数学の世界には法則がある

黒木玄

東北大学数学教室

2010年10月13日

数学上達のコツ (1)

- いきなり難しいことに挑戦せずに
  易しいことから順番に練習する。
  - 九々をマスターせずに
    二桁以上の掛け算に挑戦するのは無謀
  - 単独の一次方程式が解けないのに
    連立一次方程式に挑戦するのも無謀
  - 難問に出会ったときに
    関連のより易しい問題を解いてみること
    は常套手段 (基本中の基本!)

数学上達のコツ (2)

- 繰り返しの練習によって
  意識しなくてもできることを増やす。
  - 九々
  - 高校レベルでは特に連立方程式が重要
  - 自動的に答が頭の中に浮かんだり、考えなくても手が勝手に動いてくれる問題が増えると、じっくり考えることによって解ける問題の範囲が広がる。

数学上達のコツ (3)

- 自分のやり方の欠点を修正
  - 遠回りをしていないか？
  - 近道するために苦労していないか？
  - 効率の悪い計算の仕方をしていないか？
  - 一般的な理論を十分に理解しているか？
  - 面白い例をたくさん知っているか？
  - 問題の本質を理解しているか？

数学上達のコツ (4)

- 成功するまでがんばり続ける
  - 数学は難しいので
くじけそうになることがよくある
  - 過去の成功の経験が
くじけそうになった心を支える
  - 経験に支えられた楽観
「結局、理解できるに決まっている」
には理屈を超えた強さがある.

上達のコツが似ていること

- 上達のコツは多くの分野で似ている
  1. 易しいことから順番に練習
  2. 繰り返しの練習によって
意識しなくてもできることを増やす
  3. 意識して自分の欠点を修正する
  4. 成功するまでがんばり続ける
- ある分野で身に付けたコツの
他分野への応用は難しいが、
似ているという認識は重要

私が特別に数学を研究する理由？

- 好きだから
- たくさんの驚くべき法則
- 不思議な世界への旅
- 成功したときの快感
- 理解力のパワーアップによる余得
- 100 年後の世界を変えているかも

私が特別に数学を研究する理由？

- 好きだから
- たくさんの驚くべき法則
- 不思議な世界への旅
- 成功したときの快感
- 理解力のパワーアップによる余得
- 100 年後の世界を変えているかも

数学は世界を変えて来た

- 例 1: テレビのデジタル化
  - 動画と音声の圧縮技術
  - フーリエ解析＋無駄な情報の削除
- 例 2: GPS を使ったカーナビ
  - 一般および特殊相対性理論
  - 時空の幾何学 (リーマン幾何学)
- 例 3: デジタル式の携帯電話
  - 符号理論 (通信の信頼性の確保)
  - 暗号理論 (プライバシーの確保)
  - これらは整数論の応用
- これからも世界を変えて行くだろう

数学の法則たちが応用されている

- 例 1: フーリエ解析 (多くの技術の基礎)
  - あらゆる波形は正弦波の和で表現可能
  - フーリエは 18〜19 世紀の人
- 例 2: リーマン幾何学 (時空の幾何)
  - 計量だけで時空の曲がり方を表現可能
  - 19 世紀中頃に大数学者リーマンが創始
  - 20 世紀初頭にアインシュタインが応用
- 例 3: 整数論 (数学の女王, 大昔からある分野)
  - 数の世界には様々な法則がある
  - 携帯電話が使えるのは整数論のおかげ

