Jordan 標準形の計算の仕方

黒木玄

2010 年 6 月 10 日更新　(2010 年 6 月 9 日作成)

目 次

0　設定

以下, K は代数閉体 (たとえば複素数体 $\mathbb{C}$ や素数 p に対する $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^n}$) であるとし, 単位行列を E と表わす. A は K の元を成分に持つ $n \times n$ 行列であるとし, A の特性多項式, 最小多項式, Jordan 標準形をそれぞれ $p_A(x)$, $\varphi_A(x)$, J と表わす.

固有値 a に属するサイズ l の Jordan ブロック $J_l(a)$ を次のように定める:

$$J_l(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix} \quad (l \times l \text{ 行列}).$$

1　特性多項式を求める

特性多項式 $p_A(x) = |xE - A|$ を求める (n が大きいと非常に大変).

特性多項式 $p_A(x)$ は次のように因数分解されると仮定する:

$$p_A(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_r)^{n_s} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_s \in K \text{ は互いに異なる}).$$

このとき A の Jordan 標準形 J は対角成分がすべて a_i であるような n_i 次の上三角行列 J_i を用いて

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

と表わされる. 実際には J は Jordan 標準形なので対角成分を以外の 0 でない成分は対角成分のすぐ右上に並ぶ 1 だけである.

2　最小多項式を求める

A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ を求めるためには以下の手続きにしたがえばよい:

1. $(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_r)^{k_s}$ $(1 \leqq k_i \leqq n_i)$ と表わされる多項式の x に A を代入したものを低次のものから順番に計算する.

2. 最初に 0 になった多項式が A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ である.

たとえば $p_A(x) = (x-a)^3(x-b)^2$ $(a \neq b)$ の場合には

$$(x-a)(x-b),\ (x-a)^2(x-b),\ (x-a)(x-b)^2,\ (x-a)^2(x-b)^2,\ (x-a)^3(x-b)$$

の順番に x に A を代入したものを計算する. そのとき最初に 0 になったものが A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ である. どれも 0 にならなければ特性多項式 $p_A(x)$ 自身が最小多項式 $\varphi_A(x)$ になる. (Cayley-Hamilton の定理より $p_A(A) = 0$ が常に成立することに注意せよ.)

特に特性多項式が重根を持たないとき, 特性多項式自身が最小多項式になる.

最小多項式 $\varphi_A(x)$ は次の形をしていると仮定する:

$$\varphi_A(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_r)^{m_s} \quad (1 \leqq m_i \leqq n_i).$$

このとき固有値 a_i に属する (すなわち J_i に含まれる) Jordan ブロックのサイズの最大値は m_i になる. このことから以下が導かれる:

- 最小多項式が重根を持たないとき (特に特性多項式が重根を持たないとき), Jordan 標準形は対角成分に固有値を並べた対角行列になる.

- $n \leqq 3$ の場合には, 特性多項式と最小多項式から Jordan 標準形が一意に決定される.

- $n=4$ であるとする. 最小多項式が $\varphi_A(x)=(x-a)^2$ の形になる例外的な場合を除けば, 特性多項式と最小多項式から Jordan 標準形が一意に決定される. 最小多項式が $\varphi_A(x)=(x-a)^2$ の形になる場合には Jordan 標準形は次のどちらかの形になる:

$$J=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}.$$

  $J-aE$ の rank は前者の場合に 1 になり, 後者の場合に 2 になる. $A-aE$ と $J-aE$ の rank は等しいので, 最小多項式が $\varphi_A(x)=(x-a)^2$ の形になる場合には $A-aE$ の rank が 1 であるか否かがわかれば A の Jordan 標準形が一意に決定される.

- $n \geqq 5$ の場合にはさらに多くの場合の rank を計算しなければ Jordan 標準形が一意に決定できない場合が生じる.

3 Jordan 標準形を求める

一般に多項式 $f(x)$ に対して A とその Jordan 標準形 J を代入してできる行列 $f(A)$ と $f(J)$ の rank は等しくなる. なぜならば $A=PJP^{-1}$ (P はある可逆行列) が成立しているので $f(A)=f(PJP^{-1})=Pf(J)P^{-1}$ が成立するからである. 行列の rank は左右から可逆な行列をかける操作で不変である. この事実を使えば最小多項式 $\varphi_A(x)$ の因子の x に A を代入してできる行列の rank の情報を集めることよって A の Jordan 標準形を一意に決定できることがわかる.

