとき,  $\hbar^{-1}[\hbar A, \hbar B] = \hbar C$  となるので,  $\hbar A, \hbar B, \hbar C$  の  $A_0$  での像をそれぞれ  $a, b, c$  と書くと  $A_0$  において  $\{a, b\} = c$  が成立している. 要するに Lie 環における Lie ブラケット  $[, ]$  をそのまま Poisson 括弧  $\{, \}$  に置き換えるだけで古典極限における Poisson 構造が得られる.

生成元  $x, y$  と基本関係式  $xy = qyx$  で定義される  $\mathbb{C}[q]$  上の代数  $A_q$  を考える. (古典極限は  $q \rightarrow 1$  で得られる.  $\hbar = q-1$  とおいて考えよ.) このとき  $[x, y] = xy - yx = (q-1)yx$  が成立しているので,  $A_{q=1} = A_q/(q-1)A_q$  は可換環になり,  $A_{q=1}$  に自然に入る Poisson 構造は  $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \bar{x}\bar{y}$  を満たしている. このことから  $\{a, b\} = ab$  型の Poisson 構造の量子化は  $xy = qyx$  型の交換関係で定義される代数を用いて構成可能なことがわかる. この例は  $q$  差分化された場合の量子化の構成において最も基本的である.

古典極限の形だけがわかっていても, 可能な量子化は無数にある. 我々が欲しいのは古典極限のレベルで成立している多くの結果が保たれるような良い量子化である.  $q$  差分化されていない微分版の場合には, 手頃な手間で可能な直線的な手計算のみで良い量子化を構成可能なことが多いが,  $q$  差分化された場合はそうではない. 背景に隠れてい

る代数構造を明らかにしないと良い量子化を作ることは難しい。

しかも実際には古典極限における Poisson 構造の定義式が明らかになっていない場合が多数ある。そのような場合には量子化はさらに困難になる<sup>30</sup>。

### 3.3. 非可換環の元の変数によるべきを導入する方法

非可換環の元  $f$  の変数  $\gamma$  によるべき  $f^\gamma$  を純代数的に構成する方法を解説しておく。さらに次の節で量子展開環の下三角部分の Chevalley 生成元のべきが満たす関係式の証明も簡単に解説しておく。

$A$  は可換とは限らない環であるとする。

$X$  は空でない集合であるとする。このとき、べき集合  $A^X$  には自然に環構造が入る。以下では、この状況の下で、 $A$  と単射準同型写像  $A \rightarrow A^X, a \mapsto (a)_{x \in X}$  による像を同一視することにする。これによって  $A$  は  $A^X$  の部分環とみなされる。

変数  $\gamma$  による  $A$  の可逆元  $f$  のべき  $f^\gamma$  は環  $A^{\mathbb{Z}}$  の元として  $f^\gamma = (f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  と定義される。任意の  $k \in \mathbb{Z}$  について  $f^k$  が満たしている関係式を  $f^\gamma$  も満たしている。 $A^{\mathbb{Z}}$  に埋め込まれた  $A$  と  $f^\gamma$  から生成された  $A^{\mathbb{Z}}$  の部分環を考えれば、 $A$  に  $f$  の変数  $\gamma$  によるべき  $f^\gamma$  を付け加えた環が得られる。

より一般に、変数の組  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  の整係数多項式  $p(\gamma)$  に対して、 $f^{p(\gamma)}$  は  $A^{\mathbb{Z}^N}$  の元として  $f^{p(\gamma)} = (f^{p(k)})_{k \in \mathbb{Z}^N}$  と定義される。このように定義された  $f$  のべきは変数  $\gamma_i$  に任意の整数の組を代入したときに成立しているすべての関係式をみたしている。たとえば

$$f^\gamma f^{-\gamma} = f^{-\gamma} f^\gamma = 1, \quad f^\lambda f^\mu = f^{\lambda+\mu}$$

