Weyl群双有理作用と τ 函数の量子化

量子化された τ 函数の正則性

黒木玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

1. Weyl群双有理作用と τ 変数の量子化

Noumi-Yamada [2] はべき零 Poisson 代数から Weyl 群双有理作用を構成し, その作用を τ 函数まで拡張した. 筆者は [1] でべき零 Poisson 代数から得られる Weyl 群双有理作用を量子化した. この節ではその量子化を τ 函数まで拡張する.

まず, べき零 Poisson 代数の量子化を導入する.

$[a_{ij}]_{i\in I}$ は対称化可能一般 Cartan 行列 (GCM)) であるとし, それが定める Weyl 群, $\mathbb{C}$ 上の Kac-Moody Lie 代数の下三角部分の普遍展開環, $\mathbb{C}(q)$ 上の量子展開環の下三角部分をそれぞれ $W = \langle s_i | i \in I\rangle$, $U^- = U(\mathfrak{n}^-)$, $U_q^- = U_q(\mathfrak{n}^-)$ と書く. U^- と U_q^- の Chevalley 生成元をどちらも同じ記号 $\{f_i\}_{i\in I}$ で表わす.

U^-, U_q^- の剰余整域 (零因子を持たない剰余代数) をそれぞれ $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ と書く. それらは Noumi-Yamada [2] におけるべき零 Poisson 代数の自然な量子化である. f_i のそれらにおける像も同じ記号 f_i で表わすことにする. f_i たちは $\widetilde{\mathcal{A}}$ の中では Serre 関係式を $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ の中では q-Serre 関係式を満たしている. 以下では簡単のために f_i の $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ における像はどれも 0 にならないと仮定することにする (本質的な仮定ではない).

GCM が有限型またはアフィン型ならば $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ は常に Ore 整域になる ([1]). どちらでもない場合には $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ が Ore 整域になると仮定しておくことにする. 一般に Ore 整域 A は自然な分数斜体 $Q(A) = \{\, as^{-1} \mid a, s \in A,\ s \neq 0\,\}$ を持つ. 分数斜体 $Q(A)$ への群の代数自己同型作用は可換整域の Spec への群の双有理作用の量子版とみなせる. これが Ore 条件を仮定した理由である.

次に, パラメーター変数と τ 変数を導入しよう.

記号 $\alpha_i^\vee$ $(i \in I)$ から生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を $Q^\vee$ と表わし, 記号 Λ_i $(i \in I)$ から生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を P と表わす. それらのあいだの内積 $\langle\ ,\ \rangle : Q^\vee \times P \to \mathbb{Z}$ を $\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j\rangle = \delta_{ij}$ によって定める. $\alpha_j = \sum_{i\in I} a_{ij}\Lambda_i$ とおく. このとき $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j\rangle = a_{ij}$ が成立する. $\alpha_i^\vee$, α_i, Λ_i をそれぞれ単純 coroot, 単純 root, 基本ウェイトと呼ぶ. さらに $P^+ = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geqq 0}\Lambda_i$ とおき, その元をドミナント整ウェイトと呼ぶ.

$Q^\vee$, P には Weyl 群が $s_i(h) = h - \langle h, \alpha_i\rangle\alpha_i^\vee$ $(h \in Q^\vee)$, $s_i(\mu) = \mu - \langle \alpha_i^\vee, \mu\rangle\alpha_i$ $(\mu \in P)$ によって自然に作用する. これらの作用は上の内積を保つ.

生成元 $\alpha_i^\vee$, $\tau_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ と以下の基本関係式で定義される $\mathbb{C}$ 上の代数 (ある種の差分作用素環) を D と表わす:

$$\alpha_i^\vee \alpha_j^\vee = \alpha_j^\vee \alpha_i^\vee, \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad \tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}.$$

生成元 $q^{\pm\alpha_i^\vee}$, $\tau_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ と以下の関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数 (ある種の q 差分作用素環) を D_q と表わす:

$$q^{\alpha_i^\vee} q^{\alpha_j^\vee} = q^{\alpha_j^\vee} q^{\alpha_i^\vee}, \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad \tau_i q^{\alpha_j^\vee}\tau_i^{-1} = q^{\alpha_j^\vee + \delta_{ij}} = q^{\delta_{ij}} q^{\alpha_j^\vee}.$$

本研究は科研費 (課題番号:23540003) の助成を受けたものである.

* e-mail: kuroki@math.tohoku.ac.jp

web: http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/index-j.html

以上において τ_i^{-1}, $q^{-\alpha_i^\vee}$ がそれぞれ τ_i, $q^{\alpha_i^\vee}$ の逆元になるという関係式は省略した.

