2012-05-09 長尾健太郎氏の集中講義(2)

黒木玄記

§2 カスプ付きRiemann面のTeichmüller理論

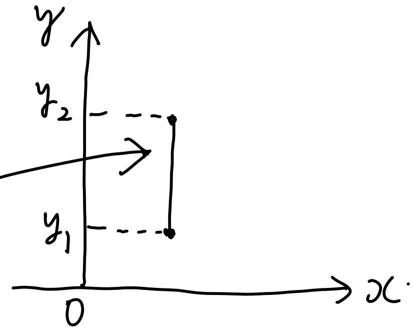
§2-1 上半平面モデル

$\mathbb{H}^2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\} = \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$

$\mathbb{H}^2$ 上の計量 $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$

$(\mathbb{H}^2, ds)$ は上半平面モデルと呼ばれる

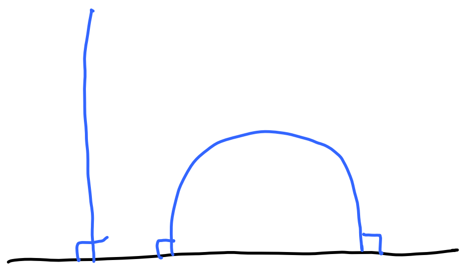
$\boxed{\text{注}}$ ① $\displaystyle\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{y} = \log\frac{y_2}{y_1}$ =(右の線分の長さ)



② 測地線は

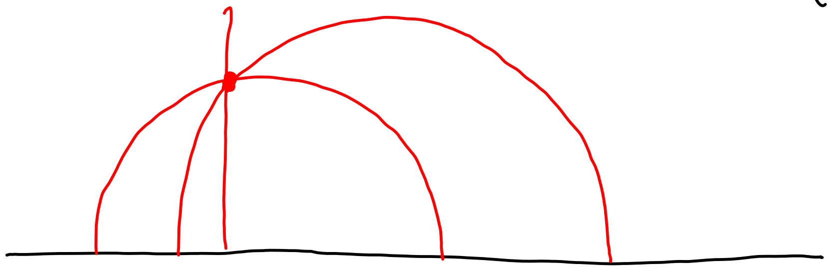
$\partial\mathbb{H}^2$ =(実軸)に直交する半円と

$\partial\mathbb{H}^2$ =(実軸)に直交する直線



(注) 測地線を"直線"と定義することで
非ユークリッド幾何の例となっている

第5公理が成立しない
(1〜4は成立する)



$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

$$\begin{cases} z = x+iy \\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}_{>0} \end{cases}$$

§2-2. 等長変換

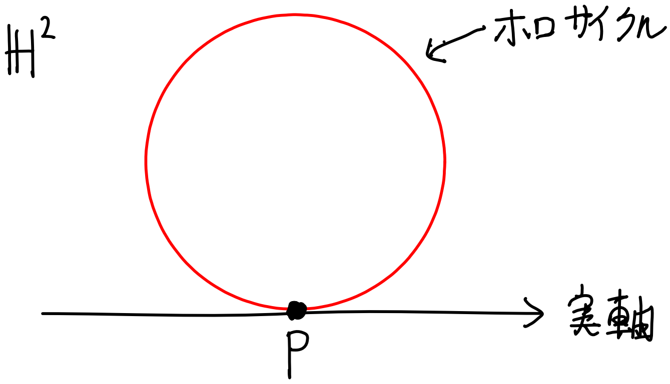
$$PSL(2,\mathbb{R}) := \overbrace{\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, ad-bc=1 \right\}}^{SL(2,\mathbb{R})} \Big/ \{\pm E\}$$

$z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ は $\mathbb{H}^2$ の計量 ds^2 を保つ.