教訓

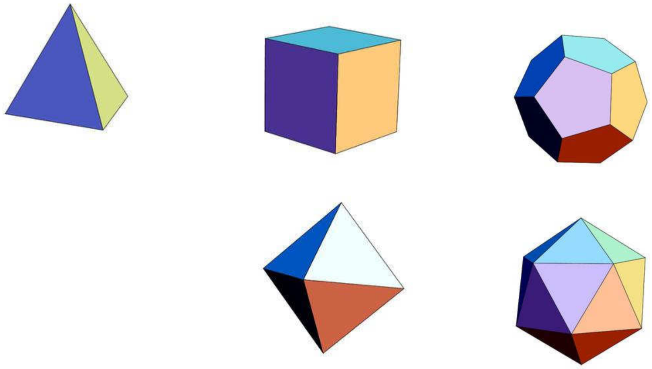
- 数学における驚くべき法則の発見は
  我々の暮らしを変えて来たが、
  応用されるまでには時間がかかる。
- 19 世紀もしくはそれ以前に
  法則を発見した数学者たちが現代の
  応用先を予想できていたはずがない。
- 結論: 応用とは無関係に
  研究を進めることも重要。

未発見の法則がたくさんあるはず

- 新しい数学的法則のどれかは
  将来の暮らしを豊かにするだろう。
- しかし数十年〜数百年の時間が
  必要になるかもしれない。
- 未発見の法則が残っている証拠:
  現在でも新しい法則が発見され続けている。
- 例: クラスター代数

(フォーミン&ゼレヴィンスキーが 2001 年頃に発見した)

プラトンの正多面体の分類



- すべての面は互いに合同な正多角形
- すべての頂点に接する面の数は互いに等しい
- 正多面体は上の５種類に限る (プラトン学派の成果らしい)

サッカーボール・クイズ

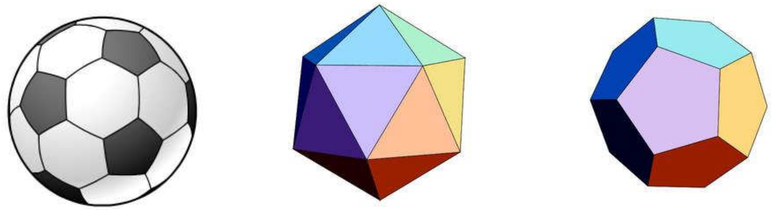
問題: サッカーボールには黒の五角形と白の六角形がそれぞれ幾つあるか？

(制限時間 10 秒)

ヒント: 正十二面体と正二十面体との関係

サッカーボール・クイズの解答

- 五角形は 12 個 (正十二面体の面の個数)
- 六角形は 20 個 (正二十面体の面の個数)

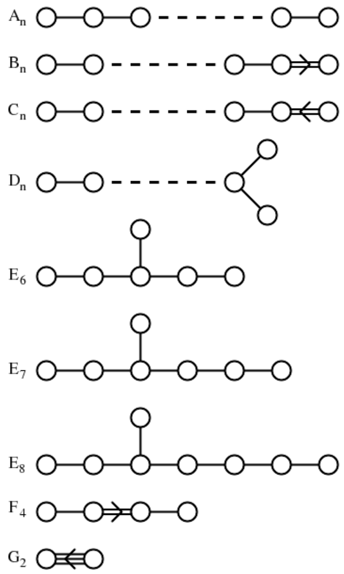


温故知新

- 正多面体の分類論の現代的復活
- ディンキン数学
  - 多くの種類の数学的対象が
    ディンキン図形で分類される！
  - 正多面体は例外型 E_6, E_7, E_8 に対応
  - 特異点の分類
  - 有限次元単純 Lie 代数の分類
  - 他にもたくさんある
  - 最近の例: 有限型クラスター代数

    (フォーミン＆ゼレヴィンスキーが分類 (2003 年出版))

ディンキン図形



- n は ○ の個数
- A_n, B_n, C_n, D_n の 4 種の無限系列は古典型と呼ばれている
- $E_{6,7,8}, F_4, G_2$ の 5 つは例外型と呼ばれている
- 基本は **ADE** 型

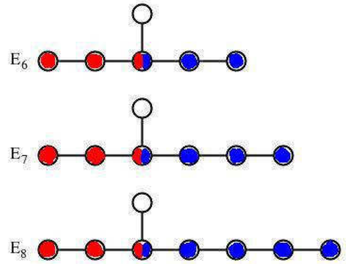
E. ディンキン (1924–)