が成立している。さらに、もしも  $A$  の可逆元  $f, g$  と中心可逆元  $c$  が

$$fg = cgf$$

という関係式を満たしていれば

$$f^\beta g^\gamma = c^{\beta\gamma} g^\gamma f^\beta$$

が成立している。

他にも、たとえば、もしも  $A$  の可逆元  $f, g$  が

$$f^k g^{k+l} f^l = g^l f^{k+l} g^k \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

という関係式を満たしていれば

$$f^\beta g^{\beta+\gamma} f^\gamma = g^\gamma f^{\beta+\gamma} g^\beta.$$

も成立している。

このように単純な処方箋で、自然な関係式を満たしている変数  $\gamma$  によるべき  $f^\gamma$  を非可換環に自由に付け加えることができる。

<sup>30</sup> 古典 Painlevé 系の研究者の方々にお願い。Poisson 構造も論文に書いて下さい。お願い致します。

### 3.4. Chevalley 生成元のべきが満たす関係式

いつものように  $q$  二項係数を次のように定めておく:

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [k]_q,$$

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$\mathbb{C}(q)$  上の代数  $\mathcal{A}$  の可逆元  $f, g$  はを任意に取り, 非負の整数  $k$  に対する  $\text{ad}_q(f)^k(g) \in \mathcal{A}$  を次のように定める:

$$\text{ad}_q(f)(g) = fg - q^{-1}gf, \quad \text{ad}_q(f)^{k+1}(g) = f \text{ad}_q(f)^k(g) - q^{2k-1} \text{ad}_q(f)^k(g)f.$$

このとき, すべての整数  $l$  について次が成立することを帰納法で示せる<sup>31</sup>:

$$f^l g f^{-l} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k-1)(l-k)} \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}_q \text{ad}_q(f)^k(g) f^{-k}.$$

$k > l$  のとき  $q$  二項係数は 0 になるので右辺は実際には有限和である.

ここで, 次の  $q$ -Serre 関係式が成立していると仮定する:

$$\text{ad}_q(f)^2(g) = f^2 g - (q + q^{-1})fgf + gf^2 = 0.$$

このとき, 上の公式より次が成立する:

$$f^l g f^{-l} = q^{-l}g + [l]_q (fg - q^{-1}gf) f^{-1}.$$

ゆえに前節の構成によって変数によるべき  $f^\gamma$  は次を満たしている:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = q^{-\gamma}g + [\gamma]_q (fg - q^{-1}gf) f^{-1}.$$

この右辺は次のように変形できる:

$$f^\gamma g f^{-\gamma} = [1 - \gamma]_q g + [\gamma]_q f g f^{-1} = q^\gamma g + [\gamma]_q (fg - qg f) f^{-1}.$$

さらに, 次の  $q$ -Serre 関係式も成立していると仮定する:

$$g^2 f - (q + q^{-1})gfg + fg^2 = 0.$$

このとき量子展開環の表現論によって任意の非負の整数  $k, l$  に対して

$$f^k g^{k+l} f^l = g^l f^{k+l} g^k$$

が成立することが知られている<sup>32</sup>. これを **Verma 関係式** と呼ぶ<sup>33</sup>.  $k, l$  が両方非負の整数の場合の Verma 関係式から,  $k, l$  のどちらか片方もしくは両方が負の整数の場合にも同じ公式が成立することが導かれる<sup>34</sup>.

<sup>31</sup>  $l$  が正の場合には両辺に右から  $f^l$  をかけて得られる公式を帰納法で証明し,  $l$  が負の場合には両辺に左から  $f_i^{-l}$  をかけて得られる公式を証明する.

<sup>32</sup> Verma 加群のあいだの準同型がどれだけ存在するかに関する結果の一部である.  $q$ -Serre 関係式を用いた直接の計算によって証明することもそう難しくない.

<sup>33</sup> より一般の Verma 関係式とその証明については教科書 [17] の Proposition 39.3.7 を参照せよ.

<sup>34</sup> たとえば  $k$  が負で  $k+l$  が非負の場合の Verma 関係式は, 両辺に左から  $f^{-k}$  をかけて右から  $g^{-k}$  をかけると, 非負の整数べきのみを含む Verma 関係式の形になる.