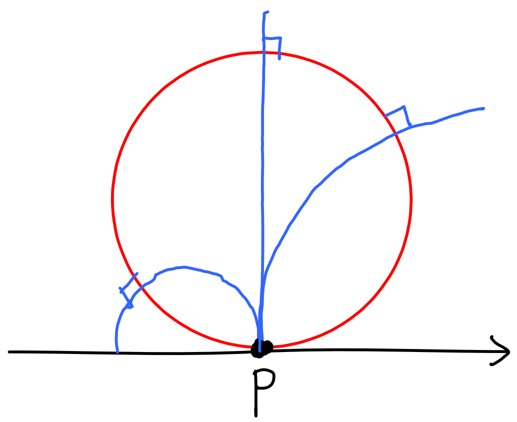
$PSL(2,\mathbb{R})$ は $\mathbb{H}^2$ に等長変換として作用する.

双曲幾何では $\mathbb{H}^2$ の開集合を等長変換ではりあわせた
Riemann多様体に関する幾何のことである

§2-3 ホロサイクル



$\mathbb{H}^2$ の境界に接する
(ユークリッド幾何の意味での)
円周のことを
ホロサイクルと呼ぶ.
(Pを中心とするホロサイクルと呼ぶ)

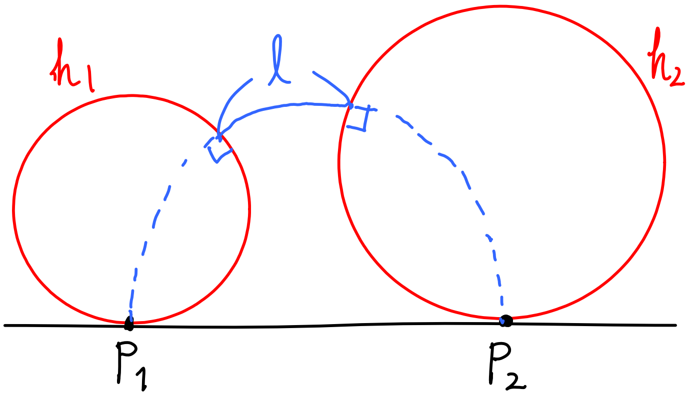


Pに収束する測地線は
Pを中心とするホロサイクルと
直交する

$\boxed{\text{レポート}}$ $c\in\mathbb{R}$に対して $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix}\right]\in PSL(2,\mathbb{R})$の作用は $0\in\mathbb{R}=\partial\mathbb{H}^2$を保つ. これは$0$を中心とするホロサイクルを保つ. (まわす)

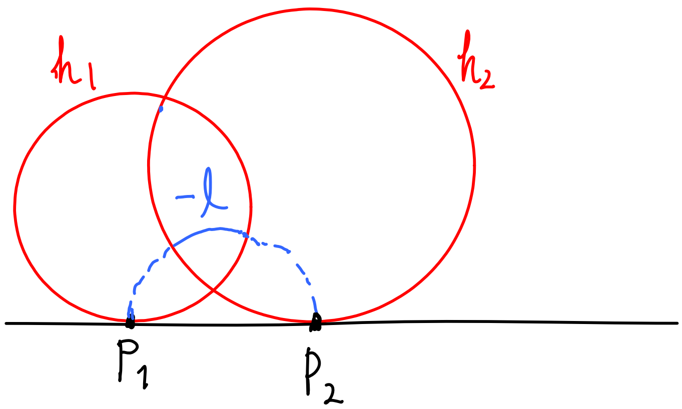
§2-4 λ距離

h_1, h_2 はそれぞれ P_1, P_2 を中心とするホロサイクルであるとする



P_1とP_2をむすぶ測地線のh_1とh_2にはさまれた部分の(符号付き)長さを$\ell(h_1,h_2)$と書き,

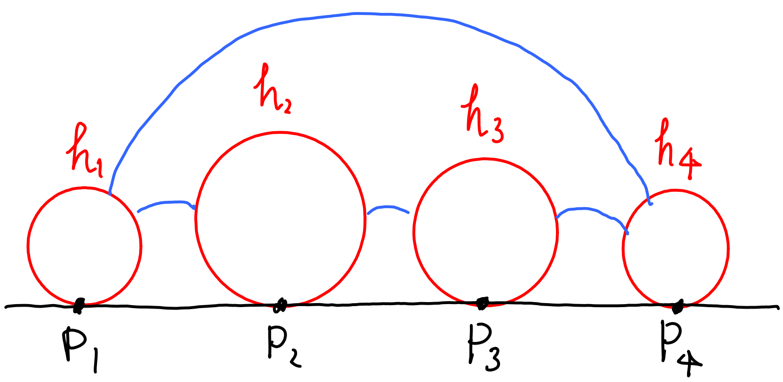
$$\lambda(h_1,h_2):=\sqrt{\exp(\ell(h_1,h_2))}$$