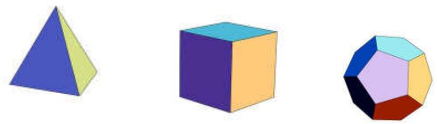
http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=973

E 型ディ図形と正多面体の対応

- ● の数と ● の数 (左側の長さと右側の長さ)
  $\longleftrightarrow$ 各面の辺の数と各頂点に接する辺の数

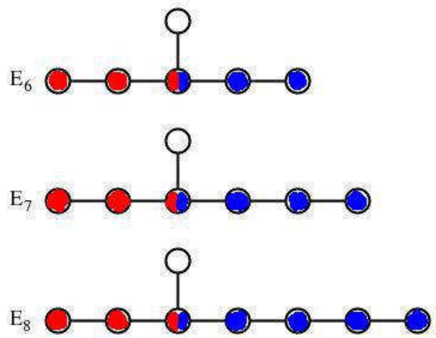
(3,3) $E_6 \longleftrightarrow$ 正四面体
(3,4) $E_7 \longleftrightarrow$ 立方体 (と正八面体)
(3,5) $E_8 \longleftrightarrow$ 正十二面体 (と正二十面体)

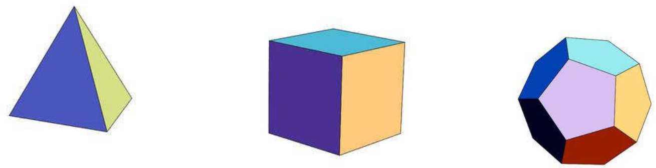




E 型ディンキン図形の拡大図

(3,3) E_6
(3,4) E_7
(3,5) E_8

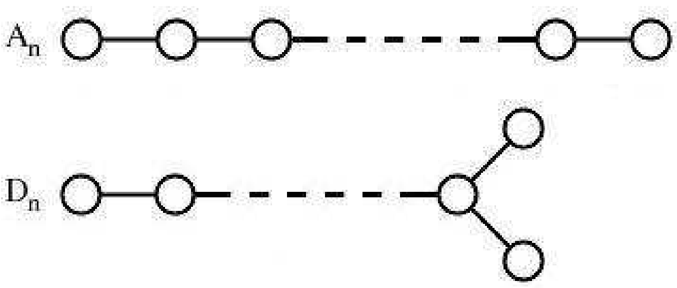




A 型,D 型ディ図形と正多角形の対応

正多角形の対称性

- 正 n 角形で裏返し禁止 $\longleftrightarrow$ A_{n-1} 型
- 正 n 角形で裏返し許可 $\longleftrightarrow$ D_{n+2} 型



フリーズ (frieze) とは

- フリーズ (frieze) ＝ 装飾のある横壁
(実例を紹介するが主題ではない)
- (数学における) フリーズ (パターン)
= ある単純な計算で得られる
装飾横壁に似た数字のパターン
(この話の主題)

フリーズ(装飾横壁)の実例 (1)

The Frieze of Parnassus encircles the base of the Albert Memorial in London and consists of 169 life-size full-length sculptures of individual artists from history. The total length of the frieze is approximately 210 feet.

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Decorative_emblems_The_Circus_Bath.jpg

フリーズ(装飾横壁)の実例 (2)

Frieze of animals, mythological episodes at the base of Hoysaleswara temple, India

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Halebid6.jpg

フリーズ(装飾横壁)の実例 (3)

The Circus (Bath), UK. Architectural detail of the frieze showing the alternating triglyphs and metope. (John Wood, the Elder, architect).

