2012-05-11 長尾健太郎氏の集中講義(4)最終回

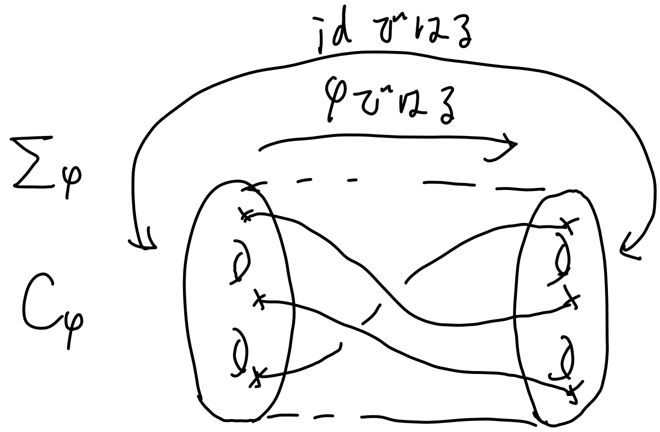
$$(\mathrm{Teich}(\Sigma, C)_{\mathbb{C}})^{\varphi} \rightsquigarrow T_{\varphi} = \Sigma \times [0,1]/\sim_{\varphi}$$

上の $C_{\varphi} \subset T_{\varphi}$ にトーラスカスプを持つ双曲構造

$$\text{\rotatebox{90}{$\subset$}}\qquad\qquad\qquad \text{\rotatebox{90}{$=$}}$$

$$(\mathrm{Hom}'(\pi_1(\Sigma \setminus C), PSL(2,\mathbb{C}))/\sim)^{\varphi} \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_{\varphi} \setminus C_{\varphi}), PSL(2,\mathbb{C}))/\sim$$

$\pi_1(\text{fiber})$ "$\times$" $\pi_1(S^1)$



左側から右側は具体的に作るときに
Fock座標(クラスターの言葉でいうとy変数)

物理の話

背景 [寺嶋-山崎](2つ共著がある) (3d-3d対応)

$\rightsquigarrow$ $SL(2,\mathbb{C})$-CS理論 $\overset{\text{"等価"}}{\longleftrightarrow}$ 量子Teichmüller理論

Chen-Simons

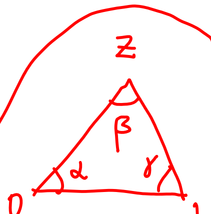
次ページに続く

	CS = Chern-Simons	quantum Teichmüller
Σ : 2-mfd $\varphi \in MCG$	$CS(\Sigma)$ ← Hilbert空間 $CS_\varphi : CS(\Sigma) \circlearrowright CS(\Sigma)$ 作用素	$\overset{??}{=}$ q-Teich(Σ) ← Hilbert空間 $\overset{??}{=}$ q-Teich$_\varphi$: q-Teich$(\Sigma) \circlearrowright q$-Teich$(\Sigma)$ 作用素
	$Tr(CS_\varphi) = CS(T_\varphi)$ level を動かして 母函数(分配函数) 作る. 数学的には まだ定義されていない	$\overset{??}{=}$ $Tr(q\text{-Teich}_\varphi)$ こちらには q が入っている $q \to 1$

$\boxed{Vol(T_\varphi) + \sqrt{-1}\, CS(T_\varphi) \qquad \lim_{q \to 1} (Tr(q\text{-Teich}_\varphi))}$

どちらも数学的に well-defined

3次元双曲幾何 　　　　　　　　クラスター代数



$JI(z)$
$\shortparallel$
$JI(\alpha) + JI(\beta) + JI(\gamma)$

$\sum_i JI(z_i)$ と書ける

[Kashaev-Nakanishi] の
アイデアを使うと

$\sum_i L(y_i)$

の形になることがわかる

ここで L は dilog で y_i は y 変数

等しくなるはず!

