量子 Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示

黒木玄 (Gen Kuroki)

東北大学数学教室

日本数学会 2012 年 9 月 18 日〜21 日
九州大学伊都キャンパス
2012/09/18 Version 2.1
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120918QuantumSatoWilson.pdf

2012 年 9 月 18 日

今日の話の主題: 量子 τ 函数の 2 つの顔

1. 量子 Painlevé 系の量子 τ 函数の 1 つ目の顔:

   本質的に Verma 加群の特異ベクトルの比.
   割り切れる! 非可換多項式になる
   (量子 τ 函数の正則性).

2. 量子 Painlevé 系の量子 τ 函数の 2 つ目の顔:

   Gauss 分解の対角部分に住んでいる
   (Sato-Wilson 表示で記述←今回できたこと).
   非可換行列式表示を持つ
   (非可換 Jacobi-Trudi 型公式).

これらが一致するのは不思議なことである.

q 差分版もできているが, 通常の微分版で説明

(正準量子化) ≑ (Poisson 括弧を交換子に置換).

(q 差分化) = (パラメーター q を入れて乗法的に差分化).

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \xrightarrow{\text{量子化}} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{q\,\text{差分化}} U_q(\mathfrak{g}).$$

$U_q(\mathfrak{g})$ は量子化かつ q 差分化された場合.

今日は簡単のため $U(\mathfrak{g})$ 版の量子化について説明する.

最後に量子化かつ q 差分化された場合にも触れる.

他にもできているが, GL_n で説明

1. Weyl 群双有理作用とその τ 函数の理論の量子化は任意の対称化可能 GCM に付随する $U_q(\mathfrak{g})$ 版でできている. arXiv:0808.2604, arXiv:1206.3419
(1 つ目の顔)

2. Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示は A_{n-1}, A_∞, $A_{n-1}^{(1)}$ 型の $U_q(\mathfrak{g})$ 版でできている. いま書きかけの論文
応用: 量子 τ 函数の非可換行列式表示
(2 つ目の顔)

しかし, 簡単のために GL_n で説明する.

1つ目の顔 (1/6): 量子代数の定義

生成元: $f_i, \varepsilon_j^\vee, z_j \quad (1 \leqq i \leqq n-1, 1 \leqq j \leqq n)$.

基本関係式:

$$[f_i, [f_i, f_{i\pm1}]] = 0, \quad [f_i, f_j] = 0 \quad (j \neq i \pm 1),$$
$$[z_i, \varepsilon_j^\vee] = \delta_{ij} z_i \quad (z_i = \exp(\partial/\partial\varepsilon_i^\vee)),$$
$$[\varepsilon_i^\vee, \varepsilon_j^\vee] = [\varepsilon_i^\vee, f_j] = [z_i, z_j] = [z_i, f_j] = 0,$$

コルートパラメーター: $\alpha_i^\vee := \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee$.

τ 変数: $\tau_i := z_1 z_2 \cdots z_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$.

1つ目の顔 (2/6): 量子 Weyl 群双有理作用

Weyl 群 $W = S_n$ の生成元: $\quad s_i = (i, i+1) \quad$ (互換).

従属変数 f_i を動かさない Weyl 群作用:

$$\tilde{s}_i(\varepsilon_j^\vee) = \varepsilon_{s_i(j)}^\vee, \quad \tilde{s}_i(z_j) = z_{s_i(j)}, \quad \tilde{s}_i(f_j) = f_j.$$

Weyl 群双有理作用の量子化:

$$s_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (x = f_j, \varepsilon_j^\vee, z_j).$$

$$s_i(f_{i\pm1}) = f_{i\pm1} + \frac{\alpha_i^\vee [f_i, f_{i\pm1}]}{f_i}, \quad s_i(f_j) = f_j \quad (j \neq i \pm 1),$$

$$s_i(\varepsilon_j^\vee) = \varepsilon_{s_i(j)}^\vee, \quad s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (j \neq i).$$

1 つ目の顔 (3/6): 量子 τ 函数

τ 函数 := τ 変数に Weyl 群双有理作用で動かしたもの.

$w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ (簡約表示) と
$\tau^\mu = \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_{n-1}^{\mu_{n-1}} \tau_n^{\mu_n}$ $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geqq 0})$ に対して,
量子 τ 函数 $w(\tau^\mu)$ は $w(\mu)$ だけで決まり,

$$w(\tau^\mu) = \tilde{w}^{-1}(\Phi^{-1}\Psi\tau^\mu),$$

$$\Phi = f_{i_1}^{\beta_1} \cdots f_{i_N}^{\beta_N},$$

$$\Psi = f_{i_1}^{\beta_1 + \langle \beta_1, \mu \rangle} \cdots f_{i_N}^{\beta_N + \langle \beta_N, \mu \rangle},$$

$$\beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee) \in Q^\vee := \sum_i \mathbb{Z}_{\geqq 0} \alpha_i^\vee,$$

$\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle = \mu_i \geqq 0$ (μ は dominant integral weight).