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Albert_Memorial_Friese_Collage_-_May_2008-edit1.jpg

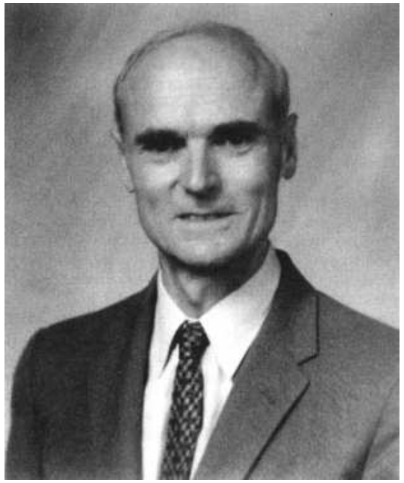
フリーズ

- 1970 年代にコンウェイとコクセターはちょっとした数遊びで作れる繰り返しパターン(コンウェイ・コクセター・フリーズと呼ばれる)が面白い性質を持っていることを示した。
- 21 世紀の始めにフォーミンとゼレヴィンスキーはクラスター代数の概念を発見した。コンウェイ・コクセター・フリーズは A 型のクラスター代数の特殊化になっている。

J. H. コンウェイ (1937–)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:John_H_Conway_2005.jpg

H. S. M. コクセター (1907–2003)



http://cms.math.ca/Prizes/info/images/coxeter.jpg

コンウェイ・コクセター・フリーズの例

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 3 & & 1 & & 4 & & 9 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 7 & & 4 & & 1 & & 3 & & 7 & & 4 & & 1 & \\
 & & 1 & & 4 & & 9 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

ここでは理由を説明しないが, コンウェイ・コクセター・フリーズはディンキン図形による分類では A 型に相当する.

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (1)

まず, 以下のように **1** を並べる:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

最上段と最下段は一直線.

左端の 1 の並びはもっとジグザグしていても構わない.

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (2)

そして, 次のルールで数字を埋めて行く.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & d \\
 & c &
\end{array} \qquad ad = bc + 1$$

a, b, c から d を $d = (bc+1)/a$ で定める.

(逆に d, b, c から a を $a = (bc+1)/d$ で定めることもできる.)

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (3)

最初のステップ

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

$$(1 \times 1 + 1)/1 = 2$$

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (4)

次のステップ

1 1 1 1 1 1 1 1
1 3
1 2
1 3
1
1
1 1 1 1 1 1 1 1

$(1 \times 2 + 1)/1 = 3$

$(2 \times 1 + 1)/1 = 3$

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (5)

その次のステップ

1 1 1 1 1 1 1 1
1 3
1 2 5
1 3
1 4
1
1 1 1 1 1 1 1 1

$(3 \times 3 + 1)/2 = 5$

$(3 \times 1 + 1)/1 = 4$

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (6)

さらにその次のステップ

1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2
1 2 5
1 3 7
1 4
1 5
1 1 1 1 1 1 1 1

$(1 \times 5 + 1)/3 = 2$

$(5 \times 4 + 1)/3 = 7$

$(4 \times 1 + 1)/1 = 5$

A 型のフリーズ・パターンの作り方 (7)

次の形まで計算できたとする.

1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2 2 2 1
1 2 5 3 3 1
1 3 7 4 1
1 4 9 1
1 5 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1

赤い 1 の部分は青い 1 の上下をひっくり返した形.
A 型フリーズ・パターンのルールは上下の反転で不変.
よって残りの部分は繰り返しの形になる.

A 型フリーズ・パターンの作り方 (8)

最後に残りの部分を繰り返しで埋める.

```
      1   1   1   1   1   1   1   1
    1   3   2   2   2   1   5   2   1
  1   2   5   3   3   1   4   9   1
    1   3   7   4   1   3   7   4   1
      1   4   9   1   2   5   3   3   1
        1   5   2   1   3   2   2   2   1
          1   1   1   1   1   1   1   1
```

赤い部分は青い部分の上下を反転した形になっている.