これはチェックできている

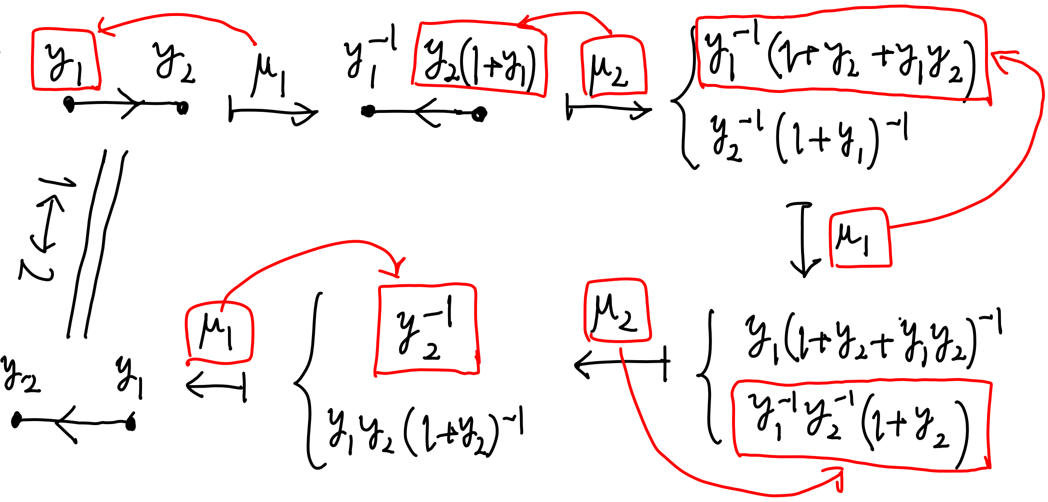
quantum pentagon identity v.s. classical pentagon identity

Kashaev-Nakanishi はこういうことをやっている

y変数 quiver の mutation $Q \overset{\mu_k}{\to} Q'$ で x変数だけではなく、以下のようにy変数も変換される。

$$y_i \overset{\mu_k}{\longmapsto} \begin{cases} y_i^{-1} & (i=k) \\ y_i\, y_k^{\#k\to i}(1+y_k)^{(\# i\to k)-(\# k\to i)} & (i\neq k) \end{cases}$$

例



上のようにA$_2$型クラスター代数は長さ5の周期を持つ。

dilog恒等式

$$\sum_i \varepsilon_{(i)} L\left(\frac{y_{(i)}^{\varepsilon(i)}}{1+y_{(i)}^{\varepsilon(i)}}\right) = 0 \quad \Leftarrow \text{周期性.}$$

ここで $y_{(i)}$ は上の $\boxed{}$ の中のy変数の有理式、

$\varepsilon_{(i)}$ は $y_{(i)}$ の top term で決まる符号 ± 1,

L は Rogers の dilog.

classical pentagon identity

$$L\left(\frac{y_1}{1+y_1}\right) + L\left(\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2}\right) - L\left(\frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)}\right) - L\left(\frac{y_1y_2}{1+y_1+y_1y_2}\right) - L\left(\frac{y_2}{1+y_2}\right) = 0.$$

quantum dilogarithm identity

(QDI) $$\Phi_q(Y_1)\,\Phi_q(Y_2)\,\Phi_q(Y_1)^{-1}\,\Phi_q(q^{-1}Y_1Y_2)^{-1}\,\Phi_q(Y_2)^{-1}=1.$$

ここで $\Phi_q(Y)$ は量子dilogで次のように定義される:

$$\Phi_q(Y)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+q^{2k+1}Y)^{-1}.$$

このとき, $\Phi_q(Y)$ はだいたいdilogのexponentialになっている

(**レポート問題** $\log\Phi_q(Y)$ の $q\to 1$ での様子を調べて $Li_2(y)$ が出て来ることを確認せよ.)

上の(QDI)は条件 $q^{-1}Y_1Y_2=qY_2Y_1$ の下で成立している

この Y_1, Y_2 は古典y変数 y_1, y_2 の量子版. Φ_q に代入されているのは "top term".