1 つ目の顔 (4/6): 表現論との関係 (1)

前ページの $\mathbf{\Phi}$ の積の順序を反転し,
dominant integral weight $\lambda \in P_+$ を任意に取り,
β_i に $\langle \beta_i, \lambda + \rho \rangle$ を代入したものは次の形になる:

$$F_{w,\lambda} = f_{i_N}^{\langle \alpha_{i_N}^\vee, s_{i_{N-1}} \cdots s_{i_1} \circ \lambda \rangle + 1} \cdots f_{i_2}^{\langle \alpha_{i_2}^\vee, s_{i_1} \circ \lambda \rangle + 1} f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda \rangle + 1}.$$

ここで　$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$,　$\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$.

$M(\lambda)$:= (最高ウェイト λ を持つ Verma 加群),
v_λ := (その最高ウェイトベクトル).

$F_{w,\lambda} v_\lambda$ は h.w. $w \circ \lambda$ の Verma 部分を生成.

1 つ目の顔 (5/6): 表現論との関係 (2)

量子 τ 函数は本質的に $F_{w,\lambda+\mu}F_{w,\lambda}^{-1}$ と同じ.

$$
\begin{aligned}
& w(\tau^{\mu}) = \tilde{w}(\Phi^{-1}\Psi\tau^{\mu}), \\
& \Phi \quad \longleftrightarrow \quad F_{w,\lambda}v_{\lambda} \in M(w \circ \lambda) \subset M(\lambda), \\
& \Psi \quad \longleftrightarrow \quad F_{w,\lambda+\mu}v_{\lambda} \in M(w \circ (\lambda+\mu)) \subset M(\lambda+\mu),
\end{aligned}
$$

$\Phi^{-1}\Psi$ が $f_i, \alpha_i^{\vee}$ たちの多項式になる
$\iff$ $\forall\lambda \in P_+$, $F_{w,\lambda+\mu}F_{w,\lambda}^{-1}$ が割り切れる.

実際に割り切れる! `arXiv:1206.3419`

証明法: $T^{\lambda}_{\lambda+\mu}(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ (\lambda+\mu))$.

1 つ目の顔 (6/6): まとめ

1. 量子 Painlevé 系の量子 τ 函数の 1 つ目の顔:

   本質的に Verma 加群の特異ベクトルの比.
   割り切れる! 非可換多項式になる
   (量子 τ 函数の正則性).

これから説明することは,
Verma 加群の特異ベクトルの比が
非可換行列式表示を持つ
という結論を含んでいる.

2 つ目の顔 (1/10): τ の住みか

$X \in GL_n$ (generic な行列) の (乗法的)Gauss 分解:

$$X = W^{-1}Z.$$

$W = X_-$ はべき単下三角行列, $Z = X_+$ は上三角行列.
非可換な場合でも同様に Gauss 分解を定義する.

$z_i :=$ (Z の第 i 対角成分).

$\tau_i := z_1 z_2 \cdots z_i \quad$ (τ 変数).

$\tau_i =$ (X の左上の $i \times i$ ブロックの (非可換) 行列式).

2つ目の顔 (2/10): 量子 M 行列

量子 (で q 差分でない場合の) M 行列は次の通り:

$$M = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1^\vee & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ & -\varepsilon_2^\vee & f_{23} & & f_{2n} \\ & & -\varepsilon_3^\vee & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & f_{n-1,n} \\ 0 & & & & -\varepsilon_n^\vee \end{bmatrix}.$$

$[f_{ji}, f_{lk}] = \delta_{jk} f_{li} - \delta_{li} f_{jk}$
(従属変数 f_{ji} は行列単位 E_{ij} と同じ関係式を満たす),

$[\varepsilon_i^\vee, \varepsilon_j^\vee] = [\varepsilon_i^\vee, f_{kl}] = 0$
(パラメーター変数 $\varepsilon_i^\vee$ は M のすべての成分と可換).

2つ目の顔 (3/10): 量子 Z 行列

$D_{-\varepsilon^\vee}$:= (M の対角部分) = $-\,\mathbf{diag}(\varepsilon_1^\vee,\dots,\varepsilon_n^\vee)$ とおく.

$M = U D_{-\varepsilon^\vee} U^{-1}$, $\exists!\,U$ は対角成分が 1 の上三角行列.

量子 z 変数: $z_i = \exp\left(\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon_i^\vee}\right)$ ($\varepsilon_i^\vee$ の差分作用素).

$z_i\,\varepsilon_j^\vee z_i^{-1} = \varepsilon_j^\vee + \delta_{ij}$, $[z_i, z_j] = [z_i, f_{kl}] = 0$.

$Z := U D_Z$, $D_Z := \mathbf{diag}(z_1,\dots,z_n)$.

$M = Z(D_{-\varepsilon^\vee} + E)Z^{-1}$ (Z も M を対角化する).

2 つ目の顔 (4/10): $\tilde{s}_i$ の作用

GL_n の Weyl 群は $W = S_n$ (置換群).

$s_i := (i, i+1)$ (隣り合う数の互換).
$W = S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$.
基本関係式: $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $s_i^2 = 1$.