何が不思議かクイズ

問題: 何が不思議なのか？ (制限時間 30 秒)

```
      1   1   1   1   1   1   1   1
    1   3   2   2   2   1   5   2   1
  1   2   5   3   3   1   4   9   1
    1   3   7   4   1   3   7   4   1
      1   4   9   1   2   5   3   3   1
        1   5   2   1   3   2   2   2   1
          1   1   1   1   1   1   1   1
```

ルール:

```
   b
a     d
   c
```

$d = (bc + 1)/a$

何が不思議かクイズ解答

不思議なことが二つある.

1. (整数性) なぜかすべて割り切れて計算結果が整数になる.

```
   7
4     9
   5
```

$(7 \times 5 + 1)/4 = 9$
のようにうまく割り切れまくった!

2. (有限反復性) 有限個の数字を計算すれば残りの部分はその繰り返しになる.

他の例で検証: A_2 型

最上段と最下段を除いて２段の場合

```
    1   1   1   1   1
  1   2   2   1   3   1
    1   3   1   2   2   1
      1   1   1   1   1
```

やはり整数性と有限反復性が成立している.

他の例で検証: A_3 型

最上段と最下段を除いて３段の場合

```
  1   1   1   1   1   1   1
1   2   3   1   2   3   1
  1   5   2   1   5   2   1
1   2   3   1   2   3   1
  1   1   1   1   1   1   1
```

やはり整数性と有限反復性が成立している.

他の例で検証: A_4 型

最上段と最下段を除いて４段の場合

```
  1   1   1   1   1   1   1
1   2   2   2   2   1   5   1
  1   3   3   3   1   4   4   1
    1   4   4   1   3   3   3   1
      1   5   1   2   2   2   2   1
        1   1   1   1   1   1   1
```

やはり整数性と有限反復性が成立している.

練習問題 [1]

他の場合にも整数性と有限反復性が成立していることを具体例の計算で確認せよ.

(一般的に成立することを証明しなくてもよい. 証明は難しいと思う.)

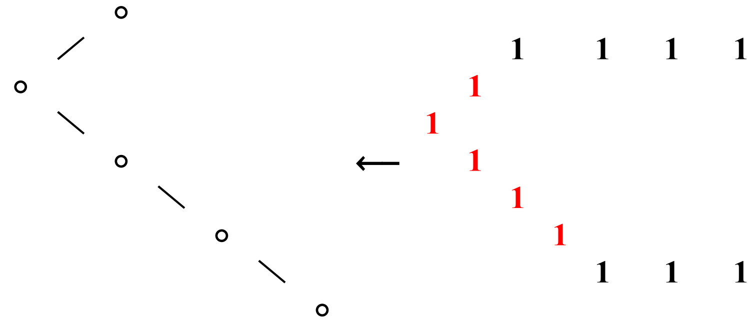
練習問題 [1] つづき

たとえば次のような１の並びから出発して数字を埋めていって整数性と有限反復性が成立していることを確認せよ.

```
    1   1   1   1   1   1   1   1
  1
1
  1
    1
  1
    1
      1   1   1   1   1   1   1   1   1
```

どうしてA型か

始めの１の並びの左端の部分に注目



この例では A_5 型のディンキン図形が得られる．

A型以外の型への一般化

- 各ディンキン図形ごとに整数性と有限反復性を持つフリーズ・パターンのルールを定めることができる！
- ディンキン図形をさらに一般化すると整数性は成立するが，有限反復性を持たないフリーズ・パターンのルールも構成できる．

D型のフリーズ・パターンの例

以下最上段と最下段の１の並びは省略する．

1		2		2		2		7		1
	1		3		3		13		6		1
		1		4		19		11		5		1
			1		5		4		3		2		1
			1		5		4		3		2		1

整数性と有限反復性が成立している．すべて整数．左端と右端の形が同じなので残りは繰り返し．

D型のルール(1)

まず１を以下のように並べる．

1 . . . . .
 1 . . . . .
  1 . . . . .
   1 . . . . .
   1 . . . . .