最小多項式の因子

$$\varphi_k^{(i)}(x)=(x-a_i)^k\prod_{j(\neq i)}(x-a_j)^{m_j} \quad (0 \leqq k_i \leqq m_i)$$

に J を代入してできる行列 $\varphi_k^{(i)}(J)$ の rank がどのような値になるかを調べよう.

以下 i を固定して考える.

J_j に含まれる (すなわち固有値 a_j に属する) Jordan ブロックのサイズの最大値は m_j なので $(J_j-a_jE)^{m_j}$ は 0 になる. したがって $(J-a_jE)^{m_j}$ の J_j と同じ位置にあるブロックは 0 になる. このことから $j\neq i$ のとき $\prod_{j(\neq i)}(J-a_jE)^{m_j}$ の J_j と同じ位置にあるブロックはすべて 0 になる. 一方 $j\neq i$ のとき J_i-a_jE は可逆行列なので $\prod_{j(\neq i)}(J-a_jE)^{m_j}$ の J_i と同じ位置にあるブロックは可逆行列になる.

ゆえに $\varphi_k^{(i)}(J)=(J-a_iE)^k\prod_{j(\neq i)}(J-a_jE)^{m_j}$ において i とは異なる j に対する J_j と同じ位置にあるブロックはすべて 0 になり, J_i と同じ位置にあるブロックの rank は $(J_i-a_iE)^k$ の rank に等しくなる. したがって

$$\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)=\operatorname{rank}\left((J-a_iE)^k\prod_{j(\neq i)}(J-a_jE)^{m_j}\right)=\operatorname{rank}(J_i-a_iE)^k.$$

A の Jordan 標準形 J に含まれる固有値 a_i に属する (すなわちサイズ n_i の J_i に含まれる) すべての Jordan ブロックたちを

$$J_{l_1^{(i)}}, J_{l_2^{(i)}}, \dots, J_{l_{s_i}^{(i)}} \quad (1 \leqq l_1^{(i)} \leqq l_2^{(i)} \leqq \cdots \leqq l_{s_i}^{(i)}=m_i,\ l_1^{(i)}+l_2^{(i)}+\cdots+l_{s_i}^{(i)}=n_i)$$

と表わすと,

$$\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)=\operatorname{rank}(J_i-a_iE)^k=\sum_{\nu=1}^{s_i}\operatorname{rank}(J_{l_\nu^{(i)}}(a_i)-a_iE)^k=\sum_{\nu=1}^{s_i}\operatorname{rank}J_{l_\nu^{(i)}}(0)^k$$

である. そして

$$\operatorname{rank}J_l(0)^k=\begin{cases}l-k & (k\leqq l),\\ 0 & (k>l)\end{cases}$$

なので, $\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)$ は k について単調減少, $\operatorname{rank}\varphi_0^{(i)}(J)=n_i$, $\operatorname{rank}\varphi_{m_i}^{(i)}(J)=0$ であり,

$$d_k=\operatorname{rank}\varphi_{k-1}^{(i)}(J)-\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)$$

とおくと

$$d_k=(k\leqq l_\nu^{(i)}\ \text{となる}\ \nu\ \text{の個数}).$$

したがって,

$$n_k(a_i)=(J\ \text{に含まれる Jordan ブロック}\ J_k(a_i)\ \text{の個数})=\left(l_\nu^{(i)}=k\ \text{となる}\ \nu\ \text{の個数}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&d_k=n_k(a_i)+n_{k+1}(a_i)+\cdots+n_{m_i}(a_i),\\
&n_k(a_i)=d_k-d_{k+1}=\operatorname{rank}\varphi_{k-1}^{(i)}(J)-2\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)+\operatorname{rank}\varphi_{k+1}^{(i)}(J).
\end{aligned}$$

以上の結果から次の公式も得られる:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\varphi_{m_i-1}^{(i)}(J)=n_{m_i}(a_i),\\
&\operatorname{rank}\varphi_{m_i-2}^{(i)}(J)=n_{m_i-1}+2n_{m_i}(a_i),\\
&\operatorname{rank}\varphi_{m_i-3}^{(i)}(J)=n_{m_i-2}(a_i)+2n_{m_i-1}+3n_{m_i}(a_i),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\operatorname{rank}\varphi_1^{(i)}(J)=n_2(a_i)+2n_3(a_i)+\cdots+(m_i-1)n_{m_i}(a_i),\\
&\operatorname{rank}\varphi_0^{(i)}(J)=n_1(a_i)+2n_3(a_i)+\cdots+(m_i-1)n_{m_i-1}(a_i)+m_in_{m_i}(a_i)=n_i.
\end{aligned}$$