$w \in W = S_n$ の $f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i$ たちで生成される代数への代数自己同型としての作用 $\widetilde{w}$ を次のように定める:

$$\widetilde{w}(f_{ij}) = f_{ij}, \quad \widetilde{w}(\varepsilon_i^\vee) = \varepsilon_{w(i)}^\vee, \quad \widetilde{w}(z_i) = z_{w(i)}.$$

2つ目の顔 (5/10): 量子 Weyl 群双有理作用

量子の場合には $f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i$ たちの基本関係式を保つように Weyl 群双有理作用にあたるものを構成しなければいけない。

$$f_i := f_{i,i+1}, \quad \alpha_i^\vee := \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee.$$

$$f_{ij} = [f_{j-1}, [\cdots, [f_{i+2}, [f_{i+1}, f_i]] \cdots]].$$

arXiv:0808.2604, arXiv:1206.3419 によれば
次のようにして量子 Weyl 群双有理作用を構成できる:

$$s_i(a) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(a) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (a = f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i).$$

2 つ目の顔 (6/10): 作用の具体形

代数の生成元への作用の具体形は次のようになる:

$$
s_i(f_j) = \begin{cases} f_j + \dfrac{\alpha_i^\vee[f_i, f_j]}{f_i} & (j = i \pm 1), \\ f_j & (j \neq i \pm 1), \end{cases}
$$

$$
s_i(\varepsilon_j^\vee) = \tilde{s}_i(\varepsilon_j^\vee) = \varepsilon_{s_i(j)}^\vee,
$$

$$
s_i(z_j) = \begin{cases} f_i\, z_{i+1} & (j = i), \\ f_i^{-1} z_i & (j = i + 1), \\ z_j & (j \neq i, i + 1). \end{cases}
$$

$[f_i, f_j]$ と f_i は常に可換になるので分数表記可能.

2つ目の顔 (7/10): Lax表示とSato-Wilson表示

$G_i := E + g_i E_{i+1,i}, \quad g_i := -\alpha_i^\vee / f_i.$

$S_i^g := g_i^{-1} E_{i,i+1} - g_i E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$

$S_i := -(\alpha_i^\vee - 1)^{-1} E_{i,i+1} + (\alpha_i^\vee + 1) E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$
(注意: 古典の場合には ± 1 の部分はいらない.)

M への作用 (Lax表示): $\quad s_i(M) = G_i M G_i^{-1}.$

U への作用: $\quad s_i(U) = G_i U S_i^g.$

D_Z への作用: $\quad s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i.$

Z への作用 (Sato-Wilson表示): $\quad s_i(Z) = G_i Z S_i.$

2つ目の顔 (8/10): 一般の $w \in W$ の作用

$$s_{i_1}(Z) = G_{i_1} Z S_{i_1},$$
$$s_{i_2} s_{i_1}(Z) = s_{i_2}(G_{i_1}) G_{i_2} Z S_{i_2} s_{i_2}(S_{i_1}),$$
$$s_{i_3} s_{i_2} s_{i_1}(Z) = s_{i_3} s_{i_2}(G_{i_1}) s_{i_2}(G_{i_2}) G_{i_3} Z S_{i_3} s_{i_3}(S_{i_2}) s_{i_3} s_{i_2}(S_{i_1}),$$

$w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ のとき

$w(Z) = G_w Z S_w$ (上三角行列),

$S_w := S_{i_N} s_{i_N}(S_{i_{N-1}}) \cdots (s_{i_N} \cdots s_{i_2})(S_{i_1})$.

$G_w := (s_{i_N} \cdots s_{i_2})(G_{i_1}) \cdots s_{i_N}(G_{i_{N-1}}) G_{i_N}$
(対角成分が 1 の下三角行列),

$G_w^{-1} w(Z) = Z S_w$ は $Z S_w$ の Gauss 分解.

2つ目の顔 (9/10): 行列式表示について

古典の場合:

$\tau_i(X)$:= (X の左上部分の $i \times i$ の主小行列式).

$$w(\tau_i) = \tau_i(ZS_w) \quad \text{(Jacobi-Trudi 型公式).}$$

特に $w(\tau_i)$ は ZS_w の成分の多項式 (τ 函数の正則性).

量子の場合:

Gelfand-Retakh 非可換行列式の理論を使える.
しかし非可換行列式は一般に成分の非可換有理式.

$\tau_i(X)$:= (X の左上部分の $i \times i$ の非可換主小行列式).

$$w(\tau_i) = \tau_i(ZS_w) \quad \text{(非可換 Jacobi-Trudi 型公式).}$$

$w(\tau_i)$ が ZS_w の成分の多項式になるかどうかは不明.

2つ目の顔 (10/10): まとめ

2. 量子 Painlevé 系の量子 τ 函数の2つ目の顔:

Gauss 分解の対角部分に住んでいる
(Sato-Wilson 表示で記述←今回できたこと).
非可換行列式表示を持つ
(非可換 Jacobi-Trudi 型公式).

この結果は
Verma 加群の特異ベクトルの比が
非可換行列式表示を持つ
という結果を含んでいる.