左の図の場合は-1倍する

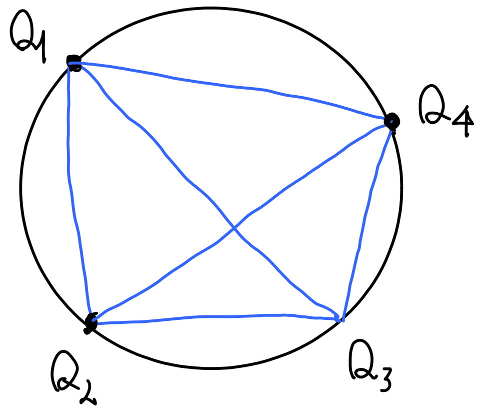
$\boxed{\text{レポート}}$ h_iを中心x_iとしユークリッド半径r_i $(i=1,2)$のホロサイクルとする. $\ell(h_1,h_2)$を求めよ.

λ距離に関するPtolemyの定理



$$\lambda(h_1,h_3)\lambda(h_2,h_4)$$
$$=\lambda(h_1,h_2)\lambda(h_3,h_4)$$
$$+\lambda(h_1,h_4)\lambda(h_2,h_3)$$

(注) 次のPtolemyの定理の類似:



$$
\begin{aligned}
&|Q_1Q_3|\cdot|Q_2Q_4| \\
&= |Q_1Q_2|\cdot|Q_3Q_4| \\
&\quad + |Q_1Q_4|\cdot|Q_2Q_3|
\end{aligned}
$$

レポート λ距離に関するPtolemyの定理を証明せよ

[Penner, Commun. Math. Phys. 113, 299-339 (1987)]

(注) 最終的に円周4点上の話に帰着される

§2-5 カスプ

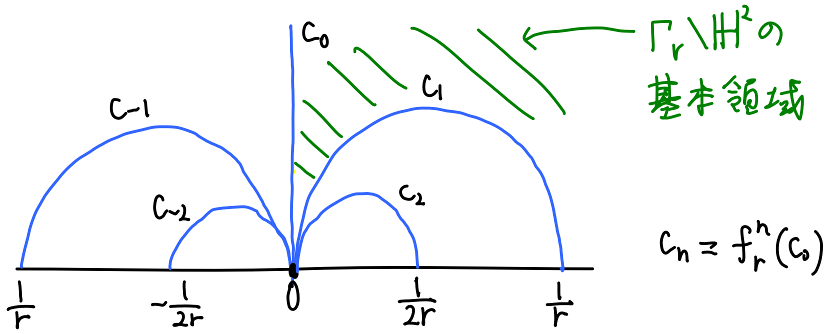
$$
r\in\mathbb{R}_{\neq 0},\quad \underset{\displaystyle \mathbb{Z}}{\overset{}{\Gamma_r}} \;\; \Gamma_r := r\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \hookrightarrow PSL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2
$$

$$
\Gamma_r \cong \mathbb{Z}, \qquad c \longmapsto \left[\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}\right]
$$

$r\in\Gamma_r\curvearrowright\mathbb{H}^2$, $f_r(z) := \dfrac{z}{rz+1}$ と定める.

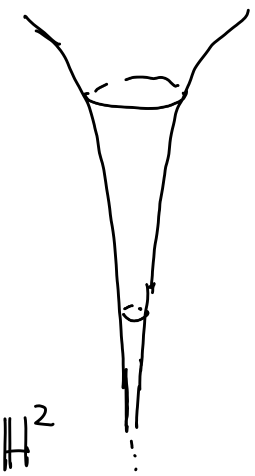
まわす

f_rの作用は原点と原点を中心とするホロサイクルを保つ.