$\varphi_k^{(i)}(J)=(J-a_iE)\varphi_{k-1}^{(i)}(J)$ と $d_k=\operatorname{rank}\varphi_{k-1}^{(i)}(J)-\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)$ より

$$\dim\left(\operatorname{Ker}(J-a_iE)\cap\operatorname{Im}\varphi_{k-1}^{(i)}(J)\right)=\dim\operatorname{Im}\varphi_{k-1}^{(i)}(J)-\dim\operatorname{Im}\varphi_k^{(i)}(J)=d_k.$$

行列 A の Jordan 標準形 J を決定するために必要なデータは $n_k(a_i)$ たちである. $\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(J)=\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(A)$ であることより, $\operatorname{rank}\varphi_k^{(i)}(A)$ を計算することによって $n_k(a_i)$ をすべて求め, A の Jordan 標準形 J の形を一意に決定できる. 次の節でそのような計算の例を示しておく.

4　Jordan 標準形を求める (例で説明)

たとえば $n=13$, $s=1$, $a_1=a$, $p_A(x)=(x-a)^{13}$, $l_\nu^{(1)}=l_\nu$ であり，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rank}(A-aE)^0=13,\\
&\mathrm{rank}(A-aE)^1=7,\\
&\mathrm{rank}(A-aE)^2=2,\\
&\mathrm{rank}(A-aE)^3=0
\end{aligned}$$

であるとする．このとき $\varphi_A(x)=(x-a)^3$ であり，l_ν の最大値は 3 になり，

$$\begin{aligned}
d_1&=13-7=6=(1\leqq l_\nu \text{ となる } \nu \text{ の個数}),\\
d_2&=7-2\ \ \ =5=(2\leqq l_\nu \text{ となる } \nu \text{ の個数}),\\
d_3&=2-0\ \ \ =2=(3\leqq l_\nu \text{ となる } \nu \text{ の個数}),\\
d_4&=0-0\ \ \ =0=(3\leqq l_\nu \text{ となる } \nu \text{ の個数})
\end{aligned}$$

となる．ゆえに A の Jordan 標準形 J において

$$\begin{aligned}
&(\text{Jordan ブロック } J_1(a) \text{ の個数})=d_1-d_2=1,\\
&(\text{Jordan ブロック } J_2(a) \text{ の個数})=d_2-d_3=3,\\
&(\text{Jordan ブロック } J_3(a) \text{ の個数})=d_3-d_4=2.
\end{aligned}$$

すなわち A の Jordan 標準形 J は次の形になる:

$$J=\begin{bmatrix}
J_3(a) & & & & & \\
& J_3(a) & & & & \\
& & J_2(a) & & & \\
& & & J_2(a) & & \\
& & & & J_2(a) & \\
& & & & & J_1(a)
\end{bmatrix}.$$

5　Jordan 標準形への相似変換を求める (例で説明)

簡単のため前節の例で説明する．
一般の場合は以下の $(A-aE)^k$ を $\varphi_k^{(i)}(A)$ で置き換えて同様に計算することになる．

1. $\mathrm{rank}(A-aE)^2=2$ なので $\mathrm{Im}(A-aE)^2$ に含まれるベクトル $v_{p,1}$ $(p=1,2)$ の組で一次独立なものが存在する．$p=1,2$ に対して $v_{p,1}\in\mathrm{Im}(A-aE)^2$ なのであるベクトル $v_{p,2},v_{p,3}$ で $(A-aE)v_{p,2}=v_{p,1}$, $(A-aE)v_{p,3}=v_{p,2}$ を満たすものが存在する．このとき $(A-aE)^3=0$ より，$p=1,2$ に対して

$$(A-aE)v_{p,1}=0,\ (A-aE)v_{p,2}=v_{p,1},\ (A-aE)v_{p,3}=v_{p,2},$$

すなわち

$$Av_{p,1}=av_{p,1},\ Av_{p,2}=v_{p,1}+av_{p,2},\ Av_{p,2}=v_{p,2}+av_{p,3}.$$

より具体的には以下のように $v_{p,k}$ $(p=1,2,\ k=1,2,3)$ を取れる．互いに異なる j_1, j_2 で $(A-aE)^2$ の第 j_1, j_2 列ベクトルの組が一次独立になるものが存在する．このとき $v_{p,k}=(A-aE)^{3-k}e_{j_p}$ $(p=1,2,\ k=1,2,3)$ と定めると，それらは上の性質を満たしている．