これはとても不思議なことである.

量子化かつ q 差分化された場合 (1/3)

実は以上の結果の q 差分版もすべてできている!

M と f_i の作り方以外は $q=1$ の場合と同じ.

$$R := q\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} E_{ij}\otimes E_{ji}.$$

上三角行列 L は $RL^1L^2 = L^2L^1R$ を満たすと仮定.

$D_L :=$ ($L = [L_{ij}]$ の対角部分) $= \mathrm{diag}(L_{11}, \dots, L_{nn})$.

$\widetilde{L} = E + \sum_{i<j} f_{ij}E_{ij} := D_L^{-1}L \leftarrow$ M の構成で使う.

$f_i := (q-q^{-1})^{-1} f_{i,i+1}$ たちは q-Serre 関係式を満たす.

量子化かつ q 差分化された場合 (2/3)

$$D_t := \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n), \quad t_i := q^{-\varepsilon_i^\vee}.$$

$$M = [m_{ij}] := D_t \widetilde{L} D_t.$$

これ↑が q 差分版の正しい M 行列の作り方!

このとき

$$s_i(M) := f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(M) f_i^{-\alpha_i^\vee} = G_i M G_i^{-1},$$

$$G_i := E + g_i E_{i+1,i}, \quad g_i := \frac{m_{ii} - m_{i+1.i+1}}{m_{i,i+1}}.$$

この作り方は試行錯誤で発見した. 一般原理は不明.

正しい M が得られた後の構成は $q = 1$ の場合と同じ.

量子化かつ q 差分化された場合 (3/3)

$q \to 1$ の極限の取り方:

$q := e^{\hbar/2}$, $f_{ij} := (q - q^{-1})\phi_{ij}$ とおくと,

$$M = E + \hbar\mathcal{M} + O(\hbar^2),$$
$$\mathcal{M} = -\sum_i \varepsilon_i^\vee E_{ii} + \sum_{i<j} \phi_{ij} E_{ij}.$$

この $\mathcal{M}$ が先に説明した $q = 1$ での $\mathcal{M}$ に一致.

これ以後は古い版 (Ver.1.5) の内容

実は講演の前日と当日に全部書き直してしまった!

またやってしまった.

前回の学会までにどこまでできていたか

- 任意の対称化可能 GCM に付随する Weyl 群双有理作用の量子化と q 差分化の構成
  arXiv:0808.2604
- Weyl 群双有理作用で生成される τ 函数の量子化とその正則性 (多項式性) の一般的な証明
- 量子化の q 差分版における τ 函数の構成とその正則性 (多項式性) の部分的な証明
- A 型の Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示はできていなかった.

現在どこまでできているか

- 量子 Weyl 群双有理作用に付随する量子 τ 函数の正則性の q 差分版の場合も含めた一般的な証明 arXiv:1206.3419
- A 型の量子 Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示. これが今回の講演の主題.

  書き掛けの論文が次の場所にこっそり置いてある:

  http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/QuantumLaxSatoWilson.pdf

  これを覗いてもよいが, この URL へのリンクは禁止!

q 差分版もできているが, 分かり易くするために q 差分化していない場合についてまず説明する.

Sato-Wilson 表示=Gauss 分解による表示

Sato-Wilson 表示 = Gauss 分解による表示

- Gauss 分解は可積分系を理解するための基本.
- Gauss 分解は行列式で記述可能.
- τ 函数は Gauss 分解の対角部分に住んでいる.
- ゆえに τ 函数は行列式表示を持つ.

- 量子化された Weyl 群双有理作用も Sato-Wilson 表示を持つはず.
- 実際にそうならば量子 τ 函数の Jacobi-Trudi 型行列式表示も得られるはず.

行列の Gauss 分解

簡単のため A_{n-1} 型の場合を GL_n で扱う.

$X \in GL_n$ (generic な行列) の (乗法的)Gauss 分解:

$$X = W^{-1}Z.$$

$W = X_-$ はべき単下三角行列, $Z = X_+$ は上三角行列.

Lie 代数の元 $A \in \mathfrak{gl}_n$ の加法的 Gauss 分解:

$$A = A_+ - A_-.$$

A_- はべき零下三角行列, A_+ は上三角行列.

以上の記号法を次ページ以降も使う.

Lax 表示と Sato-Wilson 表示 (1/2)

$$\frac{dX}{dt} = \Xi X$$ ← 行列 X の定数係数線形微分方程式

$\downarrow$

$\downarrow$ $\quad X = W^{-1}Z, \quad L = W\Lambda W^{-1}, \quad B = (W\Xi W^{-1})_+$

$\downarrow$ $\quad$ (↑ Gauss 分解) $\qquad$ (加法的 Gauss 分解 ↑)

$\downarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = BW - W\Xi, \\ \dfrac{dZ}{dt} = BZ \end{cases}$$ ← Sato-Wilson 方程式

$$\frac{dL}{dt} = [B, L]$$ ← Lax 方程式

このような話の超一般論の解説→ http://www.math.tohoku.ac.jp/˜kuroki/LaTeX/#soliton

Lax 表示と Sato-Wilson 表示 (2/2)