$\alpha_i^\vee \in D$ (および $q^{\alpha_i^\vee} \in D_q$) を**パラメーター変数**と呼び, τ_i を **τ 変数**と呼ぶ. **τ 変数は本質的にパラメータ変数の正準共役変数 (の指数函数) である.**

$h \in Q^\vee$ と $\nu \in P$ に対して q^h と τ^ν を $q^h = \prod_{i\in I}(q^{\alpha_i^\vee})^{\langle h,\Lambda_i\rangle}$, $\tau^\nu = \prod_{i\in I}\tau_i^{\langle\alpha_i^\vee,\nu\rangle}$ と定める. ($\nu \in P^+$ 以外の場合にこの τ^ν はあとで導入する本質的に重要な τ 函数 $\tau_\nu = w(\tau^\mu)$ ($\nu = w(\mu) \in WP^+$) と一致しないので, 混同しないように注意せよ.)

Weyl 群は代数 D, D_q に代数自己同型として自然に作用する. すなわち $w \in W$ の自然な作用を $\widetilde{w}$ と書くと, $\widetilde{w}(h) = w(h)$, $\widetilde{w}(q^h) = q^{w(h)}$ ($h \in Q^\vee$), $\widetilde{w}(\tau^\nu) = \tau^{\widetilde{w}(\nu)}$ ($\nu \in P$). たとえば $\tilde{s}_i(\tau_i) = \prod_{k\neq i}\tau_k^{-a_{ki}}/\tau_i$ かつ $\tilde{s}_i(\tau_j) = \tau_j$ ($i \neq j$).

$\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}} \otimes D$, $\mathcal{A}_q = \widetilde{\mathcal{A}}_q \otimes D_q$ とおく. $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ が Ore 整域になるという仮定より, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_q$ も Ore 整域になる. よって分数斜体 $Q(\mathcal{A})$, $Q(\mathcal{A}_q)$ が自然に定義される. $\widetilde{\mathcal{A}}$, D のそれぞれと $\widetilde{\mathcal{A}} \otimes 1$, $1 \otimes D$ を同一視し, $\widetilde{\mathcal{A}}_q$, D_q のそれぞれと $\widetilde{\mathcal{A}}_q \otimes 1$, $1 \otimes D_q$ を同一視する. D, D_q への $w \in W$ の作用を $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ への作用に自明な方法で拡張したものも $\widetilde{w}$ と書くことにする: $\widetilde{w}(f_i) = f_i$.

定理 1 (量子化された Weyl 群双有理作用)**.** Weyl 群の $Q(\mathcal{A})$, $Q(\mathcal{A}_q)$ への代数自己同型作用を次のように構成することができる:

$$s_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(x)f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (x \in Q(\mathcal{A}) \text{ または } x \in Q(\mathcal{A}_q)).$$

($Q(\mathcal{A})$ と $Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 $x \mapsto f_i^{\alpha_i^\vee} x f_i^{-\alpha_i^\vee}$ がうまく定義されることを含む.) □

たとえば s_i の τ 変数への作用は次のように計算される: $s_i(\tau_j) = \tau_j$ ($i \neq j$) でかつ

$$s_i(\tau_i) = f_i^{\alpha_i^\vee}\frac{\prod_{k\neq i}\tau_k^{-a_{ki}}}{\tau_i}f_i^{-\alpha_i^\vee} = f_i^{\alpha_i^\vee}f_i^{-\alpha_i^\vee+1}\frac{\prod_{k\neq i}\tau_k^{-a_{ki}}}{\tau_i} = f_i\frac{\prod_{k\neq i}\tau_k^{-a_{ki}}}{\tau_i}.$$

2. 量子化された τ 函数の定義と正則性

$\mu \in P^+$ と $w \in W$ に対して $w(\tau^\mu)$ は $\nu = w(\mu) \in WP^+$ だけから決まる. そこで**量子 τ 函数** $\tau_\nu = \tau_{w(\mu)}$ を $\tau_\nu = \tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ によって定める.

予想 (量子 τ 函数の正則性)**.** すべての量子 τ 函数 $\tau_{w(\mu)}$ ($\mu \in P^+$, $w \in W$) は $\mathcal{A}$ または $\mathcal{A}_q$ に含まれる (すなわち f_i に関して多項式になる). □

この予想は category $\mathcal{O}$ の translation functors の理論が利用できる場合にはただちに証明される. Noumi-Yamada [2] はこの予想の古典版を一般的に証明している. しかし証明法は互いにまったく異なる.

定理 2. Kac-Moody Lie 代数の場合に上の予想は常に成立する. 量子展開環の場合には上の予想は有限型の場合および A_∞ 型などの場合に成立する. □

参考文献

[1] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 61, 2011. Exploring New Structures and natural Constructions in Mathematical Physics. pp. 289–325. `arXiv:math/0808.2604`

[2] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. `arXiv:math.QA/0012028`