2. $\mathrm{Ker}(A-aE)\cap\mathrm{Im}(A-aE)^1$ は $\mathrm{rank}(A-aE)^1=7$, $\mathrm{rank}(A-aE)^2=2$ より 5 次元であり，$v_{p,1}$ $(p=1,2)$ を含んでいる．したがって $\mathrm{Ker}(A-aE)\cap\mathrm{Im}(A-aE)^1$ に含まれるベクトル $v_{p,1}$ $(p=3,4,5)$ で $v_{p,1}$ $(p=1,2,3,4,5)$ が一次独立になるものが存在する．$p=3,4,5$ に対して $v_{p,1}\in\mathrm{Im}(A-aE)^1$ なのであるベクトル $v_{p,2}$ で $v_{p,1}=(A-aE)v_{p,2}$ をみたすものが存在する．このとき $p=3,4,5$ に対して
$$(A-aE)v_{p,1}=0,\ (A-aE)v_{p,2}=v_{q,1},$$
すなわち
$$Av_{p,1}=av_{p,1},\ Av_{p,2}=v_{p,1}+av_{p,2}.$$

3. $\mathrm{Ker}(A-aE)\cap\mathrm{Im}(A-aE)^0$ は $\mathrm{rank}(A-aE)^0=13$, $\mathrm{rank}(A-aE)^1=7$ より 6 次元であり，$v_{p,1}$ $(p=1,2,3,4,5)$ を含んでいる．したがって $\mathrm{Ker}(A-aE)\cap\mathrm{Im}(A-aE)^0$ に含まれるベクトル $v_{6,1}$ で $v_{p,1}$ $(p=1,2,\ldots,6)$ が一次独立になるものが存在する．このとき
$$(A-aE)v_{6,1}=0,$$
すなわち
$$Av_{6,1}=av_{6,1}.$$

4. 以上で定めた 13 本のベクトル $v_{p,k}$ たちは一次独立である．よって正方行列 P を $P=[v_{1,1},v_{1,2},v_{1,3},v_{2,1},v_{2,2},v_{2,3},v_{3,1},v_{3,2},v_{4,1},v_{4,2},v_{5,1},v_{5,2},v_{6,1}]$ と定めると P は可逆行列になる．さらに $v_{p,k}$ たちの性質より，$AP=PJ$ すなわち $A=PJP^{-1}$ となることもわかる．

6 n が小さい場合

以下，Jordan ブロック $J_{k_1}(a_1),\ldots,J_{k_r}(a_r)$ を対角線に並べた行列を $\mathrm{diag}(J_{k_1}(a_1),\ldots,J_{k_r}(a_r))$ と表わす．特に $J_1(a)=a$ であることに注意せよ．

6.1 $n=1$ の場合

1×1 行列 A の Jordan 標準形 J は A 自身である．

6.2 $n=2$ の場合

2×2 行列 A の Jordan 標準形 J は A の特性多項式 $p_A(x)$ と最小多項式 $\varphi_A(x)$ から一意に決まる:

1. $p_A(x)=(x-a)(x-b)$ $(a\neq b)$ のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, b)$.

2. $p_A(x) = (x-a)^2$ のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, a) = aE \iff \varphi_A(x) = x - a \iff A = aE$,
- $J = J_2(a) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2 \iff A \neq aE$.

6.3 $n = 3$ の場合

3×3 行列 A の Jordan 標準形 J は A の特性多項式 $p_A(x)$ と最小多項式 $\varphi_A(x)$ から一意に決まる:

1. $p_A(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, (a, b, c は互いに異なる) のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, b, c)$.

2. $p_A(x) = (x-a)^2(x-b)$ $(a \neq b)$ のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, a, b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)(x-b)$
$\iff \mathrm{rank}(A - aE) = 1$,
- $J = \mathrm{diag}(J_2(a), b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2(x-b)$
$\iff \mathrm{rank}(A - aE) = 2 \iff \mathrm{rank}(A - aE) \neq 1$.