$s(X) = XS$ ← 行列 X の離散的な線形変換

$s(D) = S^{-1}DS$ ← 行列 D の離散的な変換

$$\downarrow \quad X = W^{-1}Z, \qquad M = ZDZ^{-1}, \qquad G = (ZS)_-$$

(↑ Gauss 分解) (Gauss 分解 ↑)

$$\begin{cases} s(Z) = GZS, \\ s(W) = GW \end{cases}$$ ← 変換 s の Sato-Wilson 表示

$s(M) = GMG^{-1}$ ← 変換 s の Lax 表示

以下では変換 s が Weyl 群作用の場合を扱う．
そして M と Z の満たす方程式のみを扱う．

τ 変数と τ 函数の住みか

$X = W^{-1}Z$ ← X の Gauss 分解

$D_Z := \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n)$:= (上三角行列 Z の対角部分).

$\tau_i := z_1 z_2 \cdots z_i$ ← τ 変数

τ_i = (X の左上の $i \times i$ のブロックの主小行列式).

(τ 函数) := (τ 変数を何らかの変換で動かしたもの)

τ 函数は何らかの変換で動かした Z 行列の対角部分に住んでいる.

量子 M 行列

量子 (で q 差分でない場合の) M 行列は次の通り:

$$M = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1^\vee & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ & -\varepsilon_2^\vee & f_{23} & & f_{2n} \\ & & -\varepsilon_3^\vee & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & f_{n-1,n} \\ \text{\huge 0} & & & & -\varepsilon_n^\vee \end{bmatrix}.$$

$[f_{ji}, f_{lk}] = \delta_{jk} f_{li} - \delta_{li} f_{jk}$
(従属変数 f_{ji} は行列単位 E_{ij} と同じ関係式を満たす),

$[\varepsilon_i^\vee, \varepsilon_j^\vee] = [\varepsilon_i^\vee, f_{kl}] = 0$
(パラメーター変数 $\varepsilon_i^\vee$ は M のすべての成分と可換).

量子 z 変数と量子 Z 行列

$D_{-\varepsilon^\vee} := (M$ の対角部分$) = -\mathrm{diag}(\varepsilon_1^\vee, \dots, \varepsilon_n^\vee)$ とおく.

$M = U D_{-\varepsilon^\vee} U^{-1}$, $\exists!\, U$ は対角成分が 1 の上三角行列.

量子 z 変数: $z_i = \exp\left(\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon_i^\vee}\right)$ ($\varepsilon_i^\vee$ の差分作用素).

$z_i \varepsilon_j^\vee z_i^{-1} = \varepsilon_j^\vee + \delta_{ij}$, $[z_i, z_j] = [z_i, f_{kl}] = 0$.

$Z := U D_Z$, $D_Z := \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n)$.

$M = Z(D_{-\varepsilon^\vee} + E)Z^{-1}$ (Z も M を対角化する).

従属変数を動かさない Weyl 群作用

GL_n の Weyl 群は $W = S_n$ (置換群).

$s_i := (i, i+1)$ (隣り合う数の互換).
$W = S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$.
基本関係式: $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $s_i^2 = 1$.

$w \in W = S_n$ の $f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i$ たちで生成される代数への代数自己同型としての作用 $\widetilde{w}$ を次のように定める:

$$\widetilde{w}(f_{ij}) = f_{ij}, \quad \widetilde{w}(\varepsilon_i^\vee) = \varepsilon_{w(i)}^\vee, \quad \widetilde{w}(z_i) = z_{w(i)}.$$

量子化されたWeyl群双有理作用

量子の場合には $f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i$ たちの基本関係式を保つようにWeyl群双有理作用にあたるものを構成しなければいけない。

$$f_i := f_{i,i+1}, \quad \alpha_i^\vee := \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee.$$

$$f_{ij} = [f_{j-1}, [\cdots, [f_{i+2}, [f_{i+1}, f_i]] \cdots]].$$

arXiv:0808.2604, arXiv:1206.3419 によれば次のようにして量子Weyl群双有理作用を構成できる:

$$s_i(a) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(a) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (a = f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i).$$

作用の具体形を計算するために必要な公式

$f_i^{\alpha_i^\vee}$ について以下の自然な公式が成立している.

$$z_j f_i^{\alpha_i^\vee} z_j^{-1} = f_i^{\alpha_i^\vee + \delta_{ij} - \delta_{i+1,j}},$$

$$f_i^{\alpha_i^\vee} g f_i^{-\alpha_i^\vee} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha_i^\vee}{k} (\mathrm{ad}\, f_i)^k (g) f_i^{-k}.$$

ここで g は $\alpha_i^\vee$ と可換であると仮定している. 特に

$$\begin{aligned} f_i^{\alpha_i^\vee} f_{i\pm1} f_i^{-\alpha_i^\vee} &= f_{i\pm1} + \alpha_i^\vee [f_i, f_{i\pm1}] f_i^{-1} \\ &= (1 - \alpha_i^\vee) f_{i\pm1} + \alpha_i^\vee f_i f_{i\pm1} f_i^{-1}. \end{aligned}$$

正当化の方法は arXiv:0808.2604, arXiv:1206.3419 にある.