左端の１の並びはもっとジグザグであってもよい

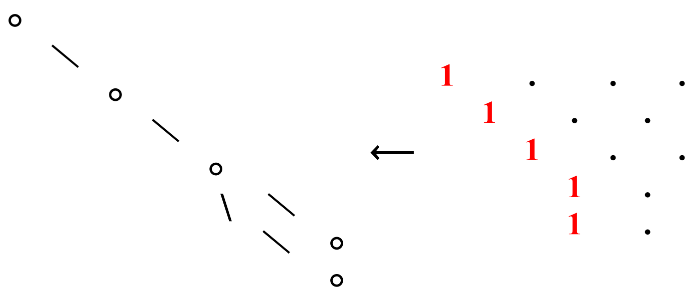
D 型のルール(2)

そして次のルールにしたがって数を埋めて行く.

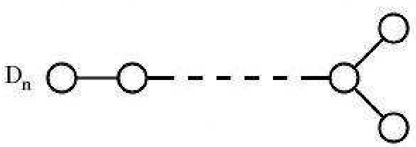
$$\begin{array}{cccccccccc} a & & a' & & . & & . & & & \\ & b & & b' & & . & & . & & \\ & & c & & c' & & . & & & \\ & & & d & & d' & & . & & \\ & & & e & & e' & & . & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} aa' &= b+1 \\ bb' &= a'c+1 \\ cc' &= b'de+1 \\ dd' &= c'+1 \\ ee' &= c'+1 \end{aligned}$$

どうして D 型か



この例では D_5 型ディンキン図形が得られる.



E_6 型のフリーズ・パターンの例

最上段と最下段の 1 の並びは省略する.

1		2		2		2		7		5		3		2		2		1
	1		3		3		13		34		14		5		3		1	
		1		4		19		63		95		23		7		1		
			1		5		4		16		6		4		2		1	
			1		5		23		11		26		8		1			
				1		6		4		3		9		1				

ちょっと分かりにくいが有限反復性も成立している.

E_6 型のルール

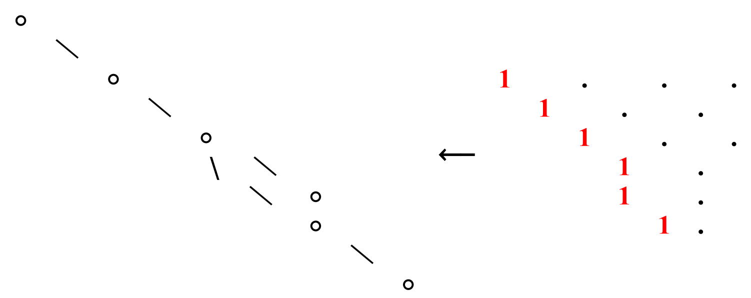
次のルールにしたがって数を埋めて行く.

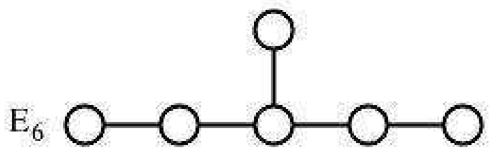
$$\begin{array}{cccccccccc} a & & a' & & . & & . & & & \\ & b & & b' & & . & & . & & \\ & & c & & c' & & . & & & \\ & & & d & & d' & & . & & \\ & & & e & & e' & & . & & \\ & & & & f & & f' & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} aa' &= b+1 \\ bb' &= a'c+1 \\ cc' &= b'de+1 \\ dd' &= c'+1 \\ ee' &= c'f+1 \\ ff' &= e'+1 \end{aligned}$$

- 上の方に段を増やして $E_{7,8}$ 型ルールも定義される.
- $E_{7,8}$ 型でも整数性と有限反復性が成立している.

どうして E_6 型か





B_n, C_n, F_4, G_2 型の場合

- 詳しくは説明しないが, B_n, C_n, F_4, G_2 型のフリーズ・パターンのルールの自然な定義があって, 整数性と有限反復性が成立している.
- ディンキン図形の 2 重 (3 重) 矢印に対応する部分に 2 乗 (3 乗) するというルールを適切に追加することになる.

