2012-05-07 談話会ノート（東北大学）

黒木玄記

非可換 Donaldson-Thomas 理論　　　長尾 健太郎

ひとことで言うと、

Donaldson-Thomas 理論

= moduli theory of coherent sheaves on Calabi-Yau 3-folds
(moduli space の不変量を考える。)

= holomorphic analogue of Casson inv. and Chern-Simons theory for holomorphic 3-folds.

さらに、

moduli = critical locus of a holomorphic function (hol. CS function)

すべてを category (derived category) で考える

moduli theory of objects in a 3-dim. CY category

$\mathrm{Hom}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}(Y, X[3])^*$

Serre duality

Q: quiver, W: potential

$\rightsquigarrow$ $\Gamma_{Q,W}$: Ginzburg differential graded alg.

$H^0(\Gamma_{Q,W}) =: J_{Q,W}$, Jacobi algebra

$\mathcal{D}$ = the derived category of dg modules over $\Gamma_{Q,W}$ is 3CY!

$\cup$

$\mathrm{mod}\, J_{Q,W}$ = the category of $J_{Q,W}$-modules

moduli theory of $J_{Q,W}$-modules =: non-commutative DT theory

例 $Y := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ 3-dim.

$$\downarrow$$

$X := \{xy - zw = 0\} \subset \mathbb{C}^4$, conifold

これに対して quiver が書ける:

$$Q: \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend left=50] & \bullet \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \end{tikzcd}$$

$\exists W$ ← これについては説明しない.

$$D^b(\mathrm{coh}\, Y) \cong D^b(\mathrm{mod}\, J_{Q,W}) = \mathcal{D} \quad \left(\begin{array}{l} \text{一般には} \\ \mathcal{D} \neq D^b(\mathrm{mod}\, J_{Q,W}) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ \mathrm{coh}\, Y & \longleftrightarrow & \mathrm{mod}\, J_{Q,W} \end{array}$$

ちがうAbel圏 (比較したい)

□

比較で重要になるのが <u>Bridgeland stability condition.</u>

a stability condition of a triangulated category $\mathcal{D}$

$= (\mathcal{A}, Z)$ $\quad \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ (core of a t-str.)

$\quad Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$, group hom. (central charge)

$\quad$ (Grothendieck group)

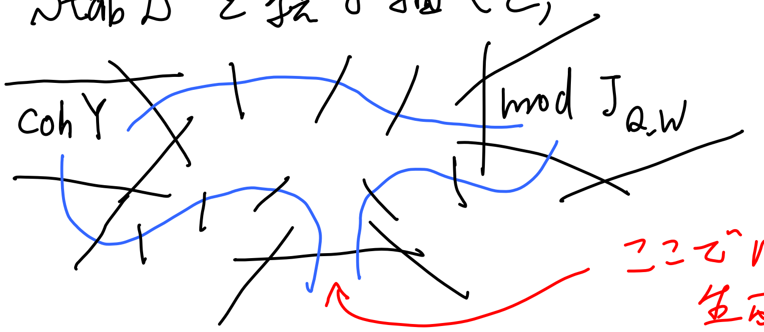
$\quad$ + HN property

<u>Fact</u> $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}) = \{\text{stability conditions}\}$ は complex mfd になる!

上の例つづき

Stab $\mathcal{D}$ を絵で描くと、

カベを超えるとAbel圏が変わる



wall
カベを超えると不変量の生成函数が変化する
その変化の仕方もわかる。

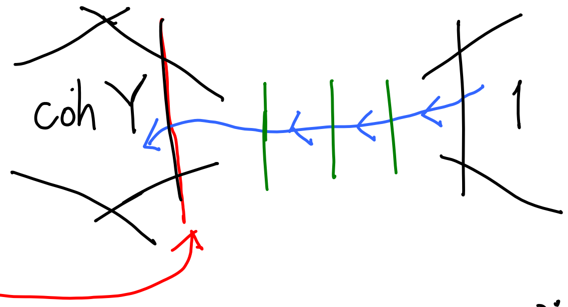
Y の DT Inv. の生成函数

$$Z^Y_{DT} = \prod_{i>0}(1-q^i)^{-2i} \times \prod_{i>0}(1-q^i\Lambda)^i$$

$(q \leftrightarrow \text{point},\ \Lambda \leftrightarrow \text{curve})$

みどりのカベ

カベを超えるごとに生成函数に $(1-q^i\Lambda)^i$ がかけられる!
(逆向きだとこれをキャンセルさせるようにかけられる。)



このカベを超えると $\prod_{i>0}(1-q^i)^{-2i}$ がかかる!

これは [Nagoo-Nakjima].

こういうことは derived cat. まで広げないとできない。

これはうまくいった話

$\square$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ は 3-dim だが 1次元的!

$\rightsquigarrow$ chamber str., wall crossing, ...

しかし上の地道な方法だと、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ には手がつかない

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ でも $Z_{DT}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)}$ が formal な和で定義される

(formal power series)

その formal な和は収束して holomorphic になってて

解析接続されて modular property があったりとか、

integrable operator の固有函数になってるとかが

期待されている.

こういう話につながる現象がある

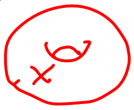
① derived category $\mathcal{D}$ $\longrightarrow$ DT theory

derived category に広げると対称性が増える: $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D} \curvearrowright \mathcal{D}$.

曲面の三角形分割に対して三角圏 $\mathcal{D}$ が定義される

その $\mathcal{D}$ には mapping class group が作用してる

よって DT theory にも mapping class group が作用する

modula property for 

② [Bridgeland-Toledano-Laredo]

Stab $\mathcal{D}$ 上に isomonodromy 変形が構成される

上の例のつづき

$$Z_{DT}^{J_{Q,W}} = \prod_{i>0}(1-q^i)^{-2i} \times \prod_{i>0}(1-q^i\Lambda)^{i} \times \prod_{i>0}(1-q^i\Lambda^{-1})^{i}. \quad \square$$

◎ 2-dim. の K3 でも計算できるが、3CY の方がきれいに計算できる