量子化された Weyl 群双有理作用の具体形

代数の生成元への作用の具体形は次のようになる:

$$
\begin{aligned}
s_i(f_j) &= \begin{cases} f_j + \dfrac{\alpha_i^\vee[f_i, f_j]}{f_i} & (j = i \pm 1), \\ f_j & (j \neq i \pm 1), \end{cases} \\
s_i(\varepsilon_j^\vee) &= \tilde{s}_i(\varepsilon_j^\vee) = \varepsilon_{s_i(j)}^\vee, \\
s_i(z_j) &= \begin{cases} f_i\, z_{i+1} & (j = i), \\ f_i^{-1} z_i & (j = i+1), \\ f_j & (j \neq i, i+1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

$[f_i, f_j]$ と f_i は常に可換になるので分数表記可能.

s_i の作用の Lax 表示と Sato-Wilson 表示

$$G_i := E + g_i E_{i+1,i}, \quad g_i := -\alpha_i^\vee / f_i.$$

$$S_i^g := g_i^{-1} E_{i,i+1} - g_i E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$$

$$S_i := -(\alpha_i^\vee - 1)^{-1} E_{i,i+1} + (\alpha_i^\vee + 1) E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$$

(注意: 古典の場合には ± 1 の部分はいらない.)

M への作用 (Lax 表示): $s_i(M) = G_i M G_i^{-1}.$

U への作用: $s_i(U) = G_i U S_i^g.$

D_Z への作用: $s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i.$

Z への作用 (Sato-Wilson 表示): $s_i(Z) = G_i Z S_i.$

一般の $w \in W$ の作用の Sato-Wilson 表示

$$s_{i_1}(Z) = G_{i_1} Z S_{i_1},$$

$$s_{i_2} s_{i_1}(Z) = s_{i_2}(G_{i_1}) G_{i_2} Z S_{i_2} s_{i_2}(S_{i_1}),$$

$$s_{i_3} s_{i_2} s_{i_1}(Z) = s_{i_3} s_{i_2}(G_{i_1}) s_{i_2}(G_{i_2}) G_{i_3} Z S_{i_3} s_{i_3}(S_{i_2}) s_{i_3} s_{i_2}(S_{i_1}),$$

$w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ のとき

$$w(Z) = G_w Z S_w \quad \text{(上三角行列)},$$

$$S_w := S_{i_N} s_{i_N}(S_{i_{N-1}}) \cdots (s_{i_N} \cdots s_{i_2})(S_{i_1}).$$

$$G_w := (s_{i_N} \cdots s_{i_2})(G_{i_1}) \cdots s_{i_N}(G_{i_{N-1}}) G_{i_N}$$

(対角成分が 1 の下三角行列),

$G_w^{-1} w(Z) = Z S_w$ は $Z S_w$ の Gauss 分解.

τ 函数 $w(\tau_i)$ の行列式表示について

古典の場合:

$\tau_i(X)$:= (X の左上部分の $i \times i$ の主小行列式).

$$w(\tau_i) = \tau_i(ZS_w) \quad \text{(Jacobi-Trudi 型公式).}$$

特に $w(\tau_i)$ は ZS_w の成分の多項式 (τ 函数の正則性).

量子の場合:

Gelfand-Retakh 非可換行列式の理論を使える.
しかし非可換行列式は一般に成分の非可換有理式.

$\tau_i(X)$:= (X の左上部分の $i \times i$ の非可換主小行列式).

$$w(\tau_i) = \tau_i(ZS_w) \quad \text{(非可換 Jacobi-Trudi 型公式).}$$

$w(\tau_i)$ が ZS_w の成分の多項式になるかどうかは不明.

量子 τ 函数 $w(\tau_i)$ の正則性の証明法

arXiv:1206.3419 の主結果:

表現論における圏 $\mathcal{O}$ (BGG 圏) における平行移動函手 (translation functor) が満たしている基本公式

$$T_{\lambda+\mu}^{\lambda}(M(w\circ\lambda)) = M(w\circ(\lambda+\mu)) \quad (\lambda,\mu\in P_+)$$

から, 量子化された τ 函数 $w(\tau_i)$ の正則性 (多項式性) が導かれる.

τ 函数の行列式表示を用いない本質的に新しい証明法.

この話は前回の学会で報告したので詳しい説明は省略.

以上の話の一般化

すでにできていること:

1. $n \times n$ 行列 (A_{n-1} 型) の場合 (すでに説明した).
2. $\infty \times \infty$ 行列 (A_∞ 型) の場合への一般化.
3. $n \geqq 3$ の場合の A_∞ 型から $A^{(1)}_{n-1}$ 型への n 簡約.
4. $A_{n-1}, A_\infty, A^{(1)}_{n-1}$ 型の量子群を使った q 差分版.
   (A_∞ 型量子群を使う話 → 講演アブストラクト)

すぐにでもできそうなこと:

1. 微分方程式の方の記述.
2. B, C, D 型への一般化.