3. $p_A(x) = (x-a)^3$ のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, a, a) = aE \iff \varphi_A(x) = x - a$
$\iff A = aE$,
- $J = \mathrm{diag}(J_2(a), a) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2$
$\iff \mathrm{rank}(A - aE) = 1$,
- $J = J_3(a) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^3$
$\iff \mathrm{rank}(A - aE) = 2 \iff A \neq aE$ かつ $\mathrm{rank}(A - aE) \neq 1$

6.4 $n = 4$ の場合

4×4 行列 A の Jordan 標準形 J は A の特性多項式 $p_A(x)$ と最小多項式 $\varphi_A(x)$ からひとつの例外的場合を除いて一意に決まる:

1. $p_A(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, ($a, b, c, d$ は互いに異なる) のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, b, c, d)$.

2. $p_A(x) = (x-a)^2(x-b)(x-c)$ (a, b, c は互いに異なる) のとき

- $J = \mathrm{diag}(a, a, b, c) \iff \varphi_A(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$
$\iff \mathrm{rank}(A - aE) = 2$,
- $J = \mathrm{diag}(J_2(a), b, c) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2(x-b)(x-c)$
$\iff \mathrm{rank}(A - aE) = 3 \iff \mathrm{rank}(A - aE) \neq 2$.

3. $p_A(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ $(a \neq b)$ のとき

   - $J = \mathrm{diag}(a,a,b,b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)(x-b)$
     $\iff \mathrm{rank}(A-aE) = \mathrm{rank}(A-bE) = 2,$
   - $J = \mathrm{diag}(J_2(a),b,b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2(x-b)$
     $\iff \mathrm{rank}(A-aE) = 3$ かつ $\mathrm{rank}(A-bE) = 2$
   - $J = \mathrm{diag}(a,a,J_2(b)) \iff \varphi_A(x) = (x-a)(x-b)^2$
     $\iff \mathrm{rank}(A-aE) = 2$ かつ $\mathrm{rank}(A-bE) = 3$
   - $J = \mathrm{diag}(J_2(a),J_2(b)) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2(x-b)^2$
     $\iff \mathrm{rank}(A-aE) = 3$ かつ $\mathrm{rank}(A-bE) = 3.$

4. $p_A(x) = (x-a)^3(x-b)$ $(a \neq b)$ のとき

   - $J = \mathrm{diag}(a,a,a,b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)(x-b) \iff \mathrm{rank}(A-aE) = 1,$
   - $J = \mathrm{diag}(J_2(a),a,b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^2(x-b) \iff \mathrm{rank}(A-aE) = 2,$
   - $J = \mathrm{diag}(J_3(a),b) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^3(x-b) \iff \mathrm{rank}(A-aE) = 3.$

5. $p_A(x) = (x-a)^4$ のとき

   - $J = A = \mathrm{diag}(a,a,a,a) = aE \iff \varphi_A(x) = x-a,$
   - $\varphi_A(x) = (x-a)^2$ のとき (これが例外的な場合)
     - $J = \mathrm{diag}(J_2(a),a,a) \iff \mathrm{rank}(A-aE) = 1,$
     - $J = \mathrm{diag}(J_2(a),J_2(a)) \iff \mathrm{rank}(A-aE) = 2 \iff \mathrm{rank}(A-aE) \neq 1,$
   - $J = \mathrm{diag}(J_3(a),a) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^3 \iff \mathrm{rank}(A-aE) = 2,$
   - $J = J_4(a) \iff \varphi_A(x) = (x-a)^4.$

7 練習問題

1. 5×5 行列の Jordan 標準形についてまとめよ.
2. 以上で説明した方法とは異なる Jordan 標準形の計算法についてまとめよ.
3. Cayley-Hamilton の定理を Jordan 標準形の理論を用いて証明せよ.
4. Cayley-Hamilton の定理を Jordan 標準形の理論を経由せずに行列式の余因子展開のみを用いて証明せよ.
5. べき零行列に限って Jordan 標準形の存在と一意性を証明せよ.
6. 単因子論について勉強し, 単因子論を用いて Jordan 標準形の存在を証明せよ.
7. 有限生成 Abel 群の基本定理について勉強し, 有限生成 Abel 群の理論と単因子論に基づいた Jordan 標準形の理論のあいだの類似性について論ぜよ.