$c_n = f_r^n(c_0)$

$$
\mathbb{H}^2 \longrightarrow \Gamma_r\backslash\mathbb{H}^2
$$



これの0の近傍を

カスプと呼ぶ

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ は 0 中心のホロサイクルを保つ(まわす)ので、

$\mathbb{H}^2$ 上の 0 中心のホロサイクルは $\Gamma_r \backslash \mathbb{H}^2$ 上の閉曲線を与える

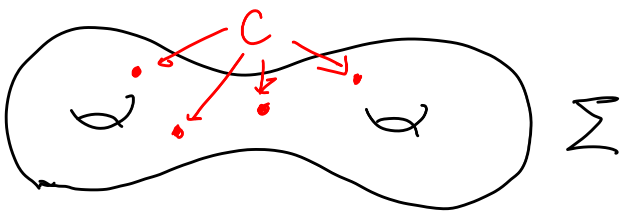
((ここで休みをとる 16:13〜16:28 くらい))

§2-6 Teichmüller 空間

Σ : 向き付きで境界のないコンパクト2次元多様体

$\cup$

C : 有限集合.



$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \backslash C \text{ 上の双曲構造で} \\ C \text{ にカスプを持つもの全体} \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{Aut}^0(\Sigma, C) =: T(\Sigma, C)$$

ここで $\mathrm{Aut}^+(\Sigma, C) := \{ \varphi : \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma, \text{ 向きを保つ}, \varphi(C) = C \}$

$\mathrm{Aut}^0(\Sigma, C) := (\mathrm{Aut}^+(\Sigma, C) \text{ の } \mathrm{id}_\Sigma \text{ を含む連結成分})$

$MCG(\Sigma, C) := \pi_0(\mathrm{Aut}^+(M, C)) = \mathrm{Aut}^+(\Sigma, C) / \mathrm{Aut}^0(\Sigma, C).$

構成について ($T(\Sigma, C)$ の) (おまけ)

$$\mathrm{Hom}'(\pi_1(\Sigma \backslash C), PSL(2, \mathbb{R})) = \left\{ \begin{array}{l} \rho : \pi_1(\Sigma \backslash C) \to PSL(2, \mathbb{R}), \\ \text{— 単射群準同型} \\ \text{— 像が離散的} \\ \text{— } \forall c \in C \text{ に対して } c \text{ の周りを1周する} \\ \quad \pi_1(\Sigma \backslash C) \text{ の元を放物的な元に} \\ \quad \text{うつす.} \qquad \mathrm{tr} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} H^1(\pi_1(\Sigma\setminus C), PSL(2,\mathbb{R}))/PSL(2,\mathbb{R}) & \simeq & T(\Sigma,C). \\ \cup & & \cup \\ \left[\rho:\Gamma=\pi_1(\Sigma\setminus C)\to PSL(2,\mathbb{R})\right] & \longmapsto & \rho(\Gamma)\backslash\mathbb{H}^2 \end{array}$$

decorated Teichmüller 空間

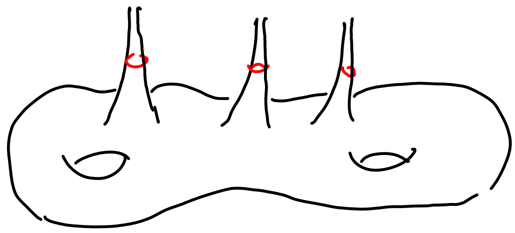
$$\tilde{T}(\Sigma,C) = \{(\rho,(h_c)_{c\in C}) \mid \rho\in T(\Sigma,C),\ h_c : c\text{中心のホロサイクル}\}$$

$$\downarrow$$

$$T(\Sigma,C) = \{\ \rho\ \}$$

これの fibier は $(\mathbb{R}_{>0})^{|C|} \simeq \{(h_c\text{の半径})_{c\in C}\} \cong \{(h_c)_{c\in C}\}$