A_∞ 型への一般化 (1/3)

単に $\infty \times \infty$ 行列にそのまま一般化するだけ.
$n \times n$ 行列の場合と比較して新しいことは何もない.

$$M = D_{-\varepsilon^\vee} + \sum_{-\infty<i<j<\infty} f_{ij}E_{ij}, \quad D_{-\varepsilon^\vee} = -\sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon_i^\vee E_{ii},$$

$$M = UD_{-\varepsilon^\vee}U^{-1}, \quad U = E + \sum_{-\infty<i<j<\infty} u_{ij}E_{ij},$$

$$Z = UD_Z, \quad D_Z = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z_i E_{ii}.$$

$f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i$ の基本関係式は $n \times n$ の場合と完全に同じ形.

A_∞ 型への一般化 (2/3)

s_i の作用の構成の仕方も $n \times n$ の場合と完全に同じ.
Lax 表示と Sato-Wilson 表示も完全に同じ形になる.

$G_i := E + g_i E_{i+1,i}, \quad g_i := -\alpha_i^\vee / f_i.$
$S_i^g := g_i^{-1} E_{i,i+1} - g_i E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$
$S_i := -(\alpha_i^\vee - 1)^{-1} E_{i,i+1} + (\alpha_i^\vee + 1) E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$
(注意: 古典の場合には ± 1 の部分はいらない.)

M への作用 (Lax 表示): $\quad s_i(M) = G_i M G_i^{-1}.$
U への作用: $\quad s_i(U) = G_i U S_i^g.$
D_Z への作用: $\quad s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i.$
Z への作用 (Sato-Wilson 表示): $\quad s_i(Z) = G_i Z S_i.$

A_∞ 型への一般化 (3/3)

しかし, 本当のことを言えば, ちょっとした工夫が必要!

- 新しいパラメーター変数 $\delta^\vee$ も用意しておく.
- τ_i から z_i を $z_i = \tau_i/\tau_{i-1}$ で定める.
- 基本関係式:

$$\tau_i \varepsilon_j^\vee = (\varepsilon_j^\vee + \delta_{j\leqq i})\tau_i, \quad \tau_i \delta^\vee = (\delta^\vee + 1)\tau_i,$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \qquad \tau_i f_{kl} = f_{kl} \tau_i,$$

$$\delta^\vee f_{ij} = f_{ij} \delta^\vee, \quad \delta^\vee \varepsilon_i^\vee = \varepsilon_i^\vee \delta^\vee.$$

- π の作用: $\quad \pi(f_{ij}) = f_{i+1,j+1}, \quad \pi(\varepsilon_i^\vee) = \varepsilon_{i+1}^\vee,$
  $\pi(\delta^\vee) = \delta^\vee, \quad \pi(\tau_i) = \tau_{i+1}.$
- Sato-Wilson 表示で z_i への Weyl 群双有理作用は決まるが, τ_i への作用は決まらない.

$A^{(1)}_{n-1}$ 型への簡約 (1/6)

以下 $n \geqq 3$ と仮定する.

A_∞ 型の $f_{ij}, \varepsilon_i^\vee, z_i$ たちを (準) 周期的に同一視する:

$$f_{i+n,j+n} = f_{ij}, \quad \varepsilon_{i+n}^\vee = \varepsilon_i^\vee - \delta^\vee, \quad z_{i+n} = z_i.$$

これで (商代数として) $A^{(1)}_{n-1}$ 型の代数ができあがる.
f_{ij} たちは $A^{(1)}_{n-1}$ 型 KM 代数の下三角部分を生成.

$A^{(1)}_{n-1}$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}_n$ の作用:

A_∞ での π が誘導する作用 $\to \pi$

$\bar{s}_i = \prod_{j \in i+n\mathbb{Z}} s_i$ が誘導する作用 $\to \bar{s}_i$

$A^{(1)}_{n-1}$ 型への簡約 (2/6)

$\infty \times \infty$ のシフト行列と準周期的対角行列

$$\Lambda := \sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{i,i+1}, \quad D_{n,\delta^\vee} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-k\delta^\vee) \sum_{i=1}^{n} E_{i+nk,i+nk}.$$

に対応する $n \times n$ 行列値函数での対応物はそれぞれ

$$\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + zE_{n1}, \quad \delta^\vee z\frac{\partial}{\partial z}.$$

$\Lambda D_{n,\delta^\vee} = (D_{n,\delta^\vee} - \delta^\vee \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{nk,nk})\Lambda,$
$\Lambda(z)\,\delta^\vee z\,\partial/\partial z = (\delta^\vee z\,\partial/\partial z - \delta^\vee E_{nn})\Lambda(z).$

∞ 次の周期的対角行列への対応物は n 次の対角行列.