$A_1^{(1)}$ 型のフリーズ・パターン (1)

次のルールを $A_1^{(1)}$ 型ルールと呼ぶ.

$$\begin{array}{cccccccc} a & & a' & & . & & . & \\ & b & & b' & & . & & . \end{array} \qquad \begin{aligned} aa' &= b^2 + 1 \\ bb' &= a'^2 + 1 \end{aligned}$$

$A_1^{(1)}$ 型のフリーズ・パターン:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 13 & & 89 & & 610 & & 4181 \\ & 1 & & 5 & & 34 & & 233 & & 1597 & \end{array}$$

有限反復性は成立していない.
しかし次ページの良い性質を持つ.

$A_1^{(1)}$ 型のフリーズ・パターン (2)

$A_1^{(1)}$ 型のフリーズ・パターンを構成する数列

$$1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, \dots$$

は漸化式 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ を満たしている. すなわち数列中の連続する 3 つの数字において両端の数の和は真ん中の数の 3 倍に等しい:

$$\begin{array}{ccc} 1, 1, 2 & \longrightarrow & 1 + 2 = 3 \times 1, \\ 1, 2, 5 & \longrightarrow & 1 + 5 = 3 \times 2, \\ 2, 5, 13 & \longrightarrow & 2 + 13 = 3 \times 5, \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

漸化式を $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ と書きなおせば

$A_1^{(1)}$ 型の場合にも整数性が成立することがわかる.

練習問題 [2]

前ページの漸化式を示せ. すなわち以下を証明せよ.
数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ を次のように定める:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1,$$
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

このとき $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ が成立する.

ヒント: $K_n = a_{n+1}^{-1} a_n^{-1} + a_{n+1} a_n^{-1} + a_{n+1}^{-1} a_n$ とおくと
$K_{n+1} = (a_{n+2} + a_n)/a_{n+1} = K_n = \cdots = K_1 = 3$ となる.

クラスター代数とは

- フォーミンとゼレヴィンスキーは2002年出版の論文でクラスター代数を導入した.
- フリーズ・パターンでは最初の出発点を「1の並び」に取るのであった.
- クラスター代数とは, 大雑把に言って, 出発点の「1の並び」における「左端」を変数に置き換えたもの.

(これは非常に正確ではない説明なので注意)

A_2 型の場合

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
x & & & & & & \\
 & y & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

から出発して A 型フリ・パタのルールで計算すると

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
x & & \frac{y+1}{x} & & \frac{x+1}{y} & & y \\
 & y & & \frac{x+y+1}{xy} & & x & \\
 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

分母が $x^a y^b$ の形になり, 有限反復性が成立!

A_2 型の場合の詳しい計算

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
x & & x' & & x'' & & x''' \\
 & y & & y' & & y'' & \\
 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

$$x' = \frac{y+1}{x},$$
$$y' = \frac{x'+1}{y} = \frac{x+y+1}{xy},$$
$$x'' = \frac{y'+1}{x'} = \frac{(x+1)(y+1)}{xy}\,\frac{x}{y+1} = \frac{x+1}{y},$$
$$y'' = \frac{x''+1}{y'} = \frac{x+y+1}{y}\,\frac{xy}{x+y+1} = x,$$
$$x''' = \frac{y''+1}{x''} = y.$$

A_3 型の場合

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
x & & & & & \\
 & y & & & & \\
 & & z & & & \\
 & & & 1 & 1 &
\end{array}
$$

から出発して A 型フリ・パタのルールで計算すると

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
x & & \frac{y+1}{x} & & \frac{x+z}{y} & & \frac{y+1}{z} & & z \\
 & y & & \frac{x+yz+z}{xy} & & \frac{xy+x+z}{yz} & & y & \\
 & & z & & \frac{xy+x+yz+z}{xyz} & & x & & \\
 & & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

分母が $x^a y^b z^c$ の形になり, 有限反復性が成立!