量子dilogはFaddeev-Kashaevの仕事で出てきたが,

その仕事でquantum dilog. identityとclassical dilog. identity

の関係も注意されているが, 読んでもわかりにくい

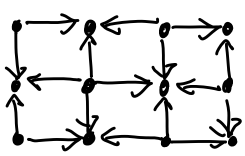
しかし Kashaev-Nakanishiには詳しく書いてあって助かる

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{DI} \arrow[d, shift right, "\text{[Keller]}"'] \\
\text{周期性} \arrow[ur, squiggly, "\text{[Nakanishi, …]}"] \arrow[dr, squiggly, "\text{DT理論}"'] & \mathrm{QDI} \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

最近 ↓ [Kashaev-Nakanishi], 昔 ↓ [Faddeev-Kashaev]

クラスターでの周期ごとに量子および古典dilog恒等式が得られる

たとえばDynkin箙の"積"で周期が得られている

(例)  $A_3\square A_4$

$$\boxed{\text{quantum dilog. identity} \xrightarrow{?} \text{classical dilog. identity}}$$

$\boxed{\text{Step 1}}$ QDIの左辺(quantum dilog.の積)を作用素と思って期待値を考えて，それを積分表示する．そして

$$\left\{\begin{array}{l}\text{stationary phase}\\ \text{saddle point}\end{array}\right\} \text{method} \quad \leftarrow \text{SPM}$$

を使って classical dilog. identity の左辺を出せる

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S} \text{ の } \hbar \to 0 \text{ での様子} \longleftrightarrow S \text{の臨界点の周りでの寄与}$$

これによって

$$\begin{array}{lcl}\text{臨界点} & \longleftarrow & y\text{変数}\\ \text{寄与} & \longleftarrow & L(y\text{変数})\end{array}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ QDIの右辺の漸近挙動 $=0$.

Step1 + Step2 $\Longrightarrow$ classical dilog. identity. $\square$

我々の状況ではStep1はそのままOK:

$$\mathrm{Tr}(q\text{-Teich}_\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{up to SPM}}}{=\!=} \sum L(y\text{変数})$$

$q\text{-Teich}_\varphi = \Phi_q(Y_1)\cdots\Phi_q(Y_n)$ のように書ける

($q\text{-Teich}_{\text{flip}} = \Phi_q(Y)$ と書ける．φ が flipsの列の合成で書けるので，$q\text{-Teich}_\varphi$ は quantum dilog.の合成で書ける)

$q\text{-Teich}_\varphi$ の $q \to 1$ での様子は Step1 のようにしてわかる

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Vol}(T_\varphi) & \xleftarrow{\ ?\ } & \mathrm{Tr}(q\text{-}\mathrm{Teich}_\varphi) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle q\to 1} \\
\sum JI(z_i) & & \sum L(y\text{変数})
\end{array}$$

(各四面体に対応するパラメータ) ── 主結果 ── (flipごとにy変数が得られる)

[N.-Terashima-Yamazaki]

各フリップごとに四面体が1個

注 [TY]の2つ目の論文は8の字結び目で

$\mathrm{Tr}(CS_\varphi) = CS(T_\varphi)$ と $\mathrm{Tr}(q\text{-}\mathrm{Teich}_\varphi)$

の一致を確認している

$SL(2,\mathbb{R})$?

注 $\mathrm{Tr}(q\text{-}\mathrm{Teich}_\varphi)$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の量子不変量.

黒板にはLivoulle と書いてあった

注

4d gauge theory $\xleftrightarrow{\text{AGT}}$ Liouville theory

S-duality wall $\cup$ $\qquad$ $\updownarrow$ Teschner

3d gauge theory $\qquad$ quantum Teichmüller

$\|$

$SL(2,\mathbb{C})$-CS $\xleftrightarrow{[TY]}$ quantum Teichmüller

S-duality は MCGの作用そのもの

注 長谷川：DTはどこに入るのですか？

長尾：それはぼくも知りたいところで