$\tilde{T}(\Sigma,C) \ni$

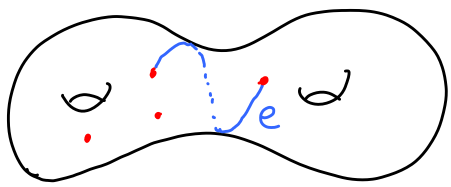


がホロサイクル

$T(\Sigma,C) \ni$

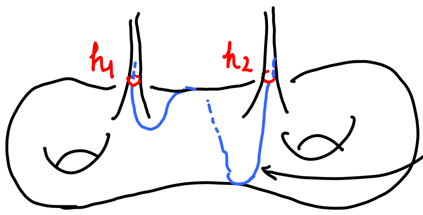
Penner座標

e は C の点を結ぶ曲線



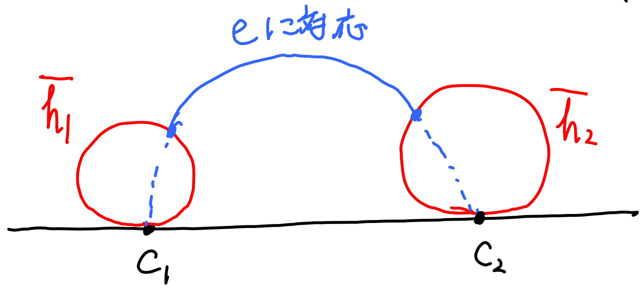
(e を up to homotopy で考える)

$(\rho,(h_c)_{c\in C}) \in \tilde{T}(\Sigma,C)$



e を実現する測地線
2つのホロサイクルの間の距離を
$l_e(\rho,(h_c)_{c\in C})$ とおく
$\quad\| $
$\ l(\bar{h}_1,\bar{h}_2)$

これを $\mathbb{H}^2$ 上で図示すると



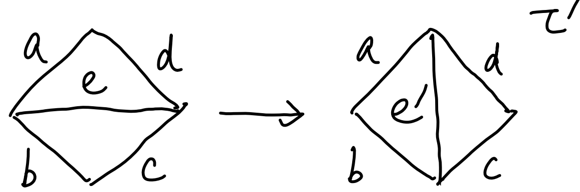
$$\lambda_e(\rho,(h_c)_{c\in C}) := \sqrt{\exp l_e(\rho,(h_c)_{c\in C})} = \lambda(\bar{h}_1,\bar{h}_2).$$

<u>Theorem</u> [Penner]

τ は (Σ, C) の三角形分割であるとし $E := E_\tau = $(辺の集合) とする.

(1)
$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}(\Sigma,C) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{R}_{>0})^E \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\rho,(h_c)_{c\in C}) & \longmapsto & (\lambda_e)_{e\in E} = (\lambda_e(\rho,(h_c)_{c\in C}))_{c\in C} \end{array}$$

(2) $e\in E$ による flip を考える:

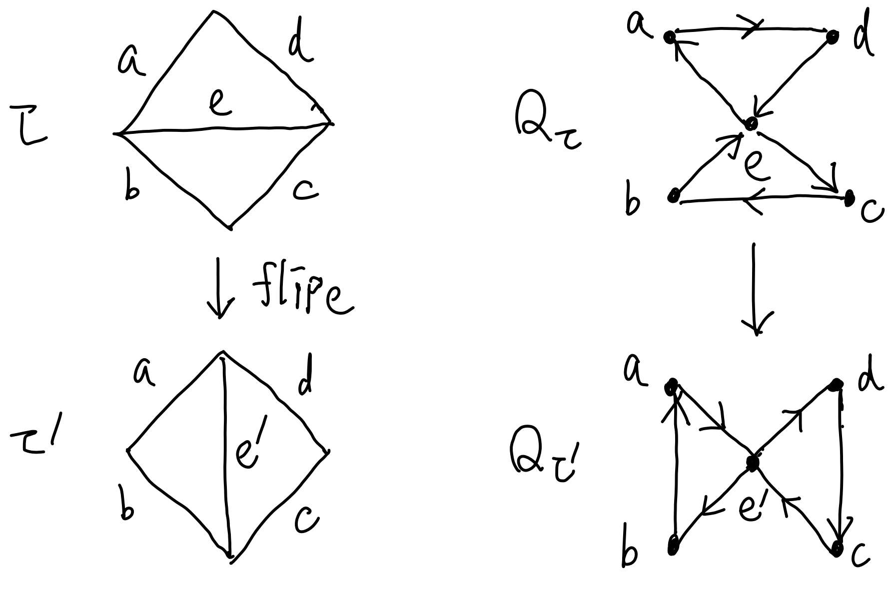


τ' に対する λ_i を λ'_i と書く

$\lambda'_i = \lambda_i$ if $i \neq e$ (自明). そして Ptolemy の定理より,

$$\lambda'_{e'} = \frac{\lambda_a\lambda_c + \lambda_b\lambda_d}{\lambda_e}. \qquad \square$$

(注) これは τ に対応する quiver Q_τ に対するクラスター変換に他ならない



$$x_e \longrightarrow x'_e = \frac{x_a x_c + x_b x_d}{x_e}$$

写像類群の作用

$[\varphi] \in MCG(\Sigma, C) = \pi_0(\mathrm{Aut}^+(\Sigma, C))$ の $\tilde{T}(\Sigma, C)$ への作用.

$\varphi : \tau \longmapsto \varphi(\tau)$ (新しい三角形分割)　[Fomin-Schapiro-Thurston]

$\exists$flipの列　$\tau \to \tau' \to \cdots \to \varphi(\tau)$ が存在して,

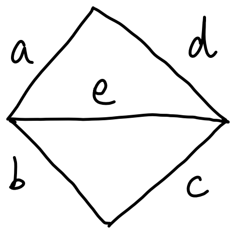
対応する cluster 変換の合成によって $[\varphi]$ の作用を記述できる

τ と $\varphi(\tau)$ による別の座標の入れ方を cluster 変換で

比較できる

Fock座標

• τ : 三角形分割, e : τ の辺,



という状況に対して

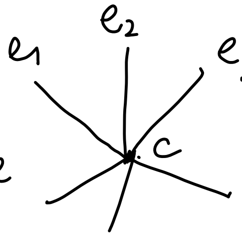
$F_e^\tau := l_a - l_b + l_c - l_d$ とおく.　(l_i は $\tilde{T}(\Sigma, C)$ 上の函数)

この F_e^τ は $T(\Sigma, C)$ の上の函数におちる

$$\begin{tikzcd} \tilde{T}(\Sigma, C) \arrow[d] \arrow[dr, "F_e^\tau"] & \\ T(\Sigma, C) \arrow[r, dashed] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

• $c \in C$ に対して

$F_c^\tau := \sum_j F_{e_j}^\tau$　where



このとき $F_c^\tau = 0$.　(c のまわりをぐるっとまわる和を取ると l_i たちがキャンセルする)

<u>Theorem</u> [Fock]

$$T(\Sigma, C) \xrightarrow{\sim} \{(F_e)_{e \in E} \in \mathbb{R}^E \mid F_c = 0 \ (\forall c \in C)\} \cong \mathbb{R}^{|E| - |C|}. \qquad \square$$

注　$\tilde{T}(\Sigma, C) \leftrightarrow x$-variables,　$T(\Sigma, C) \leftrightarrow y$-variables

(注) 明日使うのは今日の話の"複素化"版.
すべてが代数的に書けているので"複素化"できる

$$T(\Sigma, C)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{|E|-|C|} \curvearrowleft MCG$$

これは、$\mathrm{Hom}'(\pi_1(\Sigma \setminus C), PSL(2,\mathbb{R}))$ の $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に変えたもの
に対応するはずだが、Hom′の"′"の条件については
まじめに考えてないのでわからない

3次元の双曲幾何とも関係して来ることを明日説明する