A_3 型の場合の計算の一部

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x & & x' & & x'' & & x''' & \\
 & y & & y' & & y'' & & y''' \\
 & & z & & z' & & z'' & \\
 & & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

$$x' = \frac{y+1}{x}, \quad y' = \frac{x'z+1}{y} = \frac{x+yz+z}{xy},$$

$$z' = \frac{y'+1}{z} = \frac{xy+x+yz+z}{xyz},$$

$$x'' = \frac{y'+1}{x'} = \frac{xy+x+yz+z}{xy}\frac{x}{y+1} = \frac{x+z}{y},$$

$$y'' = \frac{x''z'+1}{y'} = \frac{(x+yz+z)(xy+y+z)}{xy^2z}\frac{xy}{x+yz+z} = \frac{xy+y+z}{yz},$$

z'', x''', y''' を自力で求めてみよ.

クラスター代数の不思議

- 分子分母の複雑な因子が打ち消しあって, 分母が $x^a y^b$ や $x^a y^b z^c$ のような簡単な形 (単項式) になる. (ローラン現象. フリーズ・パターン ($x = y = z = 1$) の場合の整数性の一般化)
- ディンキン図形に対応するクラスター代数では有限反復性が成立している. (実はフォーミン＆ゼレヴィンスキーによって逆も成立することがわかっている. 有限型クラスター代数の分類)

  これも非常に正確でない説明の仕方なので注意!
- 計算結果の分子にマイナス記号が出て来ない. (正値性. 証明はとても難しい. まだ完全解決されていない.)

練習問題[3]

次の形から出発して A 型フリーズ・パターンのルールにしたがって残っている部分を埋めよ.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots & \\
x & & & & & & & & & & & \\
 & y & & & & & & & & & & \\
 & & z & & & & & & & & & \\
 & w & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots & &
\end{array}
$$

(1) 分母が単項式になること, (2) 有限反復性が成立していること, (3) 計算結果の分子にマイナス記号が出て来ないことを確認せよ.

理論の発展のまとめ

- 20世紀に2000年以上前の成果である「正多面体の分類」の話が「ディンキン数学」の形で復活した。
- 1970年代に発見されたコンウェイ・コクセターによるフリーズ・パターンの理論もまたディンキン数学の一部とみなせる(A型の場合).
- 21世紀になってからフリーズ・パターンの理論がクラスター代数の理論に一般化され, 大流行した.

驚くべき法則性のまとめ

- フリーズ・パターンでは奇跡的に割り切れてすべてが整数になり, しかもディンキン図形に対応する場合には有限反復性が成立している.
- クラスター代数の場合. 計算の途中で分子分母の複雑な因子が奇跡的にキャンセルしあって分母に単項式だけが残り, しかも分子にマイナス記号が現われないということになっている(ようだ).
- 有限反復性を持つクラスター代数がディンキン図形で分類される(クラスター代数もディンキン数学の一種).

練習問題[4]

1. 省略した計算を埋めよ.
2. インターネットで「正多面体」について検索してみよ.
3. インターネットで「ディンキン図形」について検索してみよ.
4. インターネットで「クラスター代数」について検索してみよ.

現代数学の世界へようこそ!

連絡先, 参考文献

メールアドレス: kuroki@math.tohoku.ac.jp

ウェブ: http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/

コンウェイ・コクセター・フリーズ入門:
J.H. コンウェイ, R.K. ガイ 共著,『数の本』, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001/12) にコンウェイ・コクセター・フリーズに関する話も書いてある.
http://www.amazon.co.jp/dp/4431707700 で立ち読みできる.

クラスター代数入門:
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/nakajima.pdf
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/cluster_algebra_rank2.pdf

この文書の版: 2010/12/27 Version 1.6