$A^{(1)}_{n-1}$ 型への簡約 (3/6)

前ページの対応を使うと $f_{i+n,j+n} = f_{ij}$, $\varepsilon^\vee_{i+n} = \varepsilon^\vee_i - \delta^\vee$ を満たす $\infty \times \infty$ の M に次の $n \times n$ 行列値函数係数線形常微分作用素 $L(z)$ が対応する:

$$L(z) = -\delta^\vee z \frac{\partial}{\partial z} + M(z),$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^\vee_i E_{ii} + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} f_{ij} E_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{i,j=1}^{n} f_{i,j+nk} E_{ij}.$$

$\delta^\vee$ による対角成分の準周期性によって
自然に行列値函数係数線形常微分作用素が得られた.

$A_{n-1}^{(1)}$ 型への簡約 (4/6)

拡大アフィン Weyl 群の作用の Lax 表示

$$\pi(L(z)) = \Lambda(z)L(z)\Lambda(z)^{-1},$$
$$\bar{s}_i(L(z)) = \overline{G}_i(z)L(z)\overline{G}_i(z)^{-1}.$$

ここで，$g_i := -\alpha_i^\vee/f_i$, $\quad \alpha_i^\vee := \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee$, $\quad f_i := f_{i,i+1}$,

$$\overline{G}_i(z) = 1 + g_i E_{i+1,i} \quad (1 \leqq i < n),$$
$$\overline{G}_n(z) = 1 + z^{-1} g_0 E_{1n}.$$

$A_{n-1}^{(1)}$ 型への簡約 (5/6)

無限サイズの $Z = [z_{ij}]$ に対応する $n \times n$ 行列:

$$Z(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i E_{ii} + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} z_{ij} E_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{i,j=1}^{n} z_{i,j+nk} E_{ij}.$$

拡大アフィン Weyl 群の作用の Sato-Wilson 表示:

$$\pi(Z(z)) = \Lambda(z) Z(z) \Lambda(z)^{-1},$$
$$\bar{s}_i(Z(z)) = \overline{G}_i(z) Z(z) \overline{S}_i(z).$$

$\overline{S}_i(z)$ の定義は次ページ.

前ページで使った $\bar{S}_i(z)$ の定義: $1 \leqq i < n$ のとき

$$\bar{S}_i(z) = -(\alpha_i^\vee - 1)^{-1} E_{i,i+1} + (\alpha_i^\vee + 1) E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk},$$

$$\bar{S}_0(z) = -z(\alpha_0^\vee - 1)^{-1} E_{n1} + z^{-1}(\alpha_0^\vee + 1) E_{1n} + \sum_{k=1}^{n-1} E_{kk}.$$

(注意: 古典の場合には ± 1 の部分はいらない.)

A_{n-1} 型の場合の q 差分化 (1/3)

実は以上の結果の q 差分版もすべてできている!

M と f_i の作り方以外は $q=1$ の場合と同じ.

$$R := q\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} E_{ij}\otimes E_{ji}.$$

上三角行列 L は $RL^1L^2 = L^2L^1R$ を満たすと仮定.

$D_L :=$ ($L = [L_{ij}]$ の対角部分) $= \mathrm{diag}(L_{11},\dots,L_{nn})$.

$\widetilde{L} = E + \sum_{i<j} f_{ij}E_{ij} := D_L^{-1}L \leftarrow$ M の構成で使う.

$f_i := (q-q^{-1})^{-1} f_{i,i+1}$ たちは q-Serre 関係式を満たす.

A_{n-1} 型の場合の q 差分化 (2/3)

$$D_t := \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n), \quad t_i := q^{-\varepsilon_i^\vee}.$$

$$M = [m_{ij}] := D_t \widetilde{L} D_t.$$

これ↑が q 差分版の正しい M 行列の作り方!

このとき

$$s_i(M) := f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(M) f_i^{-\alpha_i^\vee} = G_i M G_i^{-1},$$

$$G_i := E + g_i E_{i+1,i}, \quad g_i := \frac{m_{ii} - m_{i+1.i+1}}{m_{i,i+1}}.$$

この作り方は試行錯誤で発見した. 一般原理は不明.

正しい M が得られた後の構成は $q = 1$ の場合と同じ.

A_{n-1} 型の場合の q 差分化 (3/3)

$q \to 1$ の極限の取り方:

$q := e^{\hbar/2}$, $f_{ij} := (q - q^{-1})\phi_{ij}$ とおくと,

$$M = E + \hbar\mathcal{M} + O(\hbar^2),$$
$$\mathcal{M} = -\sum_i \varepsilon_i^\vee E_{ii} + \sum_{i<j} \phi_{ij} E_{ij}.$$

この $\mathcal{M}$ が最初の方で説明した $q = 1$ での $\mathcal{M}$ に一致.

結論

任意の対称化可能 GCM に対する量子展開環を使って，量子化された Weyl 群双有理作用およびそれに付随する量子 τ 函数が構成できており，その正則性 (多項式性) の q 差分版の場合も含めた一般的な証明ができている．
arXiv:1206.3419

A_{n-1}, A_∞, $A^{(1)}_{n-1}$ 型の場合には q 差分版の場合にも量子化された Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示が得られている．

量子化かつ q 差分化された場合の “M 行列” は非自明．その構成 $M = D_t \widetilde{L} D_t$ の背景にある一般原理はまだ謎．