ゆえに、前節の構成によって、整数べきを変数べきで置き換えた次の公式が成立している:

$$f^\beta g^{\beta+\gamma} f^\gamma = g^\gamma f^{\beta+\gamma} g^\beta.$$

これも Verma 関係式と呼ぶ。

## 参考文献

- [1] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., and Zamolodchikov, A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Phys. B* 241 (1984), no. 2, 333-380.
- [2] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. *GAFA 2000* (Tel Aviv, 1999). *Geom. Funct. Anal.* 2000, Special Volume, Part I, 188-236. [arXiv:math/9912105](https://arxiv.org/abs/math/9912105)
- [3] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases. *Quantum groups*, 13-88, *Contemp. Math.*, 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. [arXiv:math/0601391](https://arxiv.org/abs/math/0601391)
- [4] Deodhar, Vinay V., Gabber, Ofer, and Kac, Victor. Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras. *Adv. in Math.* 45 (1982), no. 1, 92-116.
- [5] Etingof, Pavel and Kazhdan, David. Quantization of Lie bialgebras. VI. Quantization of generalized Kac-Moody algebras. *Transform. Groups* 13 (2008), no. 3-4, 527-539. [arXiv:math/0004042](https://arxiv.org/abs/math/0004042)
- [6] Hasegawa, Koji. Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 275-288, *Adv. Stud. Pure Math.*, 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. [arXiv:math/0703036](https://arxiv.org/abs/math/0703036)
- [7] Kac, Victor G. and Wakimoto, Minoru. Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 85 (1988), no. 14, 4956-4960.
- [8] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. A study on the fourth  $q$ -Painlevé equation. *J. Phys. A* 34 (2001), no. 41, 8563-8581. [arXiv:nlin/0012063](https://arxiv.org/abs/nlin/0012063)
- [9] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko. Discrete dynamical systems with  $W(A_{m-1}^{(1)}(1) \times A_{n-1}^{(1)})$  symmetry. *Lett. Math. Phys.* 60 (2002), no. 3, 211-219. [arXiv:nlin/0106029](https://arxiv.org/abs/nlin/0106029)
- [10] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi, and Yamada, Yasuhiko.  $q$ -Painlevé systems arising from  $q$ -KP hierarchy. *Lett. Math. Phys.* 62 (2002), no. 3, 259-268. [arXiv:nlin/0112045](https://arxiv.org/abs/nlin/0112045)
- [11] 黒木玄. 非可換環の局所化の演習問題. 演習問題集 10 pages, 2007年. [http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20070216\\_localization.pdf](http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20070216_localization.pdf)
- [12] 黒木玄. Ore 集合の作り方. ノート 15 pages, 2010年作成. <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20101116OreSets.pdf>
- [13] 黒木玄. 量子  $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$  双有理作用. ノート 15 pages, 2010年作成. [http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630\\_WxW.pdf](http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630_WxW.pdf)
- [14] 黒木玄. 互いに素な  $m, n$  に対する拡大アフィン Weyl 群の直積  $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$  の双有理作用の量子化. 講演スライド, 2013年作成. <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20130322WxW.pdf>
- [15] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 289-325, *Adv. Stud. Pure Math.*, 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. [arXiv:0808.2604](https://arxiv.org/abs/0808.2604)

- [16] Kuroki, Gen. Regularity of quantum tau-functions generated by quantum birational Weyl group actions. [arXiv:1206.3419](#)
- [17] Lusztig, George. Introduction to quantum groups. Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhauser Classics. Birkhauser/Springer, New York, 2010. xiv+346 pp.
- [18] Noumi, Masatoshi. Affine Weyl group approach to Painlevé equations. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 497-509, Higher Ed. Press, Beijing, 2002. [arXiv:math-ph/0304042](#)
- [19] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. [arXiv:math.QA/0012028](#)
- [20] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions. *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 371-442, Adv. Stud. Pure Math., 40, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2004. [arXiv:math-ph